代数幾何学シンポジウム記録
1982年度 pp.251-270

Wild ramification of moduli spaces for curves or for abelian varieties

中央大学理工学部 関口 力

以下，$M_{g,\ell}$，$A_{g,\ell}$ をそれぞれ level ℓ-sturucture を持つ，genus g の curve あるいは次元 g の principally polarized abelian variety のなす moduli scheme とし，特に，$\ell=1$ のとき，$M_g=M_{g,1}$，$A_g=A_{g,1}$ と書くことにする。ここでは，点 $x\in M_g$，$y\in A_g$ がそれぞれ curve C と principally polarized abelian variety $\mathfrak{P}$ に対応しているとき，点 x, y における剰余体 $\mathbb{k}(x)$，$\mathbb{k}(y)$ が各々 C，$\mathfrak{P}$ の field of moduli k_C，$k_{\mathfrak{P}}$ に一致するか という問題を扱う。この問題は，標数 0 の場合，簡単に肯定的に成り立つことがわかるが，正標数の場合，幾つかの否定的な例が生じてくる。このような否定的な例について述べることが目的である。その為に，先ず，field of moduli の話しから始めることにする。

§1. Field of moduli

以下，field of moduli については，小泉[3]の特徴づけに基づく。

定義 1.1. Ωを与えられた universal domain とし，その部分体をk, lとする。k, l上定義された geometric object をS, S'としたとき，それ等の geometric isomorphy $S \sim S'$を$S \otimes_k \Omega \cong S' \otimes_l \Omega$で定義する。更に，与えられた$S$に対し，

$$k_S = \bigcap_{S'/l \sim S} l$$

としたとき，これが条件

$$\text{For } \forall \sigma \in \mathrm{Aut}(\Omega), \quad S^\sigma \sim S \iff \sigma|_{k_S} = id_{k_S}$$

を満せば，k_SをSの field of moduli という。即ち，field of moduli というのは，geometric isomorphy class の member の field of definition の下極限として与えられるものであり，概念として自然なものである。

定理 1.2. Sが，(complete non-singular) curve あるいは polarized abelian variety ならば，k_SはS

の field of moduli である。

注意（志村[6]参照.）　S を curve あるいは polarized abelian variety としたとき，一般には，k_S 上の S の model は存在しない。

しかしながら，k_S は次の性質を持っている。

命題 1.3.　k_S が S の field of moduli とするとき，k_S の適当な separable extension K を取れば，S は K 上の model を持つ。

以下，curve C に対応する点 $x \in M_g$，principally polarized abelian variety $\mathcal{P} = (X, \lambda)$ に対応する点 $y \in A_g$ とし，剰余体 $\mathbb{k}(x)$, $\mathbb{k}(y)$ の標数を共に p (>0) とする。このとき，次のことは簡単な結果である。

命題 1.4.　k_C, $k_{\mathcal{P}}$ は各々，$\mathbb{k}(x)$, $\mathbb{k}(y)$ の拡大体であり，高々 purely inseparable である。

更に，次のことが成り立つ。

定理 1.5.　$\ell \geqq 3$, $p \nmid \ell$ とし，y 上にある $A_{g,\ell}$ の点 y' をとり，$S'' = S' \times_S S' \overset{p_1}{\underset{p_2}{\rightrightarrows}} S' = \mathrm{Spec}\, \mathbb{k}(y') \longrightarrow S = \mathrm{Spec}\, \mathbb{k}(y)$ とおくとき，次は同値である。

(i) $k_{\mathcal{P}} = \mathbb{k}(y)$.

(ii) $\mathbb{K}(y')/\mathbb{K}(y)$: separable.

(iii) $p_1^*\mathcal{P}$ と $p_2^*\mathcal{P}$ は S'' 上同型である。

(iv) $\mathrm{Isom}_{S''}(p_1^*\mathcal{P}, p_2^*\mathcal{P}) \longrightarrow S''$: flat.

