代数幾何学シンポジウム記録
1982年度　pp.196-215

$Sp(2,\mathbb{Z})$ に関する generalized automorphic form の空間の次元公式

学習院大　理　対馬龍司

1.　$\mathfrak{S}_g$ を次数 g の Siegel 上半平面とする。この時 $Sp(g,\mathbb{R})$ の元 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ が $Z\in\mathfrak{S}_g$ に対して、次の様に作用する。

$$Z\mapsto M\cdot Z := (AZ+B)(CZ+D)^{-1}。$$

この M と Z とに対して、

$$J(M,Z)=CZ+D\quad(\in GL(g,\mathbb{C}))$$

と定義する。　この時、次の関係式が任意の $M, M'\in Sp(g,\mathbb{R})$ と $Z\in\mathfrak{S}_g$ に対して成り立つ。

$$J(MM',Z)=J(M,M'\cdot Z)\,J(M',Z)。$$

これは canonical automorphic factor と呼ばれる。
$\rho: GL(g,\mathbb{C})\to GL(r,\mathbb{C})$ を正則な表現とする。この時、$\rho(J(M,Z))=\rho(CZ+D)$ も上の関係を満足する。　Γ を $Sp(g,\mathbb{Z})$ の指数有限の部分群とする。　$\mathfrak{S}_g$ から $\mathbb{C}^r$ への正則写像 f が、任意の $M\in\Gamma$ と $\mathfrak{S}_g$ に対して次の関係：

$$f(M\cdot Z) = \mu(CZ+D)f(Z)$$

を満たす時、f は μ 型の保型形式と呼ばれる。ただし $g=1$ の時は f が尖点で正則という条件をつける。f のなす空間を $A_\mu(\Gamma)$ で表す。これは有限次元であることが知られている。f は "Φ-operator" の核に入っている時、尖点形式と呼ばれる（[2], Exposé 8）。尖点形式のなす $A_\mu(\Gamma)$ の部分空間を $S_\mu(\Gamma)$ で表す。

以下 $g=2$ の時に、$S_\mu(\Gamma)$ の次元を計算することを問題とする。$g\geq 2$ の時、上の様な Γ はある ℓ に対して主合同部分群

$$\Gamma_g(\ell) := \left\{ M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(g, \mathbb{Z}) \mid M \equiv 1_{2g} \bmod \ell \right\}$$

を含んでいることが知られている。$g=2$ の時に、$\Gamma \supset \Gamma_2(\ell)$ $(\ell \geq 3)$ として $S_\mu(\Gamma)$ の次元を、[12] において $\Gamma/\Gamma_2(\ell)$ の条件で表した。特に $S_\mu(\Gamma_2(\ell))$ $(\ell \geq 1)$ の次元は [11] において報告されている（この報告集が出る頃には）。μ が特に $\det^k$ のとき、$S_\mu(\Gamma)$ は $S_k(\Gamma)$ とも書かれる。$S_k(\Gamma)$ に対して同様のことは [10] においてなされた。$S_k(\Gamma_2(\ell))$ $(\ell \geq 3)$ に対しては [13] に

おいてなされた。

$S_\mu(\Gamma)$ の計算については、2つの部分に分かれる。一つの部分はRiemann-Rochの計算と、他の部分は消滅定理である。城崎では消滅定理の部分を話した。Riemann-Rochの部分については、東北大学での研究集会で話した。従ってこの報告でも消滅定理の部分のみについて報告する（ただし、東北大学の研究集会については報告集は発行されない。悪しからず。）。

2、　商空間 $\Gamma_g(\ell)\backslash G_g$ を $G_g^*(\ell)$ で表す。$\ell \geq 3$ の時、$\Gamma_g(\ell)$ は固定点を持たない。従って $G_g^*(\ell)$ は非特異である。$G_g^*(\ell)$ は自然なcompact化、佐武compact化 $\overline{G}_g^*(\ell)$ を持っている。これは射影代数多様体で、$g \geq 2$ ならば尖点 $:= \overline{G}_g^*(\ell) - G_g^*(\ell)$ に沿って特異点を持っている。浪川氏は［9］において他のcompact化 $\tilde{G}_g^*(\ell)$ を構成した。これは $g \leq 4$ のとき非特異で、$g \geq 5$ のときは非特異か否か不明である。$G_g^*(\ell)$, $\overline{G}_g^*(\ell)$, $\tilde{G}_g^*(\ell)$ を簡単の為それぞれ X, $\overline{X}$, $\tilde{X}$ で表

