代数幾何学シンポジウム記録
1981年度 pp.54-83

有理曲線の輪を含むVII_0-曲面について

榎 一郎 (上智大 理工)

§1. Introduction

コンパクト連結で2次元の複素多様体を単に曲面と呼ぶ。VII_0-曲面とは、$b_1=1$ の極小曲面のこと、すなわち、小平の曲面の分類表[6, I, IV]において、その構造の欄が空欄"?"となっている唯一の曲面のことである。例は、次のようにさまざまなものが知られている：

0) $\mathbb{P}^1$上の楕円曲面(の一部) } [6, II]*
1) Hopf曲面 } [6, II]*
2) 曲線なしの井上曲面(三種類) [7]*
3) 放物型井上曲面 [8], [3 II], [2]*
4) Hilbertモジュラ型井上曲面 [8, II], [9]*

(それぞれ、[ ]*において特徴付が与えられ

ている。）一方，加藤[3, I]は次のような概念を導入した。

<u>定義</u>　十分小さい $\varepsilon>0$ に対して，

$$\Omega = \{ z=(z_1,\dots,z_n)\in \mathbb{C}^n \mid 1-\varepsilon < \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 < 1+\varepsilon \}$$

とおく。連結コンパクトな n 次元複素多様体 X に対し，正則な包含写像 $\iota : \Omega \hookrightarrow X$ があって，$X-\iota(\Omega)$ が連結となるとき，$\iota(\Omega)$ を X の <u>GSS</u>（global spherical shell）という。

上にあげた例のうち，$\pi_1 \cong \mathbb{Z}$ の Hopf 曲面，放物型井上曲面，Hilbert モジュラー型井上曲面は GSS を含む。さらに別の VII_0-曲面が，GSS を含む曲面として構成できる[3, II][1]（§5を見よ）。現在（1981年末）知られている $b_2>0$ の VII_0-曲面の例は，GSS を含むものでつきている。

ここでは，GSS の存在定理への第一歩として，次の定理とその応用について述べる。

<u>定理</u>1.　GSS を含む曲面の任意の変形は，再び，GSS を含む。

実際，これは，弱い形ではあるが，一種の存在定理であって，次の定理の証明に応用

できる。

<u>定理2</u> [9]. S を $b_2>0$ の VII_0-曲面とする。このとき, S 上の曲線 C で $b_1(C)\geqq 2$ となるものがあれば, S は GSS を含む。

上の定理において, C は連結でなくてもよい。一般に, $b_2>0$ の VII_0-曲面上の曲線は $3\geqq b_1\geqq 0$ をみたす. $b_2=0$ で曲線を含む VII_0-曲面は既に決定されている(§2, §3の事実を見よ)。

§2. VII_0-曲面上の曲線

S を VII_0-曲面, C を S 上の任意の曲線とする。

S の代数次元が1なら, S は楕円曲面で, $b_2(S)=0$, C の連結成分は全て(非特異)楕円曲線 [5, II].

S の代数次元が 0 なら, [5, I; Th.5.1] の証明から, C の仮想種数 $\pi(C)$ に関して次がわかる:

1) $\pi(C)\leqq q(S)-p_g(S)+1=2$

さらに, S の m 次不分岐被覆(これも代数次元0の VII_0-曲面)を考えて $(m\geqq 3)$, 1) を用いると次がわかる。

4

2) Cは正規交叉，各既約成分は，非特異有理曲線，通常二重点をもつ有理曲線もしくは非特異楕円曲線のいずれか。

3) $b_1(C) \neq 0$ なら，Cは $H_1(S,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ の生成元を代表するループを含む。

§3. 楕円曲線を含むVII_0－曲面

[6, II] と [2] の結果をあわせると，次のようになる．

事実．自己交点数 0 の因子$(\neq 0)$をもつVII_0－曲面は，楕円曲面，Hopf曲面，放物型井上曲面に限る。

この節では，これを用いて，次を示す（筆者には，中村郁氏によって指摘された）。

命題．楕円曲線を含むVII_0－曲面は，楕円曲面，Hopf曲面，放物型井上曲面のいずれか．

注意．全ての楕円曲面，Hopf曲面は楕円曲線を含む．しかし，放物型井上曲面$S_{n,a,t}$（記号は[2]のもの，とくに$t \in \mathbb{C}^n$）は，$t=0$のとき楕円曲線を含むが，$t \neq 0$のときは楕円曲線を含まない。

まず，次を示す．

<u>井上の補題</u>　Sを，楕円曲線 E を含む $b_1(S)=1$ の曲面とすると，S上の 自明ではない直線束 F で

$c_1(F)_{\mathbb{R}}=0$ ，　　$F|E$ は自明

となるものがある。

㊟ 完全列 $0\to\mathbb{Z}\to\mathbb{C}\to\mathbb{C}^*\to 0$ から，図式

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & H^1(S,\mathbb{Z}) & \to & H^1(S,\mathbb{C}) & \longrightarrow & H^1(S,\mathbb{C}^*) & \\
 & \wr\wr & & \wr\wr & & \downarrow r & \\
 & \mathbb{Z} & & \mathbb{C} & & H^1(E,\mathbb{C}^*) \cong E &
\end{array}$$

をえる。ただし r は制限写像。この図式において，群は全て複素Lie群，写像は全てLie群の準同型になっている。したがって $H^1(S,\mathbb{C}^*)$ は $\mathbb{C}^*$をLie部分群に含む。よって $\mathrm{Ker}(r)\neq\{0\}$. $\mathrm{Ker}(r)-\{0\}$の元が 求めるFを定める。

<u>命題の証明</u>．SをVII_0-曲面，$E\subset S$を楕円曲線，Fを井上の補題による S上の直線束，Kを Sの標準直線束とする。完全列 $0\to\mathcal{O}(F-E)\to\mathcal{O}(F)\to\mathcal{O}_E\to 0$ から導かれるコホモロジー群の長完全列を考える．SはVII_0なので，$\chi(S,\mathcal{O}(F))=\chi(S,\mathcal{O})=0$ ([6 I])．よって次のいずれかがおこることがわかる．

i) $H^0(S,\mathcal{O}(F))\neq 0$

$$\text{ii)}\begin{cases} H^2(S,\mathcal{O}(F-E)) \cong H^0(S,\mathcal{O}(K-F+E)) \neq 0 \\ H^2(S,\mathcal{O}(F)) \cong H^0(S,\mathcal{O}(K-F)) = 0 \end{cases}$$

i) このとき，因子 D により $F=[D]$ とかける。$F\neq 0$ なので，$D\neq 0$. $c_1(F)_{\mathbb{R}}=0$ なので，$D^2=0$。よって，命題は，事実から従う。

ii) S は VII_0 なので，任意の因子 Δ に対し，$\Delta^2 \leqq 0$ である（[6, I]）. さて因子 $D=\sum m_\nu \Theta_\nu$ により $K-F+E=[D]$ とかく，ただし $m_\nu \geqq 0$，各 Θ_ν は既約曲線とする. 事実により，$\Theta_\nu{}^2<0$ の場合を調べればよい。Θ_ν は第一種例外曲線では無いので，$K\cdot\Theta_\nu \geqq 0$。 II)の2つ目の条件から $\Theta_\nu \neq E$. よって，

$$0 \geqq D^2 = \sum m_\nu \{K\cdot\Theta_\nu + E\cdot\Theta_\nu\} \geqq 0.$$

すなわち $D^2=0$.