実際に、以下で使うのは (i) と (ii) の同値であるが、これは命題 1.3 と X の ℓ 分点の scheme X_ℓ が X の定義体上 étale であることから明白である。(iii), (iv) については、もう少し議論が必要であるが、ここでは証明を省略する。尚、定理 1.5 の内容は curve についても同様に成り立つことを注意しておく。

Galois covering $\begin{array}{ccc} M_{g,\ell} & \longrightarrow & M_g \\ \begin{smallmatrix}\cup\\ x'\end{smallmatrix} & \longmapsto & \begin{smallmatrix}\cup\\ x\end{smallmatrix} \end{array}$ $(\ell \geqq 3,\ p \nmid \ell,\ g \geqq 3)$ において、その Galois group は $G = Sp_g(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ で与えられ、x' におけるその inertia group $G^I(x')$ は自然に $\mathrm{Aut}(C)$ と同型である。Abelian variety については、$\begin{array}{ccc} A_{g,\ell} & \longrightarrow & A_g \\ \begin{smallmatrix}\cup\\ y'\end{smallmatrix} & \longmapsto & \begin{smallmatrix}\cup\\ y\end{smallmatrix} \end{array}$ において、Galois group は $G = Sp_g(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ で与えられ、inertia group $G^I(y')$ は自然に $\mathrm{Aut}(\mathcal{P})/\{\pm 1\}$ と同型となる。ここで、C 又は $\mathcal{P}$ の自己同型については、次のことが知られている。

<u>命題 1.6</u>. ℓ を素数とする。

(i) $q \mid \#\mathrm{Aut}(\mathfrak{P}) \Longrightarrow q \leqq 2g+1$.

(ii) $q \mid \#\mathrm{Aut}(\mathfrak{P})$, $\mathfrak{P}$: indecomposable $\Longrightarrow q = 2g+1$ 又は $q \leqq g+1$.

(iii) $q \mid \#\mathrm{Aut}(C) \Longrightarrow q = 2g+1$ 又は $q \leqq g+1$.

尚，(iii) は本間の結果であることを注意しておく。この結果より次の系を得る。

<u>系 1.7.</u>

(i) $p > 2g+1$, 又は $p \neq 2g+1$, $p > g+1$, $\mathfrak{P}$: indecomposable $\Longrightarrow k_{\mathfrak{P}} = \mathbb{K}(x)$.

(ii) $p \neq 2g+1$, $p > g+1 \Longrightarrow k_C = \mathbb{K}(x)$.

この系より，与えられた g に対し，我々の問題が否定的な例を生ずる場合というのは，$p \leqq 2g+1$ なる有限個の標数に限られることがわかる。

§ 2. <u>$\mathbb{P}^1$ の巡回拡大</u>.

§1 の議論により，我々の目的の為には，計算可能な位数 p の自己同型をもつ curve あるいは principally polarized abelian variety を捜さなければならない。そのようなもので一番単純なものは $\mathbb{P}^1$ の p 次巡回拡大として与えられる curve であり，そのような curve について，Hasse [2] の結果から引用したいと思う。

以下，考えるものはすべて標数 p (>0) の代数閉体 k の上で考える。

$\tilde{C}$ を $\mathbb{P}^1$ の p 次の巡回拡大で与えられる (complete non-singular) curve とすれば，これは次の方程式 (2.1) で定義される plane curve C の normalization で与えられる。

$$(2.1) \qquad C:\ Y^p - B(X)Y = A(X),$$

但し，
$$B(X) = (X-\alpha_1)^{n_1(p-1)}(X-\alpha_2)^{n_2(p-1)}\cdots(X-\alpha_r)^{n_r(p-1)},$$
$$A(X) = (X-\alpha_1)^{e_1}(X-\alpha_2)^{e_2}\cdots(X-\alpha_r)^{e_r}\cdot G(X),$$
$$\deg G = Np - E,\quad X-\alpha_i \nmid G(X),\quad 1\leqq e_i \leqq p-1,\quad 1\leq n_i,$$
$$\alpha_i \neq \alpha_j \quad (i\neq j).$$

ここで，$N=\sum_{i=1}^{r} n_i$，$E=\sum_{i=1}^{r} e_i$ である。この curve $\tilde{C}$ の位数 p の自己同型 σ は

$$\sigma:\ Y \longmapsto Y + (X-\alpha_1)^{n_1}(X-\alpha_2)^{n_2}\cdots(X-\alpha_r)^{n_r}$$