す。 Δ で $\tilde{X}-X$ を表し、 X の境界と呼ぶ。 $\tilde{X}$ は X 上恒等写像である様な正則写像 $s:\tilde{X}\to\bar{X}$ を持っている。

積多様体 $\mathfrak{S}_g\times\mathbb{C}^r$ を $\mathcal{E}_\mu$ で表す。 $\mathcal{E}_\mu$ には $M=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in\Gamma_g(\ell)$, $Z\in\mathfrak{S}_g$, $\xi\in\mathbb{C}^r$ として $\Gamma_g(\ell)$ が次の様に作用する。

$$M(Z,\xi)=(M\cdot Z,\ \mu(CZ+D)\xi).$$

この商空間を E_μ と書く。 $\ell\geq 3$ の時、これは X 上の $\mathbb{C}^r$-fibre bundle である。 E_μ は $\tilde{X}$ 上の fibre bundle $\tilde{E}_\mu$ に自然に延長される。 $\tilde{E}_\mu$ の構成方法について簡単に説明しておく。 その為には $\tilde{X}$ の構成法について説明しなくてはならないが、これは著しく複雑である。 それを簡単に標語的にいうと、三つの段階に分かれる。 第一に平行移動の部分群

$$H=\left\{M=\begin{pmatrix}1_g&B\\0&1_g\end{pmatrix}\in\Gamma_g(\ell)\ \middle|\ {}^tB=B\right\}$$

で $\mathfrak{S}_g$ を割る。 $\mathfrak{S}_g$ は $(\mathbb{C})^{g(g+1)/2}$ に含まれているから、上で B を全てにわたって動かした時、 $H\backslash\mathfrak{S}_g$ は $H\backslash(\mathbb{C})^{g(g+1)/2}=(\mathbb{C}^*)^{g(g+1)/2}$ ($=T$ とする。) に含まれることになる。 T は代数的 torus であ

る。　ここでTに無限個の因子をつけ加えて torus embedding $\mathcal{X}$ を作る（[5]）。　これが第二段階である。　更に第三段階として、$\mathcal{X}$ を割って $\sim\backslash\mathcal{X}$ を作りこれらを張り合わせる。　改めて言っておくが $\widetilde{X}$ の構成法はもっと複雑で、これは全く単純化して話したものである。

ここでHの元Mについては、任意の $z \in \mathfrak{S}_g$ に対して、

$$J(M, z) = 1_g$$

であるから、Mは $\mathcal{E}_\mu$ の $\mathbb{C}^r$ の方へは自明に作用している。　従って

$$H\backslash(\mathfrak{S}_g \times \mathbb{C}^r) = (H\backslash\mathfrak{S}_g) \times \mathbb{C}^r$$

となっている。　即ちHで割った段階では、未だ積多様体になっている。　従って $H\backslash\mathfrak{S}_g \subset T \subset \mathcal{X}$ と拡大して行く際に、積のまま拡大し $\mathcal{X} \times \mathbb{C}^r$ を割って $\sim\backslash(\mathcal{X} \times \mathbb{C}^r)$ を張り合わせて、$\widetilde{E}_\mu$ が構成される。

$A_\mu(\Gamma_g(\ell))$ は自然に $\Gamma(X, \mathcal{O}(E_\mu))$ と同一視される。　$\Gamma(X, \mathcal{O}(E_\mu))$ の元 f は $\Gamma(\widetilde{X}, \mathcal{O}(\widetilde{E}_\mu))$ の元 $\hat{f}$ に延長されることが知られている。　こ

