代数幾何学シンポジウム記録
1982年度 pp.103-131

射影代数曲線の種数

(L. Gruson と C. Peskine の仕事)

Robin Hartshorne (カリフォルニア大
京大数理研)

§0. 序

任意標数の代数閉体 k 上の 3 次元射影空間を $\mathbb{P}^3$ とし，$\mathbb{P}^3$ の中の連結非特異代数曲線を C とする。曲線 C に付随して、その種数 $g = \dim H^1(C, \mathcal{O}_C)$ とその次数 $d = \deg \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \otimes \mathcal{O}_C$ が定まる。19 世紀中葉から，射影代数曲線を分類する問題が考えられている（その一般論については [4, ch.IV, §6] 及び [5] を参照）。特に，どのような組 $\langle d, g \rangle$ に，次数 d と種数 g の $\mathbb{P}^3$ 内の曲線 C が存在するかが問題になる。その解答は次の定理で与えられる。

<u>定理 0.1.</u> C を $\mathbb{P}^3$ 内の次数 $d > 0$ の連結非特異曲線とする。

(a) C が平面曲線ならば，

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) ,$$

かつ任意の $d > 0$ について，そのような曲線

Cが存在する。

(b) Cが2次超曲面Qに含まれるならば，整数 $a, b \geqslant 0$ が存在して，$d = a+b$，$g = (a-1)(b-1)$ となり，かつ，任意の $a, b > 0$ について，そのような曲線Cは存在する。

(c) Cが2次超曲面に含まれなければ，

$$0 \leq g \leqslant \frac{1}{6}d(d-3) + 1 .$$

(d) (c)の