で与えられる。

<u>命題 2.1.</u> $\tilde{C}$ を (2.1) で定義される curve とする。

(i) genus $g(\tilde{C})$ は

$$g(\tilde{C}) = \frac{p-1}{2}(Np-E+r-2).$$

(ii) $H^0(\tilde{C},\Omega^1_{\tilde{C}})$ の base は，次で与えられる。

$$\prod_{i=1}^{r}(x-\alpha_i)^{l_i}\, x^m y^n\,(dx/B)\,,$$

但し，　$n=0,1,\cdots,p-1$，　$l_i=e_i-1-\left[\frac{(n+1)e_i}{p}\right]$，　$m=0,1,\cdots,$
$N(p-n-1)+r-E-2+\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{(n+1)e_i}{p}\right]$．

特に，

(＊)　$n_1=n_2=\cdots=n_r=1$　かつ　$e_1=e_2=\cdots=e_r=p-1$，　$(r\geqq 2)$

のとき，　$P(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_r)$　とおけば，

(iii)　$H^0(\tilde{C},\Omega^1_{\tilde{C}})$ の base は

$$x^l P^m y^n\,(dx/B)\;;\qquad l=0,1,\cdots,r-2,\quad m+n=p-2$$

$(m,n\geqq 0)$ で与えられる。

この命題の条件(＊)の下に，$\tilde{C}$ の Hasse-Witt 行列は簡単に計算され，次の定理を得る。

<u>定理 2.2.</u>　条件(＊)を満す curve $\tilde{C}$ について，形式的に　$P(x)^{p-1}=\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} t_i x^i$　とおき，

$$D=\begin{vmatrix} t_{p-1} & t_{p-2} & \cdots & t_{p-r+1} \\ t_{2p-1} & t_{2p-2} & \cdots & t_{2p-r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{(r-1)p-1} & t_{(r-1)p-2} & \cdots & t_{(r-1)p-r+1} \end{vmatrix}$$

とおくとき，$D\neq 0$ であり，　$D\neq 0 \Longleftrightarrow \tilde{C}$ の Jacobian variety $J(\tilde{C})$ が ordinary が成り立つ。

§3．<u>Group action に関する簡単な注意</u>

簡単な計算により次の補題を得る。

<u>補題 3.1.</u> k を標数 p (>0) の体，V を k-vector space，σ を V の位数 p の自己同型とする。V の $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対し，次は同値である。

(i) $x_1, x_1^{\sigma}, \cdots, x_1^{\sigma^{p-1}}; \cdots; x_n, x_n^{\sigma}, \cdots, x_n^{\sigma^{p-1}}$ ：1次独立．

(ii) $\sum_{i=0}^{p-1} x_1^{\sigma^i}, \sum_{i=0}^{p-1} x_2^{\sigma^i}, \cdots, \sum_{i=0}^{p-1} x_n^{\sigma^i}$ ：1次独立．

<u>補題 3.2.</u> k を標数 p (>0) の体，V を有限次元 k-vector space，σ を V の位数 p の自己同型とする。このとき，$k[[V]]$ の σ-不変素イデアル $\mathfrak{P}$ で，$k[[V]]/\mathfrak{P}$ の商体 $Q(k[[V]]/\mathfrak{P})$ が $k[[V]]^{\sigma}/\mathfrak{P}\cap k[[V]]^{\sigma}$ の商体 $Q(k[[V]]^{\sigma}/\mathfrak{P}\cap k[[V]]^{\sigma})$ 上 inseparable extension となるものが存在する。但し，$k[[V]]^{\sigma}$ は $k[[V]]$ の σ-不変な元全体からなる部分環を意味する。

実際，$V=\langle X, Y\rangle$ とし，σ の作用が，$Y \mapsto Y+X$，$X \mapsto X$ であるとすれば，$k[[V]]^{\sigma} = k[[X, Y^p - X^{p-1}Y]]$ となり，$\mathfrak{P}=(X)$ とおけば，$k[[V]]/\mathfrak{P} \cong k[[Y]]$，$k[[V]]^{\sigma}/\mathfrak{P}\cap k[[V]]^{\sigma} = k[[Y^p]]$ となって，$Q(k[[V]]/\mathfrak{P}) / Q(k[[V]]^{\sigma}/\mathfrak{P}\cap k[[V]]^{\sigma})$ が inseparable extension であることがわかる。一般の場合は，容易にこの特別な場合に帰着することが出来る。

