代数幾何学シンポジウム記録
1982年度　pp.149-162

Asymptotic Hodge structures

満渕 俊樹（阪大 教養）

代数曲面に於ては canonical ring の構造を調べることが非常に重要な課題のひとつであった。また、一般に $\pi: X \to S$ を代数多様体の smooth family とし、$\bigoplus_{m \geq 0} H^0(X_s, K_{X_s}^{\otimes m})$ の $s \in S$ が動くにつれての変化を調べることも意味があろう。一方、川又－Viehweg らにより ① 小平次元の加法性 ② canonical ring の変形 ③ Hodge 構造の変形 ④ birational Torelli problem などが相互に関係しあっていることが示されている。そこで我々は Gauss-Manin connection のある種の一般化によって Hodge 構造を少し拡張しておいて（それを、Asymptotic Hodge structure と呼ぼう）、そういった構造の変形というものを考えてみたい。以下、すべての variety は $\mathbb{C}$ 上定義されているとする。

§1. Absolute case.

n 次元非特異射影多様体 X に対し、
$K := \mathbb{C}(X)$, $K_{ab} :=$ maximal abelian extension of K
$\{K_\lambda ; \lambda \in \Lambda\} :=$ the set of all subfields K_λ of K_{ab} such that K_λ / K is a finite abelian extension.
$G_\lambda := Gal(K_\lambda / K)$ ······ とおく。
更に各 $\lambda \in \Lambda$ に対して、K_λ の非特異射影モデル X_λ を

1) G_λ acts regularly on X_λ ;
2) dominant rational map $\pi_\lambda : X_\lambda \to X$ induced by $K_\lambda \supseteq K$ is a morphism.

となるようにとる。今、X 上の hyperplane section に対応する Kähler form $L \in H^{1,1}(X)$ をひとつ固定し、

$$H^p_{prim}(X_\lambda ; \mathbb{Q}) := \left\{ \varphi \in H^p(X_\lambda ; \mathbb{Q}) ; \begin{array}{c} \varphi \cdot (\pi_\lambda^* L)^{n-p+1} = 0 \\ \text{in } H^{2n-p+2}(X_\lambda ; \mathbb{Q}) \end{array} \right\}$$

とおく。そして $H^0(X_\lambda, \pi_\lambda^* \Omega_X^p)$ (resp. $H^p_{prim}(X_\lambda ; \mathbb{Q})$, etc.) に positive definite Hermitian metric $(\ ,\ )_\lambda$ (resp. nondegenerate bilinear form $<\ ,\ >_\lambda$, etc.) を次のように定義する。

$\forall \omega_1, \omega_2 \in H^0(X_\lambda, \pi_\lambda^* \Omega_X^p)$,

$$(\omega_1, \omega_2)_\lambda := \frac{(\sqrt{-1})^{p^2}}{\deg \pi_\lambda} \int_{X_\lambda} \omega_1 \wedge \overline{\omega_2} \wedge L^{n-p}.$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{resp. } {}^\forall\varphi_1, \varphi_2 \in H^p_{prim}(X_\lambda; \mathbb{Q}), \\ \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_\lambda := \frac{1}{\deg \pi_\lambda} \int_{X_\lambda} \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge L^{n-p} \in \mathbb{Q} \end{array} \right).$$

さて各 $\lambda \in \Lambda$ に対し

$$E_\lambda := \{ x \in X_\lambda ;\ \dim \pi_\lambda^{-1}(x) > 0 \}$$

$$\Gamma_\lambda := \left\{ \gamma \in H_p(X_\lambda; \mathbb{Q}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \pi_{\lambda *}(\gamma) = 0 \text{ and } \gamma \text{ is} \\ \text{supported in } E_\lambda \end{array} \right\}$$

とおく。そして $H^p_{prim}(X_\lambda; \mathbb{Q})$ の $\mathbb{Q}$-vector subspace H^p_λ を

$$H^p_\lambda := \{ \varphi \in H^p_{prim}(X_\lambda; \mathbb{Q}) ;\ \varphi[\gamma] = 0 \quad {}^\forall\gamma \in \Gamma_\lambda \}$$