$D\neq 0$ なら命題は事実から従う。

$D=0$ のときは，$K=F-E$。そこで完全列

$$0 \to \mathcal{O}(-F-E) \to \mathcal{O}(-F) \to \mathcal{O}_E \to 0$$

から導かれるコホモロジー群の長完全列を考えると，$\chi(S,\mathcal{O}(-F))=0$ により，次のいずれかがおこることがわかる。

ii-a) $H^0(S,\mathcal{O}(-F)) \neq 0$

ii-b) $H^2(S,\mathcal{O}(-F-E)) \cong H^0(S,\mathcal{O}(2F)) \neq 0$.

いずれの場合も，i)のときと同じ理由により，命題は事実から従う。

§4　$b_1 \geqq 2$の曲線を含むVII_0-曲面 ― 定理2の証明

定理1を仮定して，定理2を証明する。Sを定理2の仮定をみたすVII_0-曲面とする。§2と§3の結果から，次の条件I), II)をみたす場合のみを考えればよい。

I)　Sは有理曲線からなる2つのひげなしの車輪，C_1, C_2, $C_1 \cap C_2 = \phi$, を含む。$C = C_1 \cup C_2$とかく。

II)　S上の任意の曲線の交点行列は負定値.

KをSの標準直線束とする. 次から始める。

Step 1 (井上). $K = [-C_1 - C_2]$.

まず $H^0(S, \mathcal{O}(K+C)) \neq 0$を示す. $=0$とせよ。$q(S)=1$なので，完全列

$$0 \to \mathcal{O}(K) \to \mathcal{O}(K+C) \to \mathcal{O}_C(K+C) \to 0$$

から導かれるコホモロジー群の長完全列を考えると，

$H^0(C, \mathcal{O}_C(K+C)) \cong H^0(C_1, \mathcal{O}_{C_1}(K+C_1)) \oplus H^0(C_2, \mathcal{O}_{C_2}(K+C_2)) \cong \mathbb{C}$。

よって（必要なら，番号をつけかえて）$H^0(C_1, \mathcal{O}_{C_1}(K+C_1)) = 0$. 一方，仮定により，$H^0(S, \mathcal{O}(K+C_1)) = 0$なので，完全列

$$0 \to \mathcal{O}(K) \to \mathcal{O}(K+C_1) \to \mathcal{O}_{C_1}(K+C_1) \to 0$$

から導かれるコホモロジー群の長完全列を考えると，矛盾が生じることがわかる。

因子 $D=\sum m_\nu \Theta_\nu$ によって，$K+C=[D]$ とかく，ただし Θ_ν は既約，$m_\nu \geq 0$。 条件 I) II) を用いると $(K+C)\cdot\Theta_\nu \geq 0$ がわかる。これから $D^2 \geq 0$ が従い，条件 II) により，$D=0$。 結局，$K+C=0$，すなわち，$K=-C_1-C_2$。

<u>Step 2</u>. 任意の m に対し，$H^0(S,\Omega^1(mC_1))=0$.

$\eta \in H^0(S,\Omega^1(mC_1))$ を任意にとる。$b_2>0$ なので，S 上の有理函数は定数のみ。ゆえに，Step 1を用いて，

$$H^0(S,\Omega^2((m+1)C_1)) \cong H^0(S,\mathcal{O}(mC_1-C_2))=0.$$

従って，$d\eta=0$ となり，表現

$$\mu: H_1(S-C_1,\mathbb{R}) \to \mathbb{C}, \qquad \mu([\gamma])=\int_\gamma \eta$$

が定まる。ここで，C_1 の交点行列は負定値なので，$H_1(S-C_1,\mathbb{R})=H_1(S,\mathbb{R})=\mathbb{R}$ となる。 さらに，§2の3)により，C_2 は $H_1(S-C_1,\mathbb{R})$ の生成元を代表するループ γ_0 を含む。 一方，η は C_2 上正則で，C_2 は有理曲線からなるので，$\int_{\gamma_0}\eta=0$. 結局 $\mu\equiv 0$.

$\mu=0$ により，$f(x)=\int^x \eta$ は $S-C_1$ 上の一価な正則函数を定める。C_1 の交点行列は負定値なので，f は S まで正則に拡張される 従って f は定数，すなわち，$\eta=0$。

$\mathcal{S}=\{S_t\}_{t\in T}$, $S_0=S$. をSの変形の完備な複素解析族とする。

<u>Step 3.</u> Sの微小変形S_tで楕円曲線をもつものがある。

(証) MをC_1の近傍とする。C_1の交点行列は負定値なので、Mにおいて、C_1を一点につぶしたものはStein空間になるとしてよい。$m>0$に対して、完全列

$$0\to\Theta(-mC_1)\to\Theta\to\Theta|_{mC_1}\to 0$$

からのコホモロジー群の完全列を考える。Mは2次元強擬凸なので、$H^2(M,\Theta(-mC_1))=0$. Rossiの結果から、$m>0$を適当にとれば、制限によって同型$H^1(M,\Theta)\simeq H^1(C_1,\Theta|_{mC_1})$をえる。一方、Step 1, 2により、

$$H^2(S,\Theta(-mC_1))\cong H^0(S,\Omega^1((m-1)C_1-C_2))=0.$$

結局、上とあわせて、

$$(☆)\quad\begin{cases}H^2(S,\Theta)=H^2(M,\Theta)=0,\\ H^1(S,\Theta)\to H^1(M,\Theta)\ \text{は全射。}\end{cases}$$

さて、2次元強擬凸多様体の変形に関しては、小平－Spencer型の定理が成り立つので、(☆)により、$\mathcal{S}$は、C_1の近傍の全ての変形を実現していることがわかる[11]。一方、交点行列負定値の有理曲線の車輪の近傍の微小変形で、楕円曲線をもつものの存在は知られていた(Karras).

Step 4. S_t は，Hopf曲面か放物型井上曲面のblow-up。

☺ Step 1により，Sの12-種数 $P_{12}(S)=0$。よって，その微小変形 S_t に対しても，$P_{12}(S_t)=0$。すなわち，もし S_t が楕円曲面なら，S_t はHopf曲面のblow-upとなる[6, II]。ゆえにStep 3と§4の命題からStep 4が従う。

Step 5. $\pi_1(S) \cong \pi_1(S_t) \cong \mathbb{Z}$。

☺ $\pi: \tilde{S} \to S$ を普遍被覆とし，$\pi_1(S)$ は被覆変換群と同一視する。§2の3)により，各 $\pi^{-1}(C_i)$ の連結成分は，有理曲線からなる鎖である。一方，$b_1(S)=1$ なので，$\pi^{-1}(C_i)$ は，有限個の連結成分からなる。また，$g \in \pi_1(S)$ は，$g \neq id.$ なる固定点をもたない。よって，$g|\pi^{-1}(C) = id.$ なら $g = id.$ である。以上により，

$$G = \{g \in \pi_1(S) \mid g\text{は}\pi^{-1}(C)\text{の各連結成分を同じ成分へ写す}\}$$

は $\pi_1(S)$ の，指数有限の正規部分群となる。$S' = \tilde{S}/G$ は，Sの有限次不分岐被覆で，代数次元0のVII_0-曲面であるから，S' に含まれる有理曲線の輪の数は高々2（§2，1））。結局，各 $\pi^{-1}(C_i)$ は連結で，$\pi_1(S) \subset \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ となった。さらに $b_1(S)=1$ なので，$\pi_1(S) \cong \mathbb{Z}$。