更に，後で使う為に次の定理を準備してお

く。

<u>定理 3.3.</u> p を素数，n を与えられた自然数とし，

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \end{pmatrix} \in GL_{p-1}(\mathbb{Z}_p), \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in GL_p(\mathbb{Z}_p)$$

とおく。このとき，$A \in GL_n(\mathbb{Z}_p)$ が $A^p = E$ を満せば，

$$A \sim \begin{pmatrix} A_0 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & A_0 & & & \\ & & & A_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & A_1 \\ & & & & & & E \end{pmatrix}$$

となる。（[1]，Theorem 74.3 参照．）

§4. 標数 2 の体上の curve.

以下，$g \geqq 3$ とし，すべて標数 2 の代数閉体 k 上で議論する。C を genus g の hyperelliptic curve，C の involution を σ とする。このとき，§2 の議論を用いることにより，$H^1(C, \check{\Omega}^1_C)$ の base $\{a_1, a_2, \cdots, a_{2g-1} ; b_1, b_2, \cdots, b_{g-1}\}$ で，

$$\sigma^* a_i = a_i \quad (i=1, \cdots, 2g-1)$$

$$\sigma^* b_j = b_j + a_j \quad (j=1, \cdots, g-2)$$

を満すものが存在することがわかる。ℓ を 3 以上の奇数とし，

$$\begin{array}{ccc} M_{g,l} & \longrightarrow & M_g \\ \rotatebox{90}{$\in$}\; x' & \longmapsto & \rotatebox{90}{$\in$}\; x \end{array}$$

で、x は C に対応する点とすれば、上のことより $\hat{\mathcal{O}}_{x'} = \hat{\mathcal{O}}_{x', M_{g,l}}$ の regular system of parameters $\{w_1, w_2, \cdots, w_{g+1} ; u_1, u_2, \cdots, u_{g-2} ; v_1, v_2, \cdots, v_{g-2}\}$ で

$$\sigma^* v_i = u_i \qquad (i=1,2,\cdots,g-2)$$

$$\sigma^* w_j \equiv w_j \pmod{\mathfrak{m}_{x'}^2} \qquad (j=1,2,\cdots,g+1)$$

を満すものの存在することがわかる。一方、Landal, Lønsted により、level l- structure をもつ hyper-elliptic curve は $M_{g,l}$ 内で irreducible な non-singular subvariety をなすことがわかっている。従って、$\hat{\mathcal{O}}_{x'}$ において、hyperelliptic locus を定める prime ideal を $\mathfrak{P}$ とすれば、$\mathfrak{P} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \cdots, u_{g-2} + v_{g-2})$ となることがわかる。ここで、もし $Q(\hat{\mathcal{O}}_{x'}/\mathfrak{P}) = Q(\hat{\mathcal{O}}_{x'}^{\sigma^*}/\mathfrak{P}^{\sigma^*})$ とすれば、$\hat{\mathcal{O}}_{x'}/\hat{\mathcal{O}}_{x'}^{\sigma^*}$ は $\mathfrak{P}$ において unramified な拡大となり、$(\hat{\mathcal{O}}_{x'})_{\mathfrak{P}} = (\hat{\mathcal{O}}_{x'}^{\sigma^*})_{\mathfrak{P}^{\sigma^*}}$ となる。ところで、我々は $g \geqq 3$ としているのでこれは有り得ない。従って、$Q(\mathcal{O}_{x'}/\mathfrak{P}) \supsetneqq Q(\hat{\mathcal{O}}_{x'}^{\sigma^*}/\mathfrak{P}^{\sigma^*})$ となり、pure inseparability の存在することがわかり次の定理を得る。

定理 4.1. $g\geqq 3$ とし，点 $z\in M_g$ を generic hyperelliptic curve D に対応する点，$P(D)=(J(D),\lambda(D))$ を D の principally polarized Jacobian variety とする。このとき，次が成り立つ。

(i) $k_D \supsetneqq \mathbb{K}(z)$. (ii) $k_D \supsetneqq k_{P(D)}$.

この系として容易に次を得る。

系 4.2.

