代数幾何学シンポジウム記録
1982年度 pp.216-226

Subrings of finitely generated rings over a pseudo-geometric ring

小野田信春 (阪大・理)

次の問題について考える:

Noether環D上有限生成環Aの部分環Rに対し、RがD上有限生成となるための条件を求める。

この問題はHilbertの14問題と密接な関係があり、これまでにも多くの人達により種々な条件が得られている。本稿の目的はこの問題に対する新たな結果を示すことにある。結論はもう少し一般的な場合に対して述べることができるが、ここでは簡単のため、扱かう環は全て整域であるとする。上記の問題に対するapproachの仕方として2つの方向が考えられると思う。オ1は(適当な有限生成環の部分環であることのみを用いて)求める条件をRだけの性質で述べようとするものであり、オ

2はRとAとの関係（RのAの中への埋め込まれ方）から条件を求めようとするものである。ここでは主としてこの第1の方向に対する結果を述べるが、本論に入る前にこれまでに知られている事実のうち、以下の話題に関係のあるものを挙げておきたい。即ち、次のようなとき、RはD上有限生成になる。

(I) Dが体の場合

(I−1)：（Zariski）　Rが $tr.deg_D R \leq 2$ を満たすKrull環のとき

(I−2)：（Onoda and Yoshida）　RがNoether環かつRのderived normal ring R' がequi-dimensionalのとき

(II) Dが擬幾何学的環の場合

(II−1)：（Nagata−Otsuka）次が成立するとき，(i) Aは正規　(ii) $R = Q(R) \cap A$　(iii) $Spec(A) \longrightarrow Spec(R)$ はsurjective　(iv) $^{\forall}$maximal ideal $m \in Spec(R)$ に対し mR_m は有限生成。ただし、Dは次の条件を満たすと仮定する：

(C)　D上の正規局所域は解析的既約である。

(II−2)：（Nagata）　RがAの中にstrongly submersiveの

とき。

注意　(I-1)は(I-2)に含まれる。

この小論では(I-2)と(II-1)の結果を拡張させてみたい。そこで、以下整域 $D \subseteq R \subseteq A$ は最初の通りとし、更に D は上の条件(C)を満たす擬幾何学的環と仮定する。(この条件は D が体または擬幾何学的 Dedekind 環のときは自然に満たされる。)

1.　イデアル $\mathcal{A}_D(R)$

所期の目的を達するため、R の部分集合 $\mathcal{A}_D(R)$ を次のように定義する。

$$\mathcal{A}_D(R) = \{0 \neq a \in R \mid R[1/a] \text{ は } D \text{ 上有限生成}\} \cup \{0\}.$$

このとき次が成り立つ。

Lemma 1.1. $\mathcal{A}_D(R)$ は R の non-zero radical ideal である。

証明は省略する。更に次の Lemma が成り立つがこれは重要である。

Lemma 1.2. $P \in \mathrm{Spec}(R)$ に対し次は同値である。

(1) R_P は D 上の局所域である。

(2) $\mathcal{A}_D(R) \not\subseteq P$.

証明. (2) ⇒ (1) は明白。(1) ⇒ (2) を示す。R_p が D 上の局所域であるとすれば、ある D 上有限生成環 B $(\subseteq R)$ と $Q \in \mathrm{Spec}(B)$ に対し、$B_Q = R_p$ となる。$S = B \setminus Q$ とおけば $S^{-1}B = S^{-1}R$ を得る。$0 \neq a \in \mathcal{A}_D(R)$ とし、$b \in B$ を $R[1/a] \subseteq B[1/b]$ となるように選ぶ。ここで

$$F = \{ Q \in \mathrm{Spec}(B) \mid \mathrm{depth}\, B_Q = 1 \text{ かつ } B_Q \not\supseteq R \}$$