これで，定理1が応用できる。

最後のStep. SはGSSを含む。

☺ $\pi_1 \cong \mathbb{Z}$ のHopf曲面と，放物型井上曲面はGSSを

含む(c.f. §5). GSSを含む曲面のblow-upもGSSを含む。よって, Step4とStep5により, S_tはGSSを含む。定理1により, その変形SもGSSを含む。

§5. GSSを含む曲面, I

GSSを含む曲面は全て次のようにして構成できる。$z=(z_1, z_2)\in\mathbb{C}^2$に対して, $|z|=\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2}$とかく。

① $B=\{z\in\mathbb{C}^2 \mid |z|<1+\varepsilon\}$ $(\varepsilon>0)$

$\Omega=\{z\in\mathbb{C}^2 \mid 1-\varepsilon<|z|<1+\varepsilon\}$

とおく。Bから, $B-\overline{\Omega}$ (のtotal transform)上の点のみ, n回blow-upしたものをZとする。$\Omega\subset Z$とみなす。

② $Z-\overline{\Omega}$の一点をとり, その点のまわりの座標近傍(U, w)を適当にとって,

$$B'=\{w\in U \mid |w|<1+\varepsilon\}\Subset U\Subset Z-\overline{\Omega}$$

$$\Omega'=\{w\in U \mid 1-\varepsilon<|w|<1+\varepsilon\}$$

$$N'=B'-\Omega'$$

とする。

③ 全射 双正則写像 $\sigma: B\to B'$を適当にとる。

$Z-N'$ において，各 $x\in\Omega$ と $\zeta(x)\in\Omega'$ とを同一視したものを S とすると S は $\pi_1(S)\cong\mathbb{Z}$，$b_2(S)=n$ の曲面となる。Z において $\Omega\cap\Omega'=\phi$ なので，$\Omega\subset S$ とみなせる。さらに $S-\Omega=Z-\Omega\cup B'$ は連結なので，Ω は S の GSS である。

さらに具体的に見よう (cf. [1], [3], [8], [9])．B から Z をえる blow-up の過程を

$$B=W_0\xleftarrow{\sigma_1}W_1\xleftarrow{\sigma_2}\cdots\cdots\leftarrow W_{n-1}\xleftarrow{\sigma_n}W_n=Z$$

とかく。ここで，σ_i は点 $p_i\in W_{i-1}$ における blow-up とし，$C_i=\sigma_i^{-1}(p_i)$ とする。proper transform には同じ記号をあてる。$\lambda:Z-N'\to S$ を自然な射影とすると，各 C_i に対応して，S 上の有理曲線 Θ_i があって，

$$\lambda(C_i\cap Z-N')\subset\Theta_i \qquad i=1,2,\cdots,n$$

となる．また S 上の有理曲線は，これら $\Theta_1,\Theta_2,\cdots,\Theta_n$ に限る．

さて，

$$C_{j-n}=\zeta^{-1}(C_j\cap B')\quad\subset B$$

とおいて，以下

$$p_{i+1}\in C_i \qquad i=0,1,2,\cdots,n-1$$

と仮定する（これは S が極小であるための条件である）。このとき，p_{i+1} の位置には，次の2つのタイプがある。

α)　$p_{i+1} \in C_i - \bigcup_{j<i} C_j$

β)　$p_{i+1} \in C_i \cap \bigcup_{j<i} C_j$.