れは保型形式が（$g \geq 2$の時は必然的に，$g=1$の時は仮定から）尖点において正則という事実による。

<u>例 1</u>　$\mathfrak{S}_g$の座標を$Z=(z_{ij})$で表す。ただし$z_{ij}=z_{ji}$とする。この時$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(g, \mathbb{R})$に対して，次の事が知られている。

$$\left(d(M\cdot Z)_{ij}\right) = {}^t(CZ+D)^{-1}\left(dz_{ij}\right)(CZ+D)^{-1}.$$

従って$\mathfrak{S}_g$上の正則微分形式，$\omega=\sum_{i \geq j} f_{ij}(Z)\,dz_{ij}$が$\Gamma_g(\ell)$不変である，即ち任意の$M \in \Gamma_g(\ell)$に対し

$$\sum_{i \geq j} f_{ij}(M\cdot Z)\,d(M\cdot Z)_{ij} = \sum_{i \geq j} f_{ij}(Z)\,dz_{ij}$$

である為の条件は，$\mu = S_2$（2次の対称tensor表現）として$f=(f_{ij}(Z))_{i \geq j}$が$\Gamma(X, \mathcal{O}(E_\mu))$に属すことである。この時$f$を延長した$\tilde{f}$に対応する微分形式$\tilde{\omega}$は，$\Delta$に沿って対数的極を持つことが許される。従って次の同型が得られる。

$$\tilde{E}_{S_2} \cong \Omega^1_{\tilde{X}}(\log \Delta).$$

3.　Xをm次元複素多様体，EをX上の階数rの正則vector bundle，hをEのhermite計量とする。hの接続形式θと，曲率形式Θは次

の様に定義される。

$$\theta = h^{-1}\partial h, \quad \Theta = \bar{\partial}\theta 。$$

Θ は係数が (1,1)-形式の微分形式である。

$(z^1, z^2, \cdots, z^n)$ を X の局所座標とし, $h\Theta$ の (ρ, σ)-係数を

$$\sum_{1 \le i, j \le n} H(\Theta)_{\sigma i, \rho j}\, dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

とする。 この時次の事が成立する。

$$H(\Theta)_{\sigma i, \rho j} = \overline{H(\Theta)_{\rho j, \sigma i}} 。$$

そこで vector $\xi = (\xi^{\sigma i})_{1 \le \sigma \le r,\, 1 \le i \le n}$ に対して, hermite 形式を次で定義する。

$$\Theta(\xi, \xi) = \sum_{\substack{1 \le \sigma, \rho \le r \\ 1 \le i, j \le n}} H(\Theta)_{\sigma i, \rho j}\, \xi^{\sigma i} \overline{\xi^{\rho j}} 。$$

<u>定義 2</u> 若し $\Theta(\xi, \xi)$ が全ての non-zero vector ξ に対して正 (resp. 非負, 負) の時, E は正 (resp. 非負, 負) と言われ, 次の様に表わされる。

$$E > 0 \quad (\text{resp. } E \ge 0, \; E < 0)。$$

E が直線束の時は, この正の概念は小平の意味での正の概念と一致する。

μ を $GL(g, \mathbb{C})$ の $\mathbb{C}^g$ 上の通常の作用による表現とする。 この場合, $\mathcal{E}_\mu$, E_μ, $\tilde{E}_\mu$ を特に $\mathcal{E}$, E, $\tilde{E}$ で表す。 $Z \in \mathfrak{S}_g$ とし, $u, v \in \mathcal{E}$ に

対して

$$h = \mathrm{Im}\, Z, \quad \langle u, v\rangle = {}^t\bar{u} h v$$

と置く。　任意の $Z \in \mathfrak{S}_g$ と $M \in Sp(g, \mathbb{R})$ に対して、次の事が成立する。

$$\mathrm{Im}\, M\cdot Z = {}^t\overline{(CZ+D)}^{-1}(\mathrm{Im}\, Z)((CZ+D)^{-1})。$$

従って、次の事が成立する。

$$\langle Mu, Mv\rangle = \langle u, v\rangle,$$

即ち hermite 計量 h は $Sp(g, \mathbb{R})$ 不変である。　故に $Sp(g, \mathbb{R})$ の torsion free な離散部分群 Γ に対して、h は $E := \Gamma\backslash\mathcal{E}$ の hermite 計量 h を誘導する。