とおく。容易にわかるように $F \subseteq \mathrm{Ass}_B(B/bB)$. 従って F は有限集合である. $F = \{Q_1, \cdots, Q_m\}$ としよう。明らかに $Q_1 \cap \cdots \cap Q_m \not\subseteq P$. $s \in (Q_1 \cap \cdots \cap Q_m) \setminus P$ を任意に選んで

$$\Delta = \{ Q \in \mathrm{Spec}(B) \mid \mathrm{depth}\, B_Q = 1 \text{ かつ } s \notin Q \}$$

とおけば s の取り方より、$Q \in \Delta$ ならば $B_Q \supseteq R$ となる, 従って $B[1/s] = \bigcap_{Q \in \Delta} B_Q \supseteq R$ を得るから従って $B[1/s] = R[1/s]$ となる。よって $s \in \mathcal{A}_D(R) \setminus P$ つまり $\mathcal{A}_D(R) \not\subseteq P$ となる ∎

この Lemma より次の定理が得られた。

定理 1.3. 次の条件は互いに同値である。

(1) R は D 上有限生成.

(2) $^\forall p \in \mathrm{Spec}(R)$ に対し R_p は D 上の局所域

(3) $^\forall \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(D)$ に対し $R_\mathfrak{q}$ は $D_\mathfrak{q}$ 上有限生成。

証明. (1) ⇒ (3) ⇒ (2) は明らか。(2) ⇒ (1) は Lemma 1.2. より直ちに従がう ∎

2. $\mathcal{A}_{D/\mathfrak{q}}(R/P)$ の非零性

R の素イデアル P に対し $\mathcal{A}_{D/\mathfrak{q}}(R/P)$ を考えてみよう。ただし、$\mathfrak{q} = P \cap D$ である。このイデアル $\mathcal{A}_{D/\mathfrak{q}}(R/P)$ は（例え D が体の場合であっても）一般には非零とは限らない。以下において必要になるので、この節では $\mathcal{A}_{D/\mathfrak{q}}(R/P) \neq (0)$ となるための条件を与えておく。そのために次の定義をしておく。

定義 2.1. $P \in \mathrm{Spec}(R)$, $\mathfrak{q} = P \cap D$ のとき、もしも

$$\mathrm{ht}(P) + \mathrm{tr.deg}_{k(\mathfrak{q})} k(P) = \mathrm{ht}(\mathfrak{q}) + \mathrm{tr.deg}_D R$$

が成立するならば、P は D に対し て次元公式を満たすという。ただし $k(\mathfrak{q})$ は $D/\mathfrak{q}$ の商体を表わす。

このとき次の Lemma が成り立つ。

Lemma 2.2. $\mathrm{ht}(P) = 1$ かつ次元公式を満たす素イデアル P に対し、$\mathcal{A}_D(R) \not\subset P$.

証明　Rの部分環Bを次の条件を満たすように選ぶ。(i) BはD上有限生成　(ii) BとRは birational　(iii) $ht(Q) = 1$（ただし、$Q = P \cap B$）.
B', R'をB, Rの derived normal rings として、次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} B'_Q & \longrightarrow & R'_Q \\ \uparrow & & \uparrow \\ B_Q & \longrightarrow & R_Q \end{array}$$

ここで、$ht(Q) = 1$ゆえ、Krull－秋月の定理より上の図式中の環は全て次元1の Noether 環である。$P'R'_Q$をR'_Qの任意の極大イデアルとして$Q' = P' \cap B'$とおけば$B'_{Q'}$は離散付値環ゆえ、$B'_{Q'} = R'_{P'}$となる。従って定理1.3.よりR'_QはB'_Q上有限生成であることがわかる。ここでB'は有限B－加群であることに注意すれば、Lemma 1.2 より$\mathcal{A}_D(R') \cap S \neq \phi$（$S = B \setminus Q$とおく）となることがわかる，一般に$\mathcal{A}_D(R') \cap R = \mathcal{A}_D(R)$が容易に示せるからよって$\mathcal{A}_D(R) \cap S \neq \phi$となり、これは即ち$\mathcal{A}_D(R) \not\subseteq P$を意味する∎

このLemmaを使って次が示せる。

<u>定理</u> 2.3.　$P \in \mathrm{Spec}(R)$ が次元公式を満たすなら $\mathcal{A}_{D/\mathfrak{p}}(R/P) \neq (0)$ である.