(i) $(A,\mathfrak{m})$ を discrete valuation ring，$Q(A)=K$，$A/\mathfrak{m}=k$，C を K 上の curve，$P=(\mathcal{X},\Lambda)$ を $S=\operatorname{Spec} A$ 上の principally polarized abelean scheme とする，更に同型 $P(C)\simeq P\otimes_A K$ が与えられているとする。この条件の下に，S 上の curve $\mathcal{C}$ で $P(\mathcal{C})\simeq P$ となるものが，一般には存在しない。

(ii) S を標数 2 の artin local ring の spectrum とし，C，C' を S 上の hyperelliptic curve とする。このとき，一般に，自然な morphism $\mathrm{Isom}_S(C,C')\longrightarrow \mathrm{Isom}_S(P(C'),P(C))$ は同型にならない。

§5. 標数 3 の体上の curve.

以下，k を標数 3 の体とし，$\tilde{C}$ を

$$Y^3-B(X)Y=A(X),$$

但し、 $B(x)=P(x)^2$, $A(x)=P(x)^2G(x)$, $\deg G=2$,

$$P(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_r), \quad (r\geq 3)$$

で定義される curve とする。このとき、命題 2.1, (iii) により、$H^0(\tilde{C},\Omega_{\tilde{C}}^{\otimes 2})$ の base は

$$(5.1) \qquad x^l P^m y^n (dx/B)^2, \quad l=0,1,\cdots,2r-4,\ m+n=2 \ (m,n\geq 0)$$

で与えられる。σ を $\tilde{C}$ の位数 3 の自己同型で、$Y\longmapsto Y+P(X)$ で与えられるものとするとき、

$$(5.2) \qquad \sum_{i=0}^{2}\left(x^l y^2\left(\frac{dx}{B}\right)^2\right)^{(\sigma^*)^i} = 2x^l P^2\left(\frac{dx}{B}\right)^2 \quad (l=0,1,\cdots,2r-4)$$

となる。一方、l を $l\geq 3$, $3\nmid l$ となるようにとり、

$$\begin{array}{ccc} M_{g,l} & \longrightarrow & M_g \\ \check{x}' & \longmapsto & \check{x} \end{array}$$

において、x をこの curve $\tilde{C}$ に対応する点とする。但し、$g=2(r-1)$ とする。このとき、(5.2) が容易に $2r-3$ 個の 1 次独立な $H^0(\tilde{C},\Omega_{\tilde{C}}^{\otimes 2})$ の元であることがわかるから、補題 3.1 により、σ の $\hat{\mathcal{O}}_x=\hat{\mathcal{O}}_{x,M_{g,l}}$ への作用が線型化されることがわかる。従って、補題 3.2 により次の結果が得られる。

<u>定理 5.1</u>. g を偶数とすれば、標数 3 の体

上の genus g の curve C で、C に対応する M_g 上の点を x としたとき、$k_C \supsetneqq k(x)$ となるものが存在する。

§6. Ordinary abelian variety について

この節では、ordinary abelian variety に対し、Serre-Tate の定理を用いて我々の議論を展開する。その為にしばらく、Messing [4] の議論を引用する。

以下、p を与えられた素数とし、S を p を locally nilpotent としてもつ scheme、S_0 を nilpotent quasi-coherent ideal $I \subset \mathcal{O}_S$ で定義される S の closed subscheme とする。(X_0, λ_0) を S_0 上の relative dimension g の principally polarized abelian scheme、$\overline{X}_0$ を X_0 に対応する Barsotti-Tate group とする。このとき、

$$\mathcal{L}(X_0, S_0 \hookrightarrow S) = \left\{ \begin{array}{l} X \longrightarrow S : \text{abelian scheme},\ \iota : X \times_S S_0 \xrightarrow{\sim} S_0 \text{ なる} \\ \text{pair } (X, \iota) \text{ の同型類} \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{L}((X_0, \lambda_0) : S_0 \hookrightarrow S) = \left\{ \begin{array}{l} X \longrightarrow S : \text{abelian scheme},\ \lambda : X \to \hat{X} : \text{polarization}, \\ \iota : X \times_S S_0 \xrightarrow{\sim} X_0,\ \lambda \times_S S_0 = \hat{\iota} \circ \lambda_0 \circ \iota \text{ なる triplet} \\ (X, \lambda, \iota) \text{ の同型類} \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{L}(\overline{X}_0 ; S_0 \hookrightarrow S) = \left\{ \begin{array}{l} B \to S \text{ Barsotti-Tate group}, \quad \iota : B \times_S S_0 \simeq \overline{X}_0 \\ \text{なる pair } (B, \iota) \text{ の同型類} \end{array} \right\}$$