で定義する。このとき、H^p_λ は K_λ の model X_λ のとり方によらず、p と K_λ だけで unique にきまる。さて、もし $K_\mu \supset K_\lambda$ だとすれば、これは dominant rational map $\pi_{\lambda\mu} : X_\mu \to X_\lambda$ を induce する。今、$H^0(X_\lambda, \pi_\lambda^* \Omega^p_X)$, H^p_λ $(\lambda \in \Lambda)$ を問題にするので $\pi_{\lambda\mu}$ が morphism であると仮定する。(そうしてもよいことはあとですぐわかる。)

まず、

$$\pi^*_{\lambda\mu} : H^0(X_\lambda, \pi_\lambda^* \Omega^p_X) \hookrightarrow H^0(X_\mu, \pi_\mu^* \Omega^p_X)$$

$$\pi^*_{\lambda\mu} : H^p_\lambda \hookrightarrow H^p_\mu$$

が induce されることに注意する。しかも、

$$(\omega_1, \omega_2)_\lambda = (\pi^*_{\lambda\mu}(\omega_1), \pi^*_{\lambda\mu}(\omega_2))_\mu$$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_\lambda = \langle \pi^*_{\lambda\mu}(\varphi_1), \pi^*_{\lambda\mu}(\varphi_2) \rangle_\mu$$

が $\forall \omega_1, \omega_2 \in H^0(X_\lambda, \pi_\lambda^* \Omega_X^p)$, $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in H_\lambda^p$ に対して成りたつ。故に $\{(H^0(X_\lambda, \pi_\lambda^* \Omega_X^p), (\ ,\ )_\lambda); \lambda \in \Lambda\}$ (resp. $\{(H_\lambda^p, \langle\ ,\ \rangle_\lambda); \lambda \in \Lambda\}$) は inductive system of positive definite Hermitian metrics (resp. inductive system of nondegenerate $\mathbb{Q}$-bilinear forms) をなす。そこで、

$$H_\infty^{p,0}(X) := \varinjlim H^0(X_\lambda, \pi_\lambda^* \Omega_X^p)$$

$$H_\infty^p(X) := \varinjlim H_\lambda^p$$

とおくと、$H_\infty^{p,0}(X)$ は natural に $\mathbb{C}$ 上の pre-Hilbert space となっており、この内積を $(\ ,\ )$ と書くことにする。また $H_\infty^p(X)$ 上にも natural に nondegenerate $\mathbb{Q}$-bilinear form (これを $\langle\ ,\ \rangle$ であらわす) が定義されている。しかも

$$H_\infty^{p,0}(X) \hookrightarrow H_\infty^p(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

が $H^0(X_\lambda, \pi_\lambda^* \Omega_X^p) \subset H_\lambda^p \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ ($\because$ $H^p(X_\lambda, \mathbb{C})$ の Hodge 分解) から自然に induce される。

[注意] $\lambda \in \Lambda$ をひとつ fix する。このとき、

(1) $\forall g \in G_\lambda$, $(g^*\omega_1, g^*\omega_2) = (\omega_1, \omega_2)$ on $H_\infty^{p,0}(X)$

$\langle g^*\varphi_1, g^*\varphi_2 \rangle = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ on $H_\infty^p(X)$

(i.e., G_λ acts isometrically on $H_\infty^{p,0}(X)$ and $H_\infty^p(X)$.)

(2) G_λは有限可換群なので．$\mathcal{X}(G_\lambda) := gp.hom(G_\lambda, \mathbb{C}^*)$ とおき　$F_\chi := \{\omega \in H^0(X_\lambda, \pi_\lambda^*\Omega_X^p)\,;\ g\cdot\omega = \chi(g)\omega,\ {}^\forall g \in G_\lambda\}$，$\tilde{F}_\chi := \{\varphi \in H^p_\lambda \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}\,;\ g\cdot\varphi = \chi(g)\varphi,\ {}^\forall g \in G_\lambda\}$ とおくと．

$$H^0(X_\lambda, \pi_\lambda^*\Omega_X^p) = \bigoplus_{\chi \in \mathcal{X}(G_\lambda)} F_\chi, \qquad H^p_\lambda \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = \bigoplus_{\chi \in \mathcal{X}(G_\lambda)} \tilde{F}_\chi,$$