$\mu(CZ+D) = \det(CZ+D)$ の時は E_μ, $\widetilde{E}_\mu$ は直線束である。　これらを特に L_g, $\widetilde{L}_g$ でも表す。前に言い忘れた（書き忘れた）が、L_g は佐武 compact 化 $\overline{X}$ 上の直線束 $\overline{L}_g$ に延長され、$\widetilde{L}_g$ は自然な写像 $\pi: \widetilde{X} \to \overline{X}$ による $\overline{L}_g$ の引き戻しとなる。　ただしこれは直線束の場合だけで、一般に E_μ は $\overline{X}$ 上には延長されない。　同じくこの場合に $\mathcal{E}_\mu$ を $\mathcal{L}_g$ で表す。　前と同様に $Z \in \mathfrak{S}_g$ と $u, v \in (\mathcal{L}_g)_Z$ に対して、計量 $\langle u, v\rangle := \bar{u}\det(\mathrm{Im}\, Z)v$ は $Sp(g, \mathbb{R})$ 不変な $\mathcal{L}_g$ の計量を定義し、従って $L_g :=$

$\Gamma\backslash \mathfrak{S}_g$の計量を定義する。

命題3 上の計量に対して、Ξは非負で、$\mathfrak{S}_g$は正である。

証明 計量ΩはSp(g,ℝ)不変であるから、一点$Z \in \mathfrak{S}_g$に於て非負であることを示せばよい。そこで$Z = i1_g$とする。$Y = \mathrm{Im}\, Z$と置く。この時、次が成立する。

$$
\begin{aligned}
(\Theta_{\rho\sigma}) &= \bar{\partial}(Y^{-1}\partial Y) \\
&= Y^{-1}\bar{\partial}\partial Y - Y^{-1}\bar{\partial} Y Y^{-1}\partial Y \\
&= -(1/4)\sum_k d\bar{Z}_{\rho k} \wedge dZ_{k\sigma}.
\end{aligned}
$$

$1 \leq \sigma, i, j \leq g$, $i \leq j$に対して変数$\xi^{\sigma(i,j)}$を導入し、$\xi^{\sigma(j,i)} = \xi^{\sigma(i,j)}$と置く。この時$\xi = (\xi^{\sigma(i,j)})$に対して、

$$
\begin{aligned}
\Theta(\xi,\xi) &= (1/4)\sum_{1\leq i,j,k\leq g} \xi^{j(j,k)}\bar{\xi}^{i(i,k)} \\
&= (1/4)\sum_{1\leq k\leq g}\Big|\sum_{1\leq i\leq g}\xi^{i(i,k)}\Big|^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

である。故にΞは非負である。$\mathfrak{S}_g$に対しては$i\bar{\partial}\partial\log(\det \mathrm{Im}\, Z)$が$\mathfrak{S}_g$のBergmann計量を定義することから、正であることはよく知られている。

次の補題は［3］p. 209と同様に証明される。ただし、Griffiths［3］の意味の正の概念は上の定義2（中野［8］）の正の概念より弱い概念である。が、証明は同様である。

<u>補題4</u>　E_1, E_2 を X 上の vector 束とし、計量 h_1, h_2 に関して $E_1 \geq 0$, $E_2 \geq 0$ とする。この時、計量 $h_1 \otimes h_2$ に関して $E_1 \otimes E_2 \geq 0$ であり、特に $E_2 > 0$ ならば $E_1 \otimes E_2 > 0$ である。

μ を $GL(g, \mathbb{C})$ の既約な正則表現とし、$(f_1, f_2, \cdots, f_g)$ $(f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq f_g)$ をその符号数とする。即ち、$f_g \geq 0$ の場合は、f_i は Young 図形の i 行の長さである。