とおく。このとき次を得る。

<u>定理 6.1.</u> (Serre-Tate) 写像

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(X_0, S_0 \hookrightarrow S) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\overline{X}_0 ; S_0 \hookrightarrow S) \\ \cup & & \cup \\ (X, \iota) & \longmapsto & (\overline{X}, \overline{\iota}) \end{array}$$

は、bijection を与える。

以下、$(R, \mathfrak{m})$ を標数 p の Artin local ring, $k = R/\mathfrak{m}$: 代数閉体, $S_0 = \mathrm{Spec}\, k \hookrightarrow S = \mathrm{Spec}\, R$ とおき、(X_0, λ_0) を S_0 上の次元 g の principally polarized ordinary abelian variety とする。更に、$\overline{X}_0$ の étale part, toroidal part をそれぞれ、G_0', G_0'' とおく。このとき、λ_0 は次の同型 λ_1, λ_2 を定める:

$$\begin{array}{ccc} \overline{X}_0 & \xrightarrow{\sim} & G_0' \times G_0'' \\ {\scriptstyle \overline{\lambda}_0} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \lambda_1 \times \lambda_2} \\ \widehat{\overline{X}_0} & \xrightarrow{\sim} & \hat{G}_0'' \times \hat{G}_0' . \end{array}$$

λ_0 は symmetric であるから、$\lambda_1 = \hat{\lambda}_2$, $\lambda_2 = \hat{\lambda}_1$ が成り立つ。今、同型 $r_0 : G_0' \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^g$ を定めれば、$s_0 = \hat{r}_0^{-1} \circ \lambda_2 : G_0'' \xrightarrow{\sim} \mu^g$ が決まる。但し、$\mu = \varinjlim \mu_{p^n}$ である。これ等の同型により我々は次

の可換な図式：

$$
(6.1)\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mu^{g} & \longrightarrow & \bar{X}_0 & \longrightarrow & (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{g} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\lambda}_0} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \mu^{g} & \longrightarrow & \hat{X}_0 & \longrightarrow & (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{g} & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

を得る。ここで、σ_0 を (X_0, λ_0) の自己同型とすれば、σ_0 は次の同型を導く：

$$
(6.2)\qquad
\begin{array}{ccccc}
\bar{X}_0 & \longrightarrow & G_0' \times G_0'' & \xrightarrow[\sim]{\gamma_0 \times \delta_0} & (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{g} \times \mu^{g} \\
{\scriptstyle \sigma_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_1 \times \sigma_2} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_1' \times \sigma_2'} \\
\bar{X}_0 & \longrightarrow & G_0' \times G_0'' & \xrightarrow[\sim]{\gamma_0 \times \delta_0} & (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{g} \times \mu^{g} .
\end{array}
$$

尚、σ_1', σ_2' は $GL_g(\mathbb{Z}_p)$ の元とみられる。又、$\lambda_0 = \hat{\sigma}_0 \lambda_0 \sigma_0$ より、${}^t\sigma_2' = \sigma_1'^{-1}$ となる。G_0', G_0'' は各々一意的に S 上に拡張され、それ等を G', G'' とおくことにする。このとき、γ_0, δ_0 も一意的に拡張され、$\gamma_0 : G' \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{g}$, $\delta_0 : G'' \xrightarrow{\sim} \mu^{g}$ を得る。従って、我々は次の自然な同型を得る。

$$
(6.3)\qquad \mathcal{L}(\bar{X}_0 ; S_0 \hookrightarrow S) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}((\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{g} \times \mu^{g} ; S_0 \hookrightarrow S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_R((\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{g}, \mu^{g}).
$$

一方、S 上の sheaf による帰納系 $\mathbb{Z}^{g} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}^{g} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}^{g} \xrightarrow{p} \cdots\cdots$ より、自然に完全系列

$$
0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p^{g} \longrightarrow \varinjlim \mathbb{Z}_p^{g} \longrightarrow (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{g} \longrightarrow 0
$$