但し．$F_\chi = 0$ や $\tilde{F}_\chi = 0$ となる χ もあり得るものとする。

(もっと一般に $G = Gal(K_{ab}/K) = \varprojlim G_\lambda$ とおいたとき $H^{p,0}_\infty(X) = \bigoplus_{\chi \in \mathcal{X}(G)} F_\chi^\infty$，$(\dim F_\chi^\infty < +\infty,\ {}^\forall\chi)$
where $F_\chi^\infty = \{\omega \in H^{p,0}_\infty(X)\,;\ g\cdot\omega = \chi(g)\omega,\ {}^\forall g \in G\}$
などが成りたつ。)

(3) $\chi \neq \chi' \Rightarrow F_\chi \perp F_{\chi'}$

さて ${}^\forall\chi \in \mathcal{X}(G_\lambda)$ に対し．$m_\chi := \mathrm{Min}\{m \in \mathbb{Z}\,;\ m > 0 \text{ and } \chi^m = 1\}$，$W_\chi := S^{m_\chi}(F_\chi)$，$\widetilde{W_\chi} := S^{m_\chi}(\tilde{F}_\chi)$ とおく。そして

$R_\lambda :=$ ($\bigoplus_{m \geq 0} S^m(H^0(X_\lambda, \pi_\lambda^*\Omega_X^p))$ の $\mathbb{C}$-subalgebra で $\{W_\chi\,;\ \chi \in \mathcal{X}(G_\lambda)\}$ によって生成されるもの)

$$\widetilde{R}_\lambda := \left(\begin{array}{l} \bigoplus_{m\geq 0} S^m(H_\lambda^p \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}) \text{ の } \mathbb{C}\text{-subalgebra で} \\ \{\widetilde{W}_\chi \,;\, \chi \in \mathcal{X}(G_\lambda)\} \text{ によって生成} \\ \text{されるもの} \end{array} \right)$$

とおく。このとき

$$\begin{array}{ccc} \left(\bigoplus_{m\geq 0} S^m H^0(X_\lambda, \pi_\lambda^* \Omega_X^p)\right)^{G_\lambda} & \longrightarrow & \left(\bigoplus_{m\geq 0} H^0(X_\lambda, \pi_\lambda^* S^m(\Omega_X^p))\right)^{G_\lambda} \\ & & \| \\ & & \bigoplus_{m\geq 0} H^0(X_\lambda, \pi_\lambda^* S^m(\Omega_X^p))^{G_\lambda} \\ & & \wr\| \\ & & \bigoplus_{m\geq 0} H^0(X, S^m(\Omega_X^p)) \end{array}$$

なる natural map が

$$R_\lambda \xrightarrow{h_\lambda} \bigoplus_{m\geq 0} H^0(X, S^m(\Omega_X^p))$$

なる natural $\mathbb{C}$-algebra homomorphism を induce する。

$K_\mu \supseteq K_\lambda$ に対しては、

$$\begin{tikzcd} R_\lambda \arrow[dr, "h_\lambda"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \\ R_\mu \arrow[r, "h_\mu"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & \bigoplus_{m\geq 0} H^0(X, S^m(\Omega_X^p)) \end{tikzcd}$$

なる commutative diagram が成りたつことから、

$$h : \varinjlim_\lambda R_\lambda \to \bigoplus_{m\geq 0} H^0(X, K_X^{\otimes m})$$

($\mathbb{C}$-algebra hom) を得る。以下簡単のため $p = n (:= \dim X)$ と仮定する。大切な事実は、

Proposition 1:

$$\varinjlim_{\lambda} R_\lambda \xrightarrow{h} \bigoplus_{m\geq 0} H^0(X, K_X^{\otimes m}) \quad (\text{surjective}).$$

これは $R_\lambda = \bigoplus_{m\geq 0} R_\lambda^{(m)}$ (where $R_\lambda^{(m)} \subseteq S^m H^0(X_\lambda, \pi_\lambda^* K_X)$)

$$h_\lambda^{(m)} := h_\lambda |_{R_\lambda^{(m)}} : R_\lambda^{(m)} \longrightarrow H^0(X, K_X^{\otimes m})$$