<u>定理5</u>　Γ を $Sp(g, \mathbb{R})$ の torsion free で $\Gamma \backslash G_g$ が compact な離散部分群とする。$E_\mu := \Gamma \backslash \mathcal{E}_\mu$ を $\Gamma \backslash G_g$ 上の vector 束とする。この時、若し $f_g \geq g+2$ であれば、$p > 0$ に対して

$$H^p(\Gamma \backslash G_g, \mathcal{O}(E_\mu)) \simeq 0$$

が成り立つ。

<u>証明</u>　K を $\Gamma \backslash G_g$ の標準的直線束とする。この時、次の事が知られている。

$$K \simeq L_g^{\otimes(g+1)}。$$

ν を符号数 $(f_1-g-2, f_2-g-2, \cdots, f_g-g-2)$ の $GL(g, \mathbb{C})$ の既約表現とする。この時、$\mu = \nu \otimes \det^{(g+2)}$ である。$f_g-g-2 \geq 0$ であるから、$f = \sum_{i=1}^{g}(f_i-g-2)$ として、$E^{\otimes f}$ は E_ν と同型な vector 束を直和因子として含んでいる。故に

$$H^p(\Gamma\backslash G_g, \mathcal{O}(E^{\otimes f} \otimes L_g^{\otimes(g+2)})) \simeq 0$$

を示せばよい。$E^{\otimes f} \otimes L_g^{\otimes(g+2)}$ は $E^{\otimes f} \otimes L_g \otimes K$ と同型であるから、これは命題3と次の定理から証明される。

<u>定理6</u>. X を compact な複素多様体、E を X 上の vector 束、K を X の標準的直線束とする。この時、若し $E > 0$ ならば、$p > 0$ に対して次が成立する。

$$H^p(X, \mathcal{O}(E \otimes K)) \simeq 0$$

<u>注意7</u>. この定理は [8] に於て $p=1$ の場合に証明された。$p>1$ の場合については、[1] に於て X が有界対称領域の商空間、E がその接束の場合に扱かわれている。しかし一般の E と $p>1$ について証明したものを、筆

者は知らない。 専門家は"$p>1$の場合も証明は同様だ"で済ませている様である。

<u>注意 8.</u> 中野の意味(定義2)で正なvector束の商束は一般に正となるとは限らない。 Griffiths [3] の意味で正なvector束の商束は正である([3] p. 208)。 しかしこの証明は、中野の意味の正の概念に対しては適用しない。 実際 $\mathbb{P}^n$ の接束は中野の意味で正ではない。

<u>注意 9.</u> Γを定理5の通りとする。この様なΓに対して、保型形式の次元公式は[4]に於て計算された。 [4]では直線束に対する小平消滅定理を用いる別の方法で証明されている。 ただしそこでは、条件が $f_g \geq 2g+1$ となっている。 従って定理5の結果は[4]の結果より精密で、$f_g = g+1$ の場合には反例があるのでこれが最良である。

4. さて今度は $g=2$ で、$\Gamma = \Gamma_2(\ell)$ の場合に戻ることにする。 μを符号数 $(j+k, k)$ $(j \geq 0)$ の $GL(2, \mathbb{C})$ の既約表現とする。 S_j を j 次の対称tensor表現とする時、μ は $S_j \otimes \det^k$ と同値である。

この時、$\widetilde{E}_\mu$ は $S^j(\widetilde{E})\otimes\widetilde{L}_2^{\otimes k}$ と同型である。

E を複素多様体 X 上の階数 r の vector 束とし、E^* をその双対的 vector 束とする。X を E^* の零切断と同一視し、$\mathbb{P}(E)=(E^*-X)/\mathbb{C}^*$ とする。これは X 上の $\mathbb{P}^{r-1}$-bundle であり、E^*-X は $\mathbb{P}(E)$ 上の $\mathbb{C}^*$-bundle となる。この $\mathbb{C}^*$-bundle に伴う直線束を $H(E)^*$ で表わし、その双対直線束を $H(E)$ で表わす。

<u>定義10</u> L を射影的非特異多様体 X 上の直線束とする。任意の非特異 compact 曲線 C と任意の正則写像 $f:C\to X$ に対して、f^*L の次数が非負の時、L は numerically semi-positive と呼ばれる。E を X 上の vector 束とする。E は $H(E)$ が numerically semi-positive の時 numerically semi-positive と呼ばれる。