を得る。これより同型

$$
(6.4)\qquad \delta_R : \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p^{g}, \mu^{g}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1((\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^{g}, \mu^{g})
$$

が得られる。尚, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_p^g, \mu^g) \xrightarrow{\sim} \bigoplus^{g^2} \mu(R) = M_g(1+m)$.
従って、定理 6.1 と (6.3), (6.4) を結びつけることにより同型

$$(6.5) \qquad \mathcal{L}(X_0; S_0 \hookrightarrow S) \xrightarrow{\sim} M_g(1+m)$$

を得る。この対応で, dual variety をとる操作は丁度, 転置行列をとる操作に対応し, (6.1) より, polarization λ_0 が S 上に伸びる為の必要十分条件は, この (6.5) の対応で対称行列に対応することであることがわかる。以上の議論をまとめて次を得る。

<u>定理 6.2.</u> 自然な同型

$$\mathcal{L}((X_0, \lambda_0); S_0 \hookrightarrow S) \xrightarrow{\sim} SM_g(1+m)$$

が存在する。更に, σ_0 を (X_0, λ_0) の自己同型とし, $\sigma_1', \sigma_2' \in GL_g(\mathbb{Z}_p)$ を (6.2) で定まる行列とする。このとき, この対応で, σ_0 の $SM_g(1+m)$ 上への作用は,

$$A \longmapsto {}^{{}^t\sigma_2'}A^{\sigma_2'} = {}^{\sigma_1'^{-1}}A^{{}^t\sigma_1'} \qquad (A \in SM_g(1+m))$$

で与えられる。但し, $U = (u_{ij})$, $V = (v_{ij})$, $A = (a_{ij}) \in M_g(\mathbb{Z}_p)$ に対し, ${}^U A$, A^V を, ${}^U A$ の (i,j)-成分 $= \prod_{l=1}^{g} a_{lj}^{u_{il}}$, A^V の (i,j)-成分 $= \prod_{l=1}^{g} a_{il}^{v_{lj}}$ で定義する。

この定理と定理 3.3 を結びつけることにより次を得る。

定理 6.3. p を素数, ℓ を $\ell \geq 3$, $p \nmid \ell$ なる自然数とし, $(X_0, \lambda_0, \alpha_0)$ を level ℓ-structure α_0 をもつ, 標数 p の体上の次元 g の principally polarized ordinary abelian variety とし, これに対応する $A_{g,\ell}$ 上の点を x とする。このとき, 位数 p の (X_0, λ_0) の自己同型 σ_0 の $\hat{\mathcal{O}}_{x, A_{g,\ell}} = \hat{\mathcal{O}}_x$ 上への作用はいつでも線型化される。

証明. 定理 3.3 と定理 6.2 より, $\sigma_1'^{-1} = A_0$ 又は A_1 として証明すればよい。$\sigma_1'^{-1} = A_1$ の場合は $\sigma_1'^{-1} = A_0$ の場合より容易なので, $\sigma_1'^{-1} = A_0$ として議論することにする。上の議論において, $R = k[\epsilon]/(\epsilon^2)$, $S_0 = \mathrm{Spec}\, k \hookrightarrow S = \mathrm{Spec}\, R$ とおけば, $\hat{\mathcal{O}}_x$ の極大イデアルを m_x とおくとき, 定理 6.2 より,

$$(m_x/m_x^2)^\wedge \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}((X_0, \lambda_0); S_0 \hookrightarrow S) \xrightarrow{\sim} SM_g(1+\epsilon k)$$

となる。更に, $SM_g(1+\epsilon k)$ の元 $M = (m_{ij})$ に対し, σ_0 の作用は

$$ {}^{\sigma_1'^{-1}}M^{{}^t\sigma_1'^{-1}} = {}^{A_0}M^{{}^tA_0} = \begin{pmatrix} m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2,p-1} & (\prod_j m_{2j})^{-1} \\ m_{32} & m_{33} & \cdots & m_{3,p-1} & (\prod_j m_{3j})^{-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ m_{p-1,2} & m_{p-1,3} & \cdots & m_{p-1,p-1} & (\prod_j m_{p-1,j})^{-1} \\ (\prod_j m_{2j})^{-1} & (\prod_j m_{3j})^{-1} & \cdots & (\prod_j m_{p-1,j})^{-1} & \prod_{i,j} m_{ij} \end{pmatrix} $$