証明は $ht(P)$ に関する induction を使えばよい。

3. <u>主定理</u>

まず次の lemma を示そう.

<u>Lemma</u> 3.1.　D', R' を D, R の derived normal rings とする。$P' \in \mathrm{Spec}(R')$ が D' に対し次元公式を満たし、かつ R_P ($P = P' \cap R$) が Noether 環ならば、$R'_{P'}$ は D' 上の局所域である。

<u>証明</u>. R の部分環 B で次の条件を満たすものを考える. (i) B は D 上有限生成 (ii) B と R は birational (iii) $tr.deg_{k(\mathfrak{q})}\, k(P) = 0$ (iv) $\mathfrak{q} R_P = P R_P$ (ただし $\mathfrak{q} = P \cap B$). B' を B の derived normal ring とし $\bar{R} = R[B']$ とおく。$\bar{R}$ は有限 R - 加群である。従って. $\bar{P} = P' \cap \bar{R}$ とおけば、R_P が Noether 環ゆえ. $\bar{R}_{\bar{P}}$ もやはり Noether 環である。$\mathfrak{q}' = P' \cap B'$, $\mathfrak{p}' = P' \cap D'$ とおいて. $D'_{\mathfrak{p}'} \subseteq B'_{\mathfrak{q}'} \subseteq \bar{R}_{\bar{P}} \subseteq R'_{P'}$ という環の拡大列を考えよう, P' が次元公式を満たし、かつ $B'_{\mathfrak{q}'}$, $\bar{R}_{\bar{P}}$ が共に Noether 環であるから、

よく知られた次元不等式を考慮すれば、$\bar{P}$, Q' が共に次元公式を満たすことはすぐわかり、従って

$$ht(\bar{P}) = ht(\mathfrak{p}') + tr.deg_{D'}\bar{R} - tr.deg_{\kappa(\mathfrak{p}')}\kappa(\bar{P})$$

$$ht(Q') = ht(\mathfrak{p}') + tr.deg_{D'}B' - tr.deg_{\kappa(\mathfrak{p}')}\kappa(Q')$$

を得る。よって B の選び方より $ht(\bar{P}) = ht(Q')$、つまり $\dim \bar{R}_{\bar{P}} = \dim B'_{Q'}$ となることがわかる。次に、$K = \kappa(Q')$, $L = \kappa(\bar{P})$ とおくとき $length_K\ \bar{R}_{\bar{P}}/Q'\bar{R}_{\bar{P}}$ が有限であることを示そう。実際 $Q'\bar{R}_{\bar{P}} \supseteq Q\bar{R}_{\bar{P}} = P\bar{R}_{\bar{P}}$ かつ $P\bar{R}_{\bar{P}}$ が $\bar{P}\bar{R}_{\bar{P}}$ - primary ideal ゆえ正整数 n を選んで $\bar{P}^n\bar{R}_{\bar{P}} \subseteq Q'\bar{R}_{\bar{P}}$ となるようにできる。すると、

$$length_K\ \bar{R}_{\bar{P}}/Q'\bar{R}_{\bar{P}} \leqq length_{B'_{Q'}}\ \bar{R}_{\bar{P}}/\bar{P}^n\bar{R}_{\bar{P}}$$
$$= (length_K\ L)(length_{\bar{R}_{\bar{P}}}\ \bar{R}_{\bar{P}}/\bar{P}^n\bar{R}_{\bar{P}}).$$

$\bar{P}$ は次元公式を満たすゆえ、定理 2.3 によりある $D'/\mathfrak{p}'$ 上有限生成な環 E に対して、$\bar{R}/\bar{P} \subseteq E$ とできることに注意する。そこで環の拡大 $B'/Q' \subseteq \bar{R}/\bar{P} \subseteq E$ を考え、全体を $S = (B'/Q') \setminus \{0\}$ によって局所化することにより $K = S^{-1}(B'/Q') \subseteq S^{-1}(\bar{R}/\bar{P}) \subseteq S^{-1}E$ が得られる。ここで $S^{-1}(\bar{R}/\bar{P}) =$