$\mathcal{F}$ を X 上の連接層、$\pi:\mathbb{P}(E)\to X$ を射影とする時、次の同型はよく知られている。

$$H^p(X,\mathcal{O}(S^j(E))\otimes\mathcal{F})\simeq H^p(\mathbb{P}(E),\mathcal{O}(H(E)^{\otimes j})\otimes\pi^*\mathcal{F}).$$

K_X と $K_{\mathbb{P}(E)}$ をそれぞれ X と $\mathbb{P}(E)$ との標準的直線束とする。この時次の同型がある([3] 又は [6])。

$$K_{\mathbb{P}(E)} \simeq H(E)^{\otimes(-k)} \otimes \pi^*(K_X \otimes \det E)。$$

定理11. μを上の通りとする。若し、$j=0$, $k \geq 4$ 又は $j \geq 1$, $k \geq 5$ ならば、$p>0$ に対して、

$$H^p(\tilde{X}, \mathcal{O}(\tilde{E}_\mu - \Delta)) \simeq 0。$$

証明. $j=0$ の場合は小平消滅定理により証明される。$[\Delta]$をΔに伴う直線束とする。$\mathcal{O}(\tilde{E}_\mu-\Delta)$ は $\mathcal{O}(\tilde{E}_\mu\otimes[\Delta]^{\otimes(-1)})$ と同型である。故にこれは $\mathcal{O}(S^j(\tilde{E})\otimes \tilde{L}_2^{\otimes k}\otimes[\Delta]^{\otimes(-1)})$ と同型である。Kを$\tilde{X}$の標準的直線束とすると、Kは $\tilde{L}_2^{\otimes 3}\otimes[\Delta]^{\otimes(-1)}$ と同型である。故に上の層は $\mathcal{O}(S^j(\tilde{E})\otimes \tilde{L}_2^{\otimes(k-3)}\otimes K)$ と同型である。更に次の同型がある。

$$H^p(\tilde{X}, \mathcal{O}(S^j(\tilde{E})\otimes \tilde{L}_2^{\otimes(k-3)}\otimes K)) \simeq H^p(\mathbb{P}(\tilde{E}), \mathcal{O}(H(\tilde{E})^{\otimes j}\otimes\pi^*(\tilde{L}_2^{\otimes(k-3)}\otimes K)))。$$

$\det \tilde{E} = \tilde{L}_2$ であるから、これは

$$H^p(\mathbb{P}(\tilde{E}), \mathcal{O}(H(E)^{\otimes(j+2)}\otimes\pi^*(\tilde{L}_2^{\otimes(k-4)})\otimes K_{\mathbb{P}(\tilde{E})}))$$

に同型である。このcohomology群の消滅は次の川又-Viewegの消滅定理より証明される。

定理12. ([14]又は[15]). Xをn次元非特異射影多様体、LをX上の直線束、$c_1(L)$をLの第一次chern類、KをXの標準的直線束とする。若しLがnumerically semi-positiveで $c_1(L)^n[X]$

が正ならば，$p>0$ の時

$$H^p(X, \mathcal{O}(L\otimes K)) \simeq 0$$

が成り立つ。

故に我々は $k\geq 5$ の時 $L := H(\tilde{E})^{\otimes(j+2)} \otimes \pi^*(\tilde{\bar{L}}_2^{\otimes(k-4)})$ が numerically semi-positive で $c_1(L)^4[\mathbb{P}(\tilde{E})]$ が正であることを示す必要がある。$\bar{L}_2$ は ample であり $\pi^*(\tilde{\bar{L}}_2) = \pi^* s^*(\bar{L}_2)$ は $\bar{L}_2$ の引き戻しであるから numerically semi-positive である。故に $k\geq 4$ ならば $\pi^*(\tilde{\bar{L}}_2^{\otimes(k-4)})$ は numerically semi-positive である。従って $H(\tilde{E})$ が numerically semi-positive であることを示せば十分である。$k\geq 5$ の時，$c_1(L)^4[\mathbb{P}(\tilde{E})]$ が正であることは容易に示せるので，以下 $H(\tilde{E})$ が numerically semi-positive であることを示す。