とおくと、

$$\forall m \in \mathbb{Z}_+,\ \exists \lambda \in \Lambda \text{ s.t. } h_\lambda^{(m)} \text{ is surjective}$$

を意味している。そこで $m \in \mathbb{Z}_+$ をひとつ fix し、$\lambda \in \Lambda$ を $h_\lambda^{(m)}$ が surjective になるようなものだとしよう。このとき、$H^0(X_\lambda, \pi_\lambda^* K_X)$ の natural Hermitian metric $(\ ,\ )_\lambda$ が $S^m H^0(X_\lambda, \pi_\lambda^* K_X)$ 従って $R_\lambda^{(m)}$ の natural Hermitian metric を induce する。従って、$H^0(X, K_X^{\otimes m})$ と $(\mathrm{Ker}\, h_\lambda^{(m)})^\perp$ を同一視することによって $H^0(X, K_X^{\otimes m})$ に Hermitian metric (これも $(\ ,\ )_\lambda$ で表わすことにする) が定義される。この metric から定義される norm を $\|\ \|_\lambda$ で表わすと

$$\forall \omega \in H^0(X, K_X^{\otimes m}),\quad \|\omega\|_\lambda = \min_{u \in R_\lambda^{(m)};\ h_\lambda^{(m)}(u) = \omega} \|u\|_\lambda$$

が成りたっている。但し、ここで $\|u\|_\lambda$ とは、u の $R_\lambda^{(m)}$ における natural Hermitian norm を意味するものとする。さて次頁で λ を動かして考える。

$$R^{(m)}_{\infty} := \varinjlim_{\lambda} R^{(m)}_{\lambda}, \quad h^{(m)} := h|_{R^{(m)}_{\infty}} : R^{(m)}_{\infty} \to H^0(X, K_X^{\otimes m})$$

とおき、$R^{(m)}_{\infty}$ を completion して得られる Hilbert space を $\overline{R^{(m)}_{\infty}}$ で表わす。$\mathrm{Ker}\, h^{(m)}$ の $\overline{R^{(m)}_{\infty}}$ における閉包を $\overline{\mathrm{Ker}\, h^{(m)}}$ で表わすと、$\overline{R^{(m)}_{\infty}} = \overline{\mathrm{Ker}\, h^{(m)}} \oplus \left(\overline{\mathrm{Ker}\, h^{(m)}}\right)^{\perp}$ と分解する。そこで $pr_2 : \overline{R^{(m)}_{\infty}} \to \left(\overline{\mathrm{Ker}\, h^{(m)}}\right)^{\perp}$ を natural projection とすると、$\mathbb{C}$-linear map

$$\begin{array}{rccl} \eta_m : & H^0(X, K_X^{\otimes m}) & \longrightarrow & \left(\overline{\mathrm{Ker}\, h^{(m)}}\right)^{\perp} \quad \left(\subseteq \overline{R^{(m)}_{\infty}}\right) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \omega & \longmapsto & pr_2\left(h^{(m)-1}(\omega)\right) \end{array}$$

が定義される。$\forall \omega, \omega_1, \omega_2 \in H^0(X, K_X^{\otimes m})$ に対し、

$$\left.\begin{array}{l} \|\omega\|_{\infty} := \|\eta_m(\omega)\| \\ (\omega_1, \omega_2)_{\infty} := (\eta_m(\omega_1), \eta_m(\omega_2)) \end{array}\right\}$$

とおく。このとき

$$\|\omega\|_{\infty} = \inf_{\lambda} \|\omega\|_{\lambda} = \inf_{u \in R^{(m)}_{\infty};\, h^{(m)}(u) = \omega} \|u\|$$

が成りたっている。

<u>Proposition 2</u>: $\mathrm{Ker}\, h^{(m)}$ が $R^{(m)}_{\infty}$ の closed subspace ならば(よって $h^{(m)}$ が bounded linear map ならばこの条件はみたされているが)、η_m は単射。(よって特に $(\ ,\ )_{\infty}$ は $H^0(X, K_X^{\otimes m})$ の positive definite Hermitian metric を、$\mathrm{Ker}\, h^{(m)}$ の closedness の条件下で、