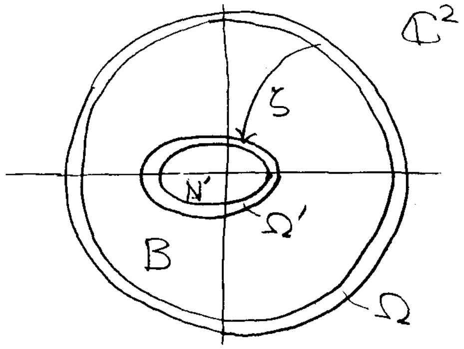
したがって，Sには次の4つのタイプがある。

O)　$n=0$，すなわち B をblow-upしないとき。

A)　p_{i+1}の位置のタイプが全てα型のとき。

B)　p_{i+1}の位置のタイプが全てβ型のとき。

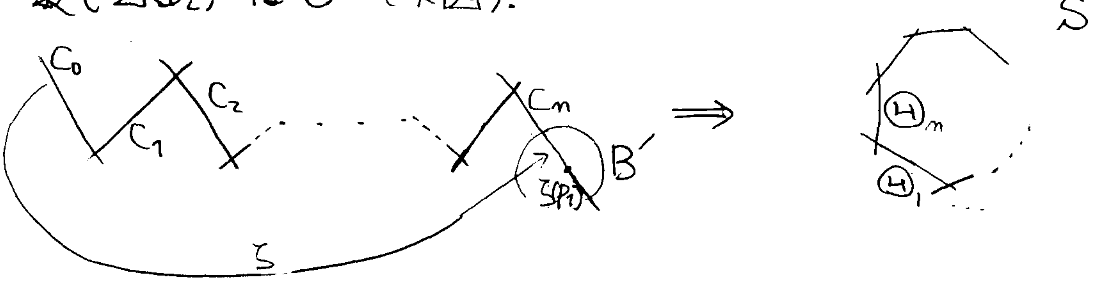
AB)　p_{i+1}の位置のタイプにα型，β型の両方があらわれるとき。



各タイプをくわしく見よう。

O)　このときSは($\pi_1 \cong \mathbb{Z}$ の) Hopf曲面である(右図)。

A)　このとき，C_iの配置は鎖状になる。S上$\sum \Theta_i$はひげなしの輪で，自己交点数$(\sum \Theta_i)^2$は0（下図）。

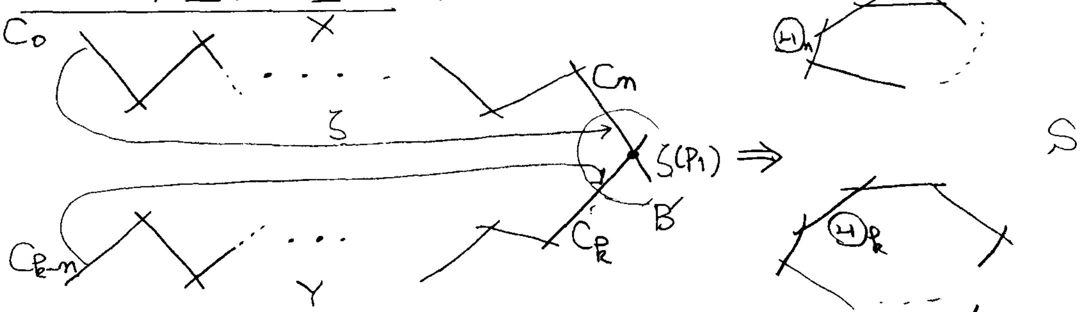


すなわち，Sは<u>放物型井上曲面</u>である。

B) このとき, $\bigcup_{j\le n} C_j \cap (Z-N')$ は 2つの連結成分 X, Y から成る。さらに2つの場合に分ける。

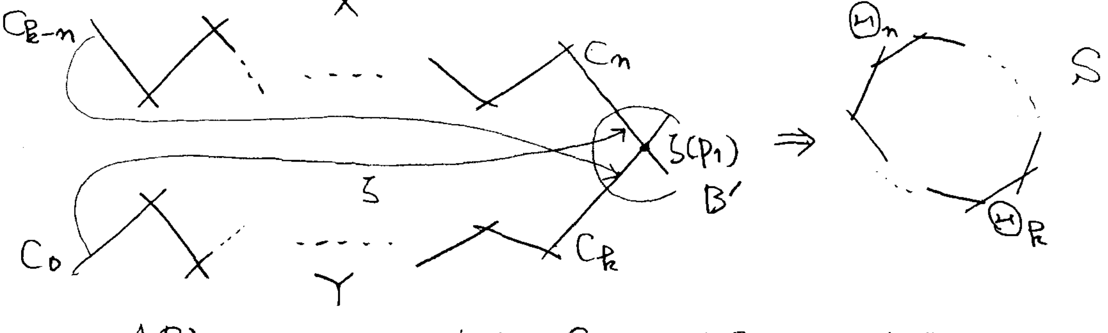
B_0) $\zeta(X\cap\Omega)\subset X\cap\Omega'$, $\zeta(Y\cap\Omega)\subset Y\cap\Omega'$

となるときは, $\sum \textcircled{4}_i$ は 2本の ひげなしの車輪, S は Hilbert モジュラー型井上曲面 である(下図).



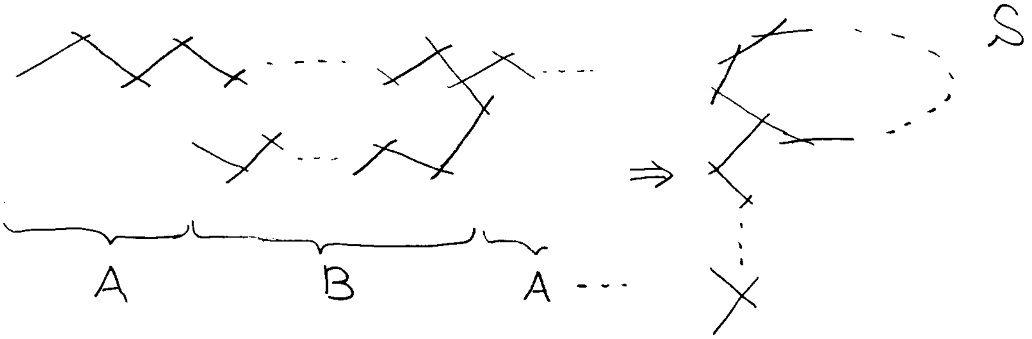
B_1) $\zeta(X\cap\Omega)\subset Y\cap\Omega'$, $\zeta(Y\cap\Omega)\subset X\cap\Omega'$

となるときは, $\sum \textcircled{4}_i$ は 1本の ひげなしの車輪となる. S は, 自己双対 Hilbert モジュラー型井上曲面を二重被覆にもつ曲面である(下図).



AB) このとき, $\bigcup_{j\le n} C_j$ の配置の中に A型: ∧∧∧⋯ と B型: ∧∧⋯∧∧ / ∧∧⋯∧∧ が交互にあらわれる。したがって, $\sum \textcircled{4}_i$

は，ひげつきの一本の輪となる。ひげの本数は，B型ブロックの個数に等しく，各ひげは，分岐なしの鎖状である。



このSは加藤曲面と呼ばれる。

§6. GSSを含む曲面，II

定理1の証明のための準備をしておく。SをGSSを含む曲面とする。

1) Sの開被覆 $\{E_i\}_{i=1}^{m}$, $m \geqq 3$, で次をみたすものがある。

i) E_i は $B_{i-1}^{*} - \overline{D_i}$ (か その blow-up).

ここで， B_{i-1} は $\mathbb{C}^2$ 内の有界Stein領域，

$\alpha_i : B_{i-1}^{*} \to B_{i-1}$ は一点のblow-upもしくは恒等写像

$D_i \subset\subset B_{i-1}^{*}$ は，B_{i-1}^{*} のある座標近傍内の有界Stein領域，

とくに, B_0として, 球 $\{z\in\mathbb{C}^2 \mid |z|<1\}$ をとれる。

ii) $E_j\cap E_k \neq \phi$ なら, $j\equiv k\pm 1 \bmod m$.

iii) $E_i\cap E_{i+1}$ 上の正則函数は全て, E_{i+1} 上まで正則に拡張される, ただし, $E_{m+1}=E_1$ とする。

Sが極小のときを示せば十分である。§5の記号を用いる。Sは, $\mathbb{C}^2$内の球Bの n回blow-up

$$B=W_0 \xleftarrow{\alpha_1} W_1 \xleftarrow{\alpha_2} W_2 \leftarrow \cdots \xleftarrow{\alpha_{n-1}} W_{n-1}\xleftarrow{\alpha_n} W_n = Z$$

と, うめ込み $\varsigma: B\to B'=\varsigma(B)\subset Z$ から定まった。$B_0=B$, $D_n = B'-\overline{\Omega}'$ とする。blow-up α_{i+1}の中心を $p_{i+1}\in W_i$として, W_iのある座標近傍内の有界Stein領域 D_i, B_iを, $p_{i+1}\in\overline{D}_i\subset B_i$ をみたすようにとる。さらに条件

$$\alpha_i\circ\alpha_{i+1}\circ\cdots\circ\alpha_n(\varsigma(p_1))=p_i,\quad \alpha_1\circ\alpha_2\circ\cdots\circ\alpha_n\circ\varsigma(B_0)\subset\subset B_0$$

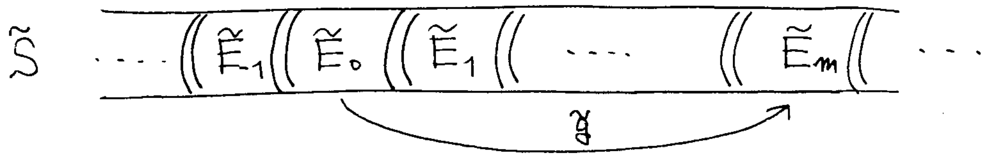
があるので, D_i, B_iを,

$$\alpha_i(B_i)\subset\subset D_{i-1}$$

をみたすようにとれる。このB_i, D_iから, E_iを i)によって定めれば, $\{E_i\}$は Sの開被覆を定め, ii)をみたす。$n\geq 3$なら, iii)はHartogsの定理から従う。$n\leqq 2$のときは, さらに, E_iを適当に分割すればよい。

2) $\tilde{E}_{\nu m+i}$, $\nu \in \mathbb{Z}$, を E_i のコピーとすると，Sの普遍被覆 $\lambda : \tilde{S} \to S$ は次のようにしてえられる.

i) $\tilde{S} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \tilde{E}_j$ は，$\tilde{E}_j$ を順につないだもの(下図)。