となり，$m_{ij} = 1 + \epsilon\hat{x}_{ij}$ $(\hat{x}_{ij} \in k)$ とおくとき，σ_0 の $(\hat{x}_{ij})$ への作用は

$$ \sigma_0^*(\hat{x}_{ij}) = \begin{cases} \hat{x}_{i+1,j+1} & (i \leqq p-2,\ j \leqq p-2) \\ -\sum_{l=1}^{p-1} \hat{x}_{i+1,l} & (i \leqq p-2,\ j = p-1) \\ \sum_{k,l} \hat{x}_{k,l} & (i = j = p-1) \end{cases} $$

となる。従って，

$$ \sum_{k=0}^{p-1} \sigma_0^{*k}(\hat{x}_{11}) = 2\sum_{i\leq j} \hat{x}_{ij}, $$

$$ \sum_{k=0}^{p-1} \sigma_0^{*k}(\hat{x}_{12}) = \hat{x}_{12} + \hat{x}_{23} + \cdots + \hat{x}_{p-2,p-1} - \sum_{i=1}^{p-1} \hat{x}_{i,p-1} - \sum_{j=1}^{p-1} \hat{x}_{1,p-1}, $$

$3 \leqq n \leqq \frac{p-1}{2}$ に対し，

$$ \begin{aligned} \sum_{k=0}^{p-1} \sigma_0^{*k}(\hat{x}_{1,n}) = {} & \hat{x}_{1,n} + \hat{x}_{2,n+1} + \cdots + \hat{x}_{p-n,p-1} \\ & - \sum_{i=1}^{p-n+1} \hat{x}_{i,p-n+1} - \sum_{j=p-n+2}^{p-1} \hat{x}_{p-n+1,j} \\ & + \hat{x}_{1,p-n+2} + \hat{x}_{2,p-n+3} + \cdots + \hat{x}_{n-2,p-1} \\ & - \sum_{i=1}^{n-1} \hat{x}_{i,p-1} - \sum_{j=n}^{p-1} \hat{x}_{n-1,j}. \end{aligned} $$

これから，$\{\hat{x}_{ii}\}_{i=1,\cdots,p-1}$ の係数を比較することにより，$\sum_{k=0}^{p-1} \sigma_0^{*k}(\hat{x}_{1j})$ $(j=1,2,\cdots,\frac{p-1}{2})$ が1次独立であることがわかる。$x_{ij} \in \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ を $\hat{x}_{ij}$ の dual base とすれば，従って，補題 3.1 により，

$$\sigma_0^{k}(x_{1j}) \qquad (j=1,\cdots,\tfrac{p-1}{2};\ k=0,1,\cdots,p-1)$$

が local ring $\hat{\mathcal{O}}_x$ の regular system of parameters となっていることがわかり，σ_0 の作用が線型化出来ることがわかる。

定理 6.3 と補題 3.2 により，我々は次の定理を得る。

定理 6.4. p を素数，g を $g \geqq p-1$ なる整数とするとき，標数 p の体上定義された次元 g の principally polarized ordinary abelian variety $\mathfrak{P}=(X,\lambda)$ で，$k_{\mathfrak{P}} \supsetneqq \mathbb{k}(\mathfrak{z})$ となるものが存在する，但し，$\mathfrak{z}$ は $\mathfrak{P}$ に対応する A_g 上の点である。

文献

[1] Curtis C. W, Reiner I, Representation theory of finite groups and associative algebras, New York, Interscience Publishers 1962.

[2] Hasse H., Theorie der relativ-zyklischen algebraischen Funktionen-Körper, insbesondere bei endlichen Konstantenkörper. Journ reine angew. Math. (Crelle) 172, 37-54 (1935).

[3] Koizumi S., The fields of moduli for polarized abelian varieties and for curves. Nagoya Math. J. 48, 37-55 (1972).
[4] Messing W., The crystals associated to Barsotti-Tate groups, with applications to abelian schemes. Lecture notes in Math. Vol. 264, Berlin-Heidelberg-New York. Springer 1972.
[5] Sekiguchi T., On the fields of rationality for curves and for their jacobian varieties, to appear.
[6] Shimura G., On the field of rationality for an abelian variety. Nagoya Math. J., 45. 167-178 (1972).