定義している。)

注意[1]. $\kappa(X)=0$ ならば $\dim R_\infty^{(m)}=0$ or 1 なので、$\mathrm{Ker}\, h^{(m)}=\{0\}$. 故に $(\ ,\ )_\infty$ は $H^0(X, K_X^{\otimes m})$ の positive definite Hermitian metric を定義している。しかし、一般の X に対しては、残念ながら、$(\ ,\ )_\infty$ が $H^0(X, K_X^{\otimes m})$ のどのような Hermitian form を定義しているか、よくわからない。

[2] 以上の議論は、K の abelian extension だけに制限する必要はなく、K の Galois 拡大全体をとっても可能である。

[3] 以上の議論は、X を projective variety に限る必要はなく、たとえば X が open variety や、bounded domain などの場合でも、L^2-integrable etc. の条件をつけ加えたり、ある程度の修正を施すことによって、かなりの事が同様にできる。

§2. Relative case.

X, S を非特異射影多様体とし、$f: X \to S$

を surjective morphism with irreducible general fibres とする。 $K = \mathbb{C}(X)$, $k = \mathbb{C}(S)$, $n = \dim X - \dim S$ とし、 $\{ K_\lambda ; \lambda \in \Lambda \}$:= the set of subfields K_λ of K_{ab} s.t. K_λ / K is a finite abelian extension とおく。更に、各 $\lambda \in \Lambda$ に対し、 k_λ := (algebraic closure of k in K_λ) とすると、 k_λ / k は finite abelian extension となっている。 $H_\lambda := Gal(K_\lambda / K)$, $\overline{H}_\lambda := Gal(k_\lambda / k)$ とし、 K_λ の非特異射影モデル X_λ と、 k_λ の非特異射影モデル S_λ を次の様に選ぶ。即ち

① H_λ (resp. $\overline{H}_\lambda$) acts regularly on X_λ (resp. S_λ) ;

② $\exists$ commutative diagram of surjective morphisms

$$\begin{tikzcd} X_\lambda \arrow[r, "\pi_\lambda"] \arrow[d, "\rho_\lambda"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X \arrow[d, "\rho"] \\ S_\lambda \arrow[r, "\bar{\pi}_\lambda"] & S , \end{tikzcd}$$

が成りたつようにする。このとき

$\exists$ natural homomorphism $\nu : \begin{array}{ccc} H_\lambda & \twoheadrightarrow & \overline{H}_\lambda \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ h & \longmapsto & \bar{h} \end{array}$

such that $\begin{tikzcd} X_\lambda \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\rho_\lambda"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X_\lambda \arrow[d, "\rho_\lambda"] \\ S_\lambda \arrow[r, "\bar{h}"] & S_\lambda \end{tikzcd}$ commutes for $\forall h \in H_\lambda$

and that $G_\lambda (:= \operatorname{Ker} \nu) = \{ h \in H_\lambda \mid h$ fibrewise acts on $X_\lambda / S_\lambda \}$.

今 $\lambda \in \Lambda$ をひとつ fix する。S_λ の Zariski open dense subset S_λ^0 を適当にとって

1) ρ_λ is smooth over S_λ^0,

2) $\forall \tilde{s} \in S_\lambda^0$, $R^n\rho_{\lambda *}(\mathbb{C}) \otimes_{\mathcal{O}_{S_\lambda, \tilde{s}}} \mathbb{C} = H^n((X_\lambda)_{\tilde{s}}, \mathbb{C})$ and

$$\rho_{\lambda *}(\pi_\lambda^* \omega_{X/S}) \otimes_{\mathcal{O}_{S_\lambda, \tilde{s}}} \mathbb{C} = H^0((X_\lambda)_{\tilde{s}}, \pi_\lambda^* K_{X_s})$$

(where $s = \bar{\pi}_\lambda(\tilde{s})$)