とくに，$\tilde{S}$ において，$\tilde{E}_j \cap \tilde{E}_k \neq \phi$ なら $j = k \pm 1$.

ii) $\lambda : \tilde{S} = \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \tilde{E}_j \to S = \bigcup_{i=1}^{m} E_i$ は同一視 $\tilde{E}_{\nu m+i} \to E_i$ から定まる。

3) i) $\tilde{E}_i \longrightarrow E_i \subset B^*_{i-1}$ は正則写像

$$f : \bigcup_{j \geq i} \tilde{E}_j \longrightarrow B^*_{i-1}$$

に拡張される

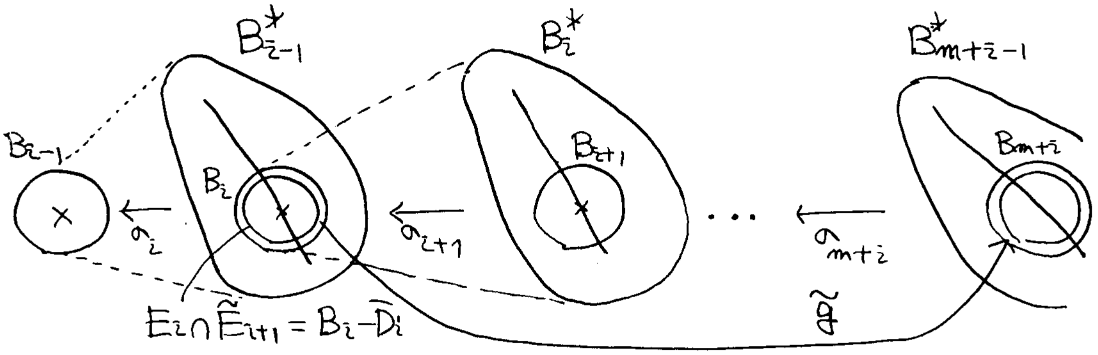
ii) $\tilde{S} \to S$ の被覆変換群($\cong \mathbb{Z}$)の生成元 $\tilde{g}$ と，固定点 $p_{i+1} \in \overline{D_i}$ をもつ B_i の contraction g で，$f \circ \tilde{g} = g \circ f$ をみたすものがある。

iii) $p_{i+1} \in \bigcap_{\nu \geq 1} f \tilde{g}^{\nu} \left(\bigcup_{j \geq i} \tilde{E}_j \right)$.

また，Sが極小なら，$f^{-1} : B^*_{i-1} - \{p_{i+1}\} \to \tilde{S}$ は正則包含写像となる。

各 $1 \leq i \leq m$ に対して，$a_i : B^*_{i-1} \to B_{i-1}$, D_i のコピー，$a_j : B^*_{j-1} \to B_{j-1}$, D_j, $j = \nu m + i$, $\nu \in \mathbb{Z}$, を

とって, $\tilde{E}_j = B^*_{j-1} - \overline{D}_j$ (もしくはそのblow-up) とみなす。



i) 各 $\nu \geq 1$ に対して,

$\alpha^{(\nu)} = \alpha_{i+1} \circ \alpha_{i+2} \circ \cdots \circ \alpha_{\nu m+i} : \left(\bigcup_{j=i}^{\nu m+i} \tilde{E}_j\right) \cup \overline{D}_{\nu m+i} \longrightarrow B^*_{i-1}$

は, B^*_{i-1} のblow-upで, $\tilde{E}_i \hookrightarrow B^*_{i-1}$ の拡張である。よって, $f = \lim_{\nu} \alpha^{(\nu)}$ とおけばよい。

ii) $\tilde{g} : \tilde{S} \to \tilde{S}$ は $\tilde{g}|\tilde{E}_j$ が自然な同型 $\tilde{E}_j \to \tilde{E}_{j+m}$ となるように定める(Step 2の図). このとき,

$g = f \circ \tilde{g} \circ f^{-1} : B_i - \overline{D}_i \longrightarrow B_i$ は正則で, B_i まで拡張される。さらに, $g(B_i) \subset \overline{D}_i \subset B_i$ となるので, g は固定点 $p_{i+1} \in \overline{D}_i$ をもつ B_i のcontractionとなる [3, I, Lemma 1]。

iii) S が極小の場合を考えればよい。まず $b_2(S) > 0$ とする。各 $\nu \geq 1$ に対し, $\bigcup_{j=i}^{\nu m+i} \tilde{E}_j$ は第一種例外曲線を含まない。とくに, $a \in B^*_{i-1}$ に対して, $\alpha^{(\nu)-1}(a)$ が, 1次元なら, $\alpha^{(\mu)-1}(a)$, $\mu \geq \nu$, も1次元となって,

$\alpha^{(\mu)-1}(a) \cap \overline{D}_{\mu m+i} \neq \phi$, すなわち,

$$a \in \alpha^{(\mu)}(\overline{D}_{\mu m+i}), \qquad {}^{\forall}\mu \geqq \nu.$$

一方，$\alpha^{(\mu)}(\overline{D}_{\mu m+i}) = g^{\mu}(\overline{D}_i)$ となり，g は p_{i+1} へのcontractionなので，$a = p_{i+1}$．結局，各 $\alpha^{(\nu)}$ は，p_{i+1} 上のみのblow-up．とくに，

$$(B^*_{i-1} - g^{\nu}(\overline{D}_i)) \cup \{p_{i+1}\} = \alpha^{(\nu)}\left(\bigcup_{j=i}^{\nu m+i} \tilde{E}_j\right).$$

そこで，$\nu \to \infty$ とすれば，iii) が従う。

$b_2(S)=0$ のときは，S はHopf曲面で，$f g^{\nu}(\bigcup_{j \geqq i} \tilde{E}_j)$ は，p_{i+1} の近傍から，p_{i+1} を除いたものである。

§7．GSSを含む曲面の微小変形―定理1の証明，I

§§7, 8で定理1を証明する。この節では次を示す。

<u>GSSを含む曲面 S の微小変形は全てGSSを含む。</u>

まず，第一種例外曲線は微小変形は安定なので，S は極小としてよい。以下，§6の記号をそのまま用いる。

<u>Step</u> 1. i) 制限 $H^1(B^*_{i-1} - \{p_{i+1}\}, \Theta) \xrightarrow{r} H^1(B_i - \{p_{i+1}\}, \Theta)$ は同型．

ii) $\Sigma \subset B_i$ を p_{i+1} をかこむ C^{∞} 実超曲面とする。$\theta \in H^1(B_i - \{p_{i+1}\}, \Theta)$，$\omega \in H^0(B_i, \Omega^1 \otimes \Omega^2)$ に対して，

$$\langle \theta, \omega \rangle = \int_{\Sigma} \langle \psi, \omega \rangle$$

と定義すると，これは非退化なpairingとなる。ただし，ψはθを代表するΘ-値$C^\infty(0,1)$-形式，$\langle \psi, \omega \rangle$は，$\psi$の$\Theta$-成分を，$\omega$の$\Omega^1$-成分で値をとった$C^\infty(2,1)$-形式.