$\mathcal{E}$ の $Sp(g, \mathbb{R})$ 不変計量から誘導される E の計量を h とし，h の曲率形式を Θ とする。

$$\det(1_2 + (i/2\pi)\Theta) = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2$$

とする。ただし ω_i は (i,i)-形式である。

h は Δ に沿って特異性を持っているので，$\tilde{E}$ の計量は定義しない。故に定理5の証明法

はここでは使えない。然し h は[7]の意味で $\widetilde{X}$ 上 "good" である。故に w_i は $\widetilde{X}$ 上局所積分可能で、current $[w_i]$ を定義する。$\widetilde{E}$ の全 chern class を $e_0+e_1+e_2$ とする時、current $[w_i]$ は e_i を表す([7])。Hirzebruch の比例原理は、この事実より直ちに証明される。h が "good" というのは、h が Δ に近づく時の増大度で定義される。

$\widetilde{E}^*$ を $\widetilde{E}$ の双対的 vector 束とする。$z \in X$ の時 $\widetilde{E}^*_z$ は $h^* = {}^t h^{-1}$ を計量として持つ。u が $\widetilde{E}^*_z$ の零でない元とする時 $\widetilde{h}(z, u) = {}^t\bar{u} h^* u$ で定義する。$\lambda \in \mathbb{C}^*$ に対して、$\widetilde{h}(z, \lambda u) = |\lambda|^2 \widetilde{h}(z, u)$ が成り立つ。$H(\widetilde{E})^*$ から零切断を除いたものは、$\widetilde{E}^*$ から零切断を除いたものと同型であるから、$\widetilde{h}$ は $H(\widetilde{E})^*|\pi^{-1}(X)$ の計量を定義する。この計量も $\widetilde{h}$ で表す。$\pi^{-1}(\Delta)$ を $\pi^{-1}(X)$ の境界と見なす。h^* は $Sp(2, \mathbb{R})$-不変な計量 $\hbar^* := {}^t(\mathrm{Im}\, z)^{-1}$ から誘導されるので、$\widetilde{h}$ は $P(\widetilde{E})$ 上で "good" であることは容易に見ることができる。ω を

$$\omega = (1/2\pi i)\, \partial\bar{\partial} \log \widetilde{h}(z, u)$$

で定義する。 これは $\mathbb{P}(\tilde{E})$ 上で局所積分可能で current $[\omega]$ は $H(\tilde{E})^*$ の first chern 類を表す。

C を compact 非特異曲線とし $f: C \to \mathbb{P}(\tilde{E})$ を正則写像とする。 $f^*H(\tilde{E})$ の次数が非負であることを示す。 先ず $f(C) \not\subset \pi^{-1}(\Delta)$ を仮定する。 $C^\circ = f^{-1}(\pi^{-1}(X))$ とする。 $C - C^\circ$ を C° の境界と見なす。 $f^*H(\tilde{E})^*|_{C^\circ}$ の計量 h_C を f による $\tilde{h}$ の引き戻しで定義する。 $\omega^{(P)}$ を X の Poincaré 計量とする ([7])。 $f^*\omega^{(P)}$ は C° の Poincaré 計量でおさえられることがわかるので、h_C は C 上の "good" な計量である。 従って

$$\omega_C := (1/2\pi i)\partial\bar{\partial}\log h_C \quad (= f^*\omega)$$

は C 上局所積分可能で、current $[\omega_C]$ は $f^*H(\tilde{E})^*$ の first chern class を表す。 従って

$$\deg f^*H(\tilde{E})^* = \int_{C^\circ} \omega_C$$

である。 命題 3 により、計量 h に関して、$\tilde{E}|_X \geq 0$ であるから、h^* に関して $\tilde{E}^*|_X \leq 0$ である。 故に $\tilde{h}$ に関して $H(\tilde{E})^*|_{\pi^{-1}(X)} \leq 0$ である ([3] 又は [6])。 これにより h_C に関して $f^*H(\tilde{E})^*|_{C^\circ} \leq 0$ である。 故に上の積分は非正であり、