となるようにできる。以下、$R^n\rho_{\lambda *}(\mathbb{C})$, $\rho_{\lambda *}(\pi_\lambda^* \omega_{X/S})$ などの sheaf は、すべて S_λ^0 の上に制限して考えることにし、しかも S_λ^0 は必要とあらば、適宜小さくとり直すことにする。さて、§1 で $H^n(X_\lambda, \mathbb{C})$ の subspace として $H_\lambda^n \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ を考えたが、$\pi_\lambda : X_\lambda \to X$ のかわりに、$\tilde{s} \in S_\lambda^0$ を任意にとってきて、$\pi_\lambda|(X_\lambda)_{\tilde{s}} : (X_\lambda)_{\tilde{s}} \to X_s$ (where $s = \bar{\pi}_\lambda(\tilde{s})$) を考え、そして $H^n((X_\lambda)_{\tilde{s}}, \mathbb{C})$ の subspace として、上の $H_\lambda^n \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ にあたるものを得る。こういった $H^n((X_\lambda)_{\tilde{s}}, \mathbb{C})$ の subspace を $\tilde{s} \in S_\lambda^0$ を動かすことによって S_λ^0 上の sheaf につなげたものを $\mathcal{H}_\lambda^n$ と書くことにする(もちろんこれは $R^n\rho_{\lambda *}(\mathbb{C})$ の subsheaf となっている)。G_λ ($= \mathrm{Ker}\,\nu$) が $\mathcal{H}_\lambda^n$ や $\rho_{\lambda *}(\pi_\lambda^* \omega_{X/S})$ などの sheaf に act していることに注意して、§1

と同様の議論によって

$$\mathcal{H}^n_\lambda = \bigoplus_{\chi\in X(G_\lambda)} \widetilde{\mathcal{F}}_\chi \ , \qquad \rho_{\lambda *}(\pi_\lambda^{*}\omega_{X/S}) = \bigoplus_{\chi\in X(G_\lambda)} \mathcal{F}_\chi$$

と分解する。（そして、各 $\hat{s}\in S^{o}_\lambda$ 上の fibre 毎に §1 の注意(2)における $H^0((X_\lambda)_{\hat{s}}, \pi_\lambda^{*}K_{X_s})$ (where $s=\pi_\lambda(\hat{s})$) 等の分解が対応している。）そこで、

$$\widetilde{w}_\chi := S^{m_\chi}(\widetilde{\mathcal{F}}_\chi) \ , \qquad w_\chi := S^{m_\chi}(\mathcal{F}_\chi),$$

$$\widetilde{\mathcal{R}}_\lambda := \left(\begin{array}{l} \bigoplus_{m\geq 0} S^m(\mathcal{H}^n_\lambda) \text{ の } \mathcal{O}_{X^o_\lambda}\text{-subalgebra で} \\ \{\widetilde{w}_\chi \, ; \, \chi\in X(G_\lambda)\} \text{ で生成されるもの} \end{array} \right),$$

$$\mathcal{R}_\lambda := \left(\begin{array}{l} \bigoplus_{m\geq 0} S^m(\rho_{\lambda *}(\pi_\lambda^{*}\omega_{X/S})) \text{ の } \mathcal{O}_{X^o_\lambda}\text{-subalgebra で} \\ \{w_\chi \, ; \, \chi\in X(G_\lambda)\} \text{ で生成されるもの} \end{array} \right),$$

とおく。（但し、$X^o_\lambda = \rho_\lambda^{-1}(S^o_\lambda)$ とする）。このとき、§1 の proposition 1 と同様にして、

<u>Proposition</u> 3 :

$$\varinjlim_{\lambda} \mathcal{R}_\lambda \twoheadrightarrow \bigoplus_{m\geq 0} \overline{\pi}_\lambda^{*}(\rho_{*}(\omega_{X/S}^{\otimes m})) \quad (\text{surjective})$$

(over Zariski open subset of S_λ).