i) 局所コホモロジー群の完全列から定まる可換図式（層Θは略す）

$$\begin{tikzcd}
H^1(B^*_{i-1}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(B^*_{i-1} - \{p_{i+1}\}) \arrow[r] \arrow[d, "r"] & H^2_{\{p_{i+1}\}}(B^*_{i-1}) \arrow[r] \arrow[d, "e"] & H^2(B^*_{i-1}) \arrow[d] \\
H^1(B_i) \arrow[r] & H^1(B_i - \{p_{i+1}\}) & H^2_{\{p_{i+1}\}}(B_i) \arrow[r] & H^2(B_i)
\end{tikzcd}$$

において，B_j, $j=i, i-1$, はSteinなので，$H^q(B_j) = H^q(B^*_j) = 0$, $q>0$. さらに，eは切除定理により同型なので，制限rも同型。

ii) $\mathbb{C}^2$の座標を(z_1, z_2)とする。$B_i \cap (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*)$, $B_i \cap (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C})$は$B_i$のStein被覆なので$\theta \in H^1(B_i - \{p_{i+1}\}, \Theta)$のČechコホモロジーの代表は，$\sum_{i=1}^{2} a^i_{pq} \frac{1}{z_1^p z_2^q} \frac{\partial}{\partial z_i}$とかける。ただし，$a^i_{pq} \in \mathbb{C}$, $p \geqq 1$, $q \geqq 1$。もし$a^i_{pq} \neq 0$なら，$\omega^i_{pq} = z_1^{p-1} z_2^{q} \quad dz^i \otimes (dz_1 \otimes dz_2)$とおくと，$\langle \theta, \omega^i_{pq} \rangle \neq 0$. すなわち，任意の$\omega \in H^0(B_i, \Omega \otimes \Omega^2)$に対して，$\langle \theta, \omega \rangle = 0$なら，$\theta = 0$。

Step 2. 制限 $H^1(S,\Theta)\longrightarrow H^1(E_i,\Theta)$ は 0-写像。

(証) $\theta\in H^1(S,\Theta)$ を任意にとる。§6, 3) iii) により、図式

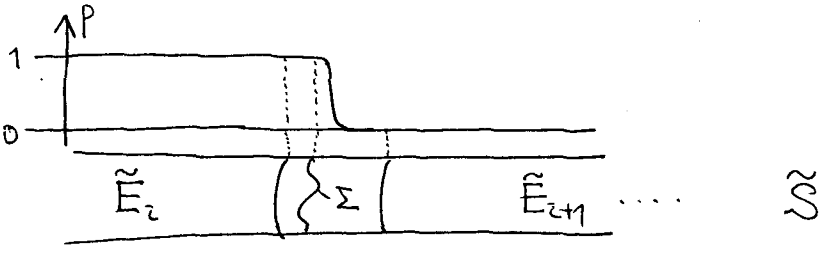
$$\begin{tikzcd}
H^1(S,\Theta) \arrow[r] \arrow[d, "\nu^*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^1(E_i,\Theta) & \\
H^1(\tilde{S},\Theta) \arrow[r, "f^{-1*}"] & H^1(B_{i-1}^* - \{p_{i+1}\},\Theta) \arrow[r] \arrow[u, "(E_i \hookrightarrow B_{i-1}^* \text{ による制限})"'] & H^1(B_i - \{p_{i+1}\},\Theta)
\end{tikzcd}$$

をえる。Step 1 により、任意の $\omega\in H^0(B_i,\Omega^1\otimes\Omega^2)$ に対し、$\langle f^{-1*}\nu^*\theta,\omega\rangle=0$ を示せばよい。以下、適当に f^*, ν^* を略す。

θ を代表する Θ-値 $(0,1)$-形式 ψ をとる。$\omega\in H^0(B_i,\Omega^1\otimes\Omega^2)$ は任意とする。$\tilde{S}$ 上の C^∞ 函数 ρ, $0\leqq\rho\leqq 1$, を

$$\rho(x)=\begin{cases} 1 & x\in\left(\bigcup_{j\leqq i}\tilde{E}_j\right)-\overline{\tilde{E}_{i+1}} \\ 0 & x\in\left(\bigcup_{j>i}\tilde{E}_j\right)-\overline{\tilde{E}_i}\end{cases}$$

と定め、超曲面 $\Sigma\subset\tilde{E}_i\cap\tilde{E}_{i+1}(\subset B_i)$ を、$\rho|\Sigma=1$ となるよ



うにとる。すると、$\bar\partial\rho$ は、S 上の C^∞ 形式 η を定め、$\eta\wedge\omega$ は、S 上の Ω^1-値 $C^\infty(2,1)$ 形式に拡張される。さらに、

$$d\langle\psi,\rho\omega\rangle=\langle\psi,\bar\partial\rho\wedge\omega\rangle$$

となるから、

(☆) $\langle \theta, \omega \rangle = \int_{\Sigma} \langle \psi, \omega \rangle = \int_{S} \langle \psi, \eta \wedge \omega \rangle$

とかける。

さて，g は P_{i+1} への contraction なので，$g^*_{P_{i+1}}$ のノルムは1より小さい。よって $(1-g^*)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k g^*$ が P_{i+1} のまわりで定義され，P_{i+1} のまわりの Ω^1-値正則2-形式 ξ で

(☆☆) $$g^*\xi - \xi = \omega$$

をみたすものがある。g が P_{i+1} への contraction なので，ξ は B_i まで(☆☆)をみたしつつ正則へ拡張できる。

$\tilde{E}_1 \cup \cdots \cup \tilde{E}_m$ 上の Ω^1-値 $C^\infty(2,0)$-形式 $\tilde{\varphi}$,

$$\tilde{\varphi} = \rho\, \tilde{g}^* f^* \xi + (1-\rho) f^* \xi$$

は，S 上の Ω^1-値 $C^\infty(2,0)$-形式 φ を定める。(☆☆)により，

$$\bar{\partial}\varphi = \eta \wedge \omega$$

となる。$\langle \psi, \bar{\partial}\varphi \rangle = d\langle \psi, \varphi \rangle$ で，ψ は S 上定義されているので，(☆)により，

$$\langle \theta, \omega \rangle = \int_S \langle \psi, \eta\wedge\omega \rangle = \int_S d\langle \psi, \varphi \rangle = 0.$$

最後のStep. Step 2により，$H^1(S, \Theta) \cong \check{H}^1(\{E_i\}, \Theta)$。これにより，$\theta \in H^1(S, \Theta)$ を，$\theta = \{\theta_{ij}\}$ とかくと，S の θ-方向の微小変形 S_t は，E_i と E_j のはりあわせを，θ_{ij}-方向にずらせばえられる。B_0 は球だったので，E_1 のうちが S_t においてもGSSを定める。

§8. GSSを含む曲面の変形極限 — 定理1の証明, II

この節で, 次を示して, 定理1の証明を完結させる。

$\mathcal{S}=\{S_t\}_{t\in T}$ が曲面の変形族, $\{t_j\}\subset T$ が $t_\infty\in T$ へ収束する点列で, 各 S_{t_j} はGSSを含むとき, S_{t_∞} もGSSを含む。

Step 1. S_t の普遍被覆を $\tilde{S}_t\to S_t$ とおいて, $\tilde{\mathcal{S}}=\{\tilde{S}_t\}_{t\in T}$ とおく。微分同型 $S_{t^*}\times T\to\mathcal{S}$ から定まる微分同型

$$u:\tilde{S}_{t_\infty}\times T\to\tilde{\mathcal{S}},\quad u_j:\tilde{S}_{t_\infty}\to\tilde{S}_{t_j}$$