$\bar{R}_{Q'}/\bar{P}\bar{R}_{Q'}$ かつ B の選び方より $tr.deg_K \bar{R}_{Q'}/\bar{P}\bar{R}_{Q'} = 0$ であることから、$\bar{R}_{Q'}/\bar{P}\bar{R}_{Q'}$ は体となり従ってそれは L と一致しなければならない。よって、$K \subseteq L \subseteq S^{-1}E$ となるが、ここで $S^{-1}E$ が K 上有限生成であることより結局、L は K の有限次代数拡大体であることがわかった。故に $length_K L$ は有限。また $\bar{R}_{\bar{P}}$ は Noether 環ゆえ $length_{\bar{R}_{\bar{P}}} \bar{R}_{\bar{P}}/\bar{P}^n\bar{R}_{\bar{P}}$ も有限である。従って $length_K \bar{R}_{\bar{P}}/Q'\bar{R}_{\bar{P}}$ が有限であることが示せた。更に $B'_{Q'}$ は D 上の正規局所域ゆえ、仮定より $B'_{Q'}$ は解析的既約、かつ明らかに $B'_{Q'}$ と $\bar{R}_{\bar{P}}$ は birational である。よって Zariski の主定理により $B'_{Q'} = \bar{R}_{\bar{P}}$ を得る。このことより $\bar{R}_{\bar{P}}$ が整閉であることがわかり、従って $\bar{R}_{\bar{P}} = R'_{\bar{P}}$ となる。よって $R'_{\bar{P}}$ は局所環であり、故に $R'_{\bar{P}} = R'_{P'}$ がいえる。かくして $R'_{P'} = B'_{Q'}$ となり、従って $R'_{P'}$ は D' 上の局所域である ∎

このLemmaと定理1.3より直ちに次の定理を得る。

<u>定理</u> 3.2. 次の条件は互いに同値である。

(1) R は D 上有限生成である。

(2) R は locally Noether 環 かつ D' と R' の間に次元公式が成り立つ。

この定理は、特に D が体の場合を考えれば (I-2) の一般化になっていることがわかる。この定理を利用すれば次の定理も示せるが、こちらは (II-1) と深く関係している。

<u>定理</u> 3.3. R が locally Noether 環 かつ $\mathrm{Spec}(A') \longrightarrow \mathrm{Spec}(R')$ が surjection ならば R は D 上有限生成である。

この定理の証明は省略する。この他にも種々の有限生成となるための条件が以上の結果に関連して導ける。例えば、定理 3.2 と定理 3.3 を結びつけて次の形に拡張することも可能である.

<u>定理</u> 3.4. R が locally Noether 環 かつ 任意の極大イデアル $M' \in \mathrm{Spec}(R')$ に対し R' 上の局所域 S で $R'_{M'}$ を支配しかつその極大イデアル $\mathfrak{m}$ が D' に対して次元公式を満たすようなものが存在するなら R は D 上有限生成である。

証明にはかなりの準備を要するのでここでは省略する。次の定理の証明も省略するが、

これも (I−2) の自然な一般化の一つである。

<u>定理</u> 3.5. $0 \neq {}^{\forall}a \in D$ に対し $\dim D[1/a] = \dim D$ が成り立つとする。R が locally Noether 環 かつ R' が equi-dimensional ならば R は D 上有限生成である。

参考文献

[1] M. Nagata, A theorem on finite generation of a ring, Nagoya Math. J. 27 (1966), 193−205.

[2] M. Nagata and K. Otsuka, Some remarks on the 14th problem of Hilbert, J. Math. Kyoto Univ. 5 (1965), 61−66.

[3] N. Onoda, Subrings of finitely generated rings over a pseudo-geometric ring, to appear.

[4] N. Onoda and K. Yoshida, On noetherian subrings of an affine domain, Hiroshima Math. J. 12 (1982), 377−384.