を得る。さて、$\widetilde{\mathcal{R}}_\lambda = \bigoplus_{m\geq 0} \widetilde{\mathcal{R}}^{(m)}_\lambda$, $\mathcal{R}_\lambda = \bigoplus_{m\geq 0} \mathcal{R}^{(m)}_\lambda$, (where $\widetilde{\mathcal{R}}^{(m)}_\lambda \subseteq S^m(\mathcal{H}^n_\lambda)$, $\mathcal{R}^{(m)}_\lambda \subseteq S^m(\rho_{\lambda *}(\pi_\lambda^{*}\omega_{X/S}))$) とおく。

このとき proposition 3 は、各 $m \in \mathbb{Z}_+$ に対し、$\exists \lambda \in \Lambda$ が存在して、$\mathcal{R}_\lambda^{(m)} \xrightarrow{h_\lambda^{(m)}} \overline{\pi}_\lambda^*(\rho_*(\omega_{X/S}^{\otimes m}))$ が surjective になるということを意味している。こういった $\lambda \in \Lambda$ に対して、$\overline{\pi}_\lambda^*(\rho_*(\omega_{X/S}^{\otimes m}))$ によって $\rho_*(\omega_{X/S}^{\otimes m})$ に Hermitian metric が、$\overline{\pi}_\lambda^*(\rho_*(\omega_{X/S}^{\otimes m}))$ と $(\mathrm{Ker}\, h_\lambda^{(m)})^\perp$ の同一視によって、定義される。(これを $(\ ,\ )_\lambda$ で表わす).

<u>Proposition</u> 4: $\widetilde{\mathcal{R}}_\lambda$ は natural な Hermitian metric によって flat な vector bundle と思うことができる。しかも $\mathbb{Q}$-structure をもっている。

即ち $\widetilde{\mathcal{R}}_\lambda$ は variation of Hodge structures の total vector bundle $H_\mathbb{C}$ と同じようなものになっていることがわかる。更に、

<u>Theorem</u> : $^\forall m \in \mathbb{Z}_+$, K_λ を十分大きくとれば、
$\rho_*(\omega_{X/S}^{\otimes m})$ が flat over Zariski open dense subset of S (in terms of the metric $(\ ,\ )_\lambda$ defined above)
$\Longrightarrow$ Canonical ring $\bigoplus_{m \geq 0} H^0(X_s, K_{X_s}^{\otimes m})$ は $s \in S$ を S の Zariski open set 上で動かしたとき動かない。

定理の statement が非常に不正確なので、説明をつけ加えておく。$\widetilde{\mathcal{R}}_\lambda^{(m)} \supseteq \mathcal{R}_\lambda^{(m)}$ の inclusion によって、Variation of Hodge structures における $F^0(=H_{\mathbb{C}}) \supseteq F^n$ の場合と同様に、$\mathcal{R}_\lambda^{(m)}$ にある種の semi-positivity が定義される。ところが、prop. 3 により、$\mathcal{R}_\lambda^{(m)} \xrightarrow{h_\lambda^{(m)}} \pi_\lambda^*(\rho_*(\omega_{X/S}^{\otimes m}))$ なので、$\pi_\lambda^*(\rho_*(\omega_{X/S}^{\otimes m}))$ はさらに増加した semipositivity をもつ。この場合の semi-positivity の増加分は、canonical ring $\bigoplus_{m\geq 0} H^0(X_s, K_{X_s}^{\otimes m})$ が $s\in S$ が動くにつれて変化していけばいくほど増える（即ち $\mathrm{Ker}\, h_\lambda^{(m)}$ が $\mathcal{R}_\lambda^{(m)}$ の中で動きまわればまわるほど増える）わけである。ところが $\rho_*(\omega_{X/S}^{\otimes m})$ が flat であるから、$\mathrm{Ker}\, h_\lambda^{(m)}$ (relation) は constant、即ち、$\bigoplus_{m\geq 0} H^0(X_s, K_{X_s}^{\otimes m})$ も $s\in S$ が動いても動かないことがわかる。

注意：各 $s\in S^0$ に対し、X_s が general type であれば、（但し S^0 は S の Zariski open dense subset）、$\rho_*(\omega_{X/S}^{\otimes m})$ の flatness が X_s が birational には動かないことを imply している（birational Torelli）。以上、詳しいことは "Asymptotic Hodge structures"（準備中の論文）を見て下さい。