を固定する。Ω を S_{t_1} のGSSとすると, $\Omega\hookrightarrow S_{t_1}$ は, $\Omega\hookrightarrow\tilde{S}_{t_1}$ へもち上がる。これは, u によって, $\Omega\times T\hookrightarrow\tilde{\mathcal{S}}$ へ拡張される。$\Omega\times\{t\}\subset\tilde{\mathcal{S}}$ を $\Omega_t\subset\tilde{S}_t$ とかく。$\tilde{S}_t-\Omega_t$ は2つの連結成分から成っている。

以下, "もし必要なら部分列をとって" は略す。

Step 2 $B=\{z\in\mathbb{C}^2\mid |z|<1\}$ とおく。このとき,

- $\tilde{S}_{t^*}-\Omega_{t^*}$ のある連結成分 N,
- 正則写像 $f_j:N_j=u_{t_j}(N)\longrightarrow B$,
- $\tilde{\mathcal{S}}\to\mathcal{S}$ の被覆変換群 $(\simeq\mathbb{Z})$ の生成元 γ
- B の, $0\in B$ への contraction g_j があって次をみたす。

24

i) $\det f_{j*} \neq 0$

ii) $\sup\{|f_j'(x)| \mid x \in N_j\} = 1$, $\quad 0 \in \bigcap_{\nu \geq 0} \overline{f_j \tilde{g}^{\nu}(N_j)}$

iii) $f_j \circ \tilde{g} = g_j \circ f_j$, $\; g_j(0) = 0$.

$\tilde{S}_{t_j}$ に対して，§6の結果と記号を用いる。$\overline{\Omega}_{t_j}$ はコンパクトなので，ある i があって，$\overline{\Omega}_{t_j} \subset \bigcup_{k \geq i} \tilde{E}_k$。§6, 3) i) により，$\tilde{S}_{t_j} - \Omega_{t_j}$ の連結成分 $\tilde{N}_j$ と正則函数

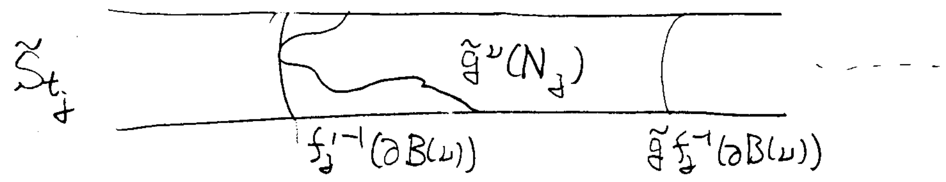
$$f_j : N_j \longrightarrow B_i \subset \mathbb{C}^2$$

がある。さらに，$\tilde{S}_{t_\infty} - \Omega_{t_\infty}$ のある連結成分 N があって，任意の j に対して，$N_j = u_j(N)$ と仮定できる。$\tilde{S} \to S$ の被覆変換群の生成元 $\tilde{g}$ は $\tilde{g}(N) \subset N$ となるようにとると，§6, 3) ii) により，B_i の contraction g_j で，$f_j \circ \tilde{g} = g_j \circ f_j$ となるものがある。

$B(\nu)$ を $p_{i+1} \in B_i$ 中心の，半径 r_ν，

$$r_\nu = \sup\{|f_j(x)| \mid x \in \tilde{g}^{\nu}(N_j)\},$$

の球とする。g_j は p_{i+1} への contraction なので，$\nu \geq 1$ を十分大きくとれば，$g_j(B(\nu)) \subset B(\nu)$ をみたす（すなわち $f_j^{-1}(\partial B(\nu))$ は Ω_j に接する S_{t_j} の GSS を定める，下図）。



f_j のかわりに，$\tilde{g}^{\nu *}f_j$ を考えて，定数倍して，$B(\nu)=B$ とみなせば，条件を全てみたす。

Step 3.
$$f=\lim_{j\to\infty} u_j{}^* f_j : N \longrightarrow B$$
$$g=\lim_{j\to\infty} g_j : B \to B$$
が存在して正則。しかも次をみたす。

i) $\sup\{|f(x)| \mid x\in N\}=1$, $0\in\bigcap_{\nu\geq 0}\overline{f\tilde{g}^{\nu}(N)}$.

ii) $f\circ\tilde{g}=g\circ f$, $g(0)=0$.

☺ St_j の複素構造が，St_∞ に収束し，$\{u_j^* f_j\}$ は一様有界なので，$\{u_j^* f_j\}$ は正則な f に収束する。$\{g_j\}$ も正則一様有界なので，正則な g に収束する。よって，Step3 i) ii) は Step ii) iii) から従う。

Step 4.

i) $g: f(N)\to f(N)$ は contraction。とくに，$g|f(N)$ の固定点は 0 のみ.

ii) $f: N-f^{-1}(0)\longrightarrow B-\{0\}$ は固有.

☺ i) $\tilde{g}(N)\subset N$ なので，$gf(N)\subset f(N)$. 座標を用いて，$f=(f^1,f^2)$ とかく。最大値の原理により，
$$\sup\{|f^i(x)| \mid x\in\tilde{g}^{\nu}(N)\}\geqq\sup\{|f^i(x)| \mid x\in\tilde{g}^{\nu+1}(N)\}$$
なので，$\{\tilde{g}^{\nu}f\}_{\nu=1}^{\infty}$ は定数 p へ収束する Step 3 i) により，$p=0$。すなわち，$g|f(N)$ は 0 への contraction.

ii) 固有ではないとすると，集積点をもたぬ点列 $\{x_k\} \subset N - f^{-1}(0)$ で，$\{f(x_k)\}$ は $N - \{0\}$ の点に収束するものがある。

$$\nu(k) = \max\{\nu \mid x_k \in \tilde{g}^{\nu}(N)\}$$

とおくと，$\nu(k) \to \infty$ となる。しかし，i) により，$f(x_k) \in g^{\nu(k)} f(N)$ は 0 に収束することになり矛盾。

<u>最後の Step</u>．S_{t_∞} は GSS を含む。

☺ S_{t_∞} は極小としてよい。いくつかの場合に分ける。

I) $\det f_* \neq 0$ かつ $0 \notin f(N)$．このとき，Step 3 i) により，$\overline{f(N)}$ は 0 の近傍を含む。よって，適当な Stein 領域 $D \subset \overline{f(N)}$ をとると，$f^{-1}(\partial D)$ が S_{t_∞} の GSS を定める。

II) $\det f_* \neq 0$ かつ $0 \in f(N)$．

II-1) $\det g_{*0} \neq 0$ の場合。g の標準形を考えると，$0 \in B$ のまわりの正則函数 w で，$g^* w = \alpha w$，$\alpha \in \mathbb{C}^*$ をみたすものをとれる。仮定 $0 \in f(N)$ により，$f^* w$ は零点をもつ．よって $f^* w = 0$ は，S_{t_∞} 上の因子 $D \neq 0$ で $D^2 = 0$ となるものを定める．§3 の事実により，S_{t_∞} は GSS を含む。