$f^*H(\tilde{E})$ の次数は非負である。

次に $f(C) \subset \pi^{-1}(\Delta)$ の時を扱う。 D を $\pi\circ f(C)$ を含む Δ の既約因子（の一つ）とする。 この時次の vector 束の完全係列がある（東北大での話より）。

$$0 \to \tilde{L}_{2|D} \to \tilde{E}_{|D} \to \mathbb{C}_D \to 0 .$$

$\tilde{E}_{|D}$ が numerically semi-positive であることを示せばよい。 $\tilde{L}_{2|D}$ は numerically semi-positive であるから、これは次の定理から示される。

<u>定理 13</u>. X を非特異射影多様体とする。

$$0 \to E_1 \xrightarrow{\phi} E_2 \xrightarrow{\psi} E_3 \to 0$$

を X 上の vector 束の完全係列とする。 E_1 と E_3 が numerically semi-positive ならば、E_2 も numerically semi-positive である。

<u>証明</u>（藤田隆夫氏による。） X 上の vector 束 E が numerically semi-positive である為には、任意の compact 非特異曲線 C と、任意の正則写像 $f: C \to X$ と、任意の f^*E の商直線束 L に対して、L の次数が非負であることが必要十分である。 $f: C \to X$ を上の通り、L を X 上の直線束、θ:

$f^*E_2 \to L \to 0$ を完全系列とする。 $f^*\phi$ を f による ϕ の引き戻しとして、$\theta \circ f^*\phi$ を合成写像とする。 まず $\theta \circ f^*\phi$ が恒等的に零でない場合を考える。 $\theta \circ f^*\phi$ に層の間の写像：

$$\mathcal{O}(f^*E_1) \longrightarrow \mathcal{O}(L)$$

が対応する。 この像は C 上の或る因子 $R(\geq 0)$ によって $\mathcal{O}(L-R)$ と表わされる。 R に対応する直線束を $[R]$ で表わすと、写像：

$$f^*E_1 \to L \otimes [R]^{\otimes(-1)}$$

は全射である。 従って仮定より $L \otimes [R]^{\otimes(-1)}$ の次数は非負、よって L の次数は非負である。 若し $\theta \circ f^*\phi$ が恒等的に零ならば、θ は f^*E_3 を経由するので前と同様にして L の次数は非負である。

REFERENCES

[1] Calabi, E. and Vesentini, E., On compact, locally symmetric Kaehler manifolds. Ann. of Math., **71** (1960), 472-507.

[2] Cartan, H. et al., Séminaire Henri Cartan, 1957/1958, Fonctions Automorphes.

[3] Griffiths, P. A., Hermitian differential geometry, Chern classes and positive vector bundles. Global Analysis (Papers in Honor of K. Kodaira), 185-251. Univ. Tokyo Press, Tokyo 1969.

[4] Ise, M., Generalized automorphic forms and certain holomorphic vector bundles. Amer. J. Math., **86** (1964), 70-108.

[5] Kempf, G. et al., Toroidal Embeddings I. Lect. Notes in Math. 216. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1971.

[6] Kobayashi, S. and Ochiai, T., On complex manifolds with positive tangent bundles. J. Math. Soc. Japan, **22** (1970), 499-525.

[7] Mumford, D., Hirzebruch's proportionality theorem in the non-compact case. Invent. Math., **42** (1977), 239-272.

[8] Nakano, S., On complex analytic vector bundles. J. Math. Soc. Japan, **7** (1955), 1-12.

[9] Namikawa, Y., A new compactification of the Siegel space and degeneration of abelian varieties. I. II. Math. Ann., **221** (1976), 97-141, 201-241.

[10] Tsushima, R., On the spaces of Siegel cusp forms of degree two. Amer. J. Math., **104** (1982), 843-885.

[11] _______, An explicit dimension formula for the spaces of generalized automorphic forms with respect to Sp(2,**Z**). to appear in Proc. Japan Acad.

[12] _______, to appear.

[13] Yamazaki, T., On Siegel modular forms of degree two. Amer. J. Math., **98** (1976), 39-53.

[14] Kawamata, Y., A generalization of Kodaira-Ramanujam's vanishing theorem. Math. Ann., **261** (1982), 43-46.

[15] Viehweg, E., Vanishing theorems. J. Reine Angew. Math.