II-2) $\det g_{*0} = 0$ の場合。g が正則に拡張されるように，B を次々に blow-up する：

$$B = W_0 \xleftarrow{\alpha_1} W_1 \xleftarrow{\alpha_2} W_2 \leftarrow \cdots \leftarrow W_{i-1} \xleftarrow{\alpha_i} W_i \leftarrow \cdots$$

すなわち，W_1 は $p_1 = 0$ の blow-up，$C_1 = \alpha_1^{-1}(p_1)$ とすると，仮

定により，$g: W_1 \to W_1$ と(正則に)拡張され，$g(C_1)$ は点 $p_2 \in C_1$ となるから，p_2 を blow-up して，…，とくりかえす。σ_i は $p_i \in W_{i-1}$ の blow-up とし，$C_i = \sigma_i^{-1}(p_i)$ とおく。さらに
$W_\infty = \varinjlim_i (W_i - \{p_{i+1}\})$ とおく。

さて，§3の命題により，S_{t_∞} が楕円曲線を含まない場合のみを考えればよい。

<u>主張</u> 1　f は固有正則写像 $\tilde{f}: N \to W_\infty$ を定める。

i に関する帰納法で次を示せばよい。

$$(*)_i \begin{cases} f \text{ は正則写像 } f_i: N \to W_i \text{ を定める。} \\ f_i: N - f_i^{-1}(p_{i+1}) \to W_i - \{p_{i+1}\} \text{ は固有} \end{cases}$$

実際，$(*)_0$ は Step 4, iii). $(*)_i$ を仮定する。$\tilde{C} = \{\det f_* = 0\}$ は N の一次元解析集合で，$\tilde{g}(\tilde{C}) \subset \tilde{C}$ となる。$\tilde{g}$ の固定点は O のみなので，$\tilde{C} = \tilde{f}^{-1}(0)$. $\tilde{C}$ は S_{t_∞} の曲線を定めるので，$\tilde{C}$ は有理曲線からなる無限鎖を含む。よって，$(*)_i$ により，$f_{i+1}^{-1}(p_{i+2}) \subset \tilde{C}$ もそうなる。とくに $f_{i+1}^{-1}(p_{i+2}) \neq \emptyset$ で，一次元。したがって，f_{i+1} は正則。固有性は $f_i | N - f_i^{-1}(p_{i+1})$ の固有性から従う。

さらに，$g': \tilde{f}(N) \to \tilde{f}(N)$ ($\omega \neq 0$) は固定点をもたず，$\tilde{f} \circ \tilde{g} = g \circ \tilde{f}$ となる。

<u>主張</u> 2.　$\tilde{f}$ は高々分岐被覆.

ある $y \in \tilde{f}(N)$ があって，$\tilde{f}^{-1}(y)$ が一次元であるとせよ。

このとき、$\tilde{f}^{-1}(y) \subset \{\det f_* = 0\} = f^{-1}(0)$. $\tilde{f}^{-1}(y)$ のある連結成分が コンパクトなら、$\tilde{f}^{-1}(y)$のある連結成分がS_{t_∞}の~~第一種~~例外曲線を定めることになり矛盾。$\tilde{f}^{-1}(y)$の全ての連結成分がコンパクトでないなら、$\tilde{f}^{-1}(y)$は有理曲線の無限鎖を含む。また$\{\det f_* = 0\}$の連結成分の数は有限なので、ある$\nu \geq 1$があって、$\tilde{f}^{-1}(y) \cap g^{\nu}\tilde{f}^{-1}(y) \neq \phi$. すなわち、$y \in \tilde{f}(N)$は$g$の固定点となって、矛盾。

$\tilde{f}(\partial N) \subset W_\infty$はコンパクトなので、$\ell$を十分大きくとれば、$\tilde{f}(\partial N) \subset W_\ell - \{p_{\ell+1}\} (\subset W_\infty)$. そこで、$p_{\ell+1}$のまわりの座標近傍内の有界Stein領域$D$ $(\ni p_{\ell+1})$を適当にとれば、$\tilde{f}^{-1}(\partial D)$が、$S_{t_\infty}$のGSSを定める。

III) $\det f_* \equiv 0$. このとき、

$$\inf\{\, |f_j(x)| \mid x \in \partial N_j \,\} \longrightarrow 0$$

なのだから、$0 \in f(N)$. Step4 (1)により、$f(N) - \{0\}$は解析集合。さらに、$f^{-1}(0)$の連結成分の数は有限個なので、$f(N)$はBの1次元解析集合で、0を内点に含む。$g|f(N)$は0へのcontractionなので、$\Delta = f(N) - \{0\}/\langle g \rangle$は曲線で、$f$は正則写像$S_{t_\infty} - C \to \Delta$を定める。ただし$C$は$f^{-1}(0)$の定める曲線。よって、$\Delta$は連結非特異楕円曲線。結局、$f$は$N$上の正則函数$w$で$\tilde{g}^* w = \alpha w$, $0 < |\alpha| < 1$, となるものを定める。$w = 0$はS_{t_∞}上の因子$D \neq 0$で$D^2 = 0$

となるものを定めるので，§3の事実により S_{t_∞} にGSSを含む。

§9. 定理1の高次元化について

定理1は，多分，高次元化できる。このときは，GSSよりも一般にGSPHを考える。

定義[4]. 連結コンパクトな複素多様体 X 上のコンパクト実超曲面 Σ が，

・X から定まるCR-構造で，強擬凸（すなわち，Σ の局所的な定義方程式を f とすると，Σ の接空間上で $\partial\bar{\partial} f>0$）.

・$X-\Sigma$ は連結

をみたすとき，Σ を X のGSPH (global strongly pseudo-convex hypersurface) という。

一般に，Σ が強擬凸で，$\dim_{\mathbb{R}}\Sigma>3$ なら，つねに，Σ はStein空間をboundする。($\dim_{\mathbb{R}}\Sigma=3$ では反例がある。Stein空間をboundしないGSPHを含む曲面は発見されていない。)

GSPHを含む多様体 X の微小変形が，GSPHを含む，を示すのはやさしい。$\dim_{\mathbb{C}}X\geq 3$ のとき，変形極限に関しても，§8の定理1の証明が平行に高次元化できると思われる。

References

[1] G. Dloussky, Invariants associés aux surfaces compact contenant une coquille spherique global, preprint (1980)

[2] I. Enoki, Surfaces of Class VII_0 with curves Tôhoku Math. J. 33 (1981) #4

[3] Ma. Kato, Compact complex manifolds containing "global" spherical shells, I, Proc. Intl. Symp. Alg. Geometry, Kyoto 1977; II, manuscript (1978)

[4] Ma. Kato, Compact complex manifolds containing global strongly pseudoconvex hypersurfaces Tôhoku Math. J. 31 (1979).

[5] K. Kodaira, On compact analytic surfaces, I–III

[6] ---, On the structure of compact analytic surfaces, I–IV

([5], [6] in Collected Works, vol. III).

[7] M. Inoue, On surfaces of Class VII_0, Inv. Math. 24 (1974)

[8] ---, New surfaces with no meromorphic functions, Proc. Int. Congress of Math. Vancouver 1974

II, Complex Analysis and Alg. Geometry, Iwanami, 1977

[9] I. Nakamura, On surfaces of Class VII_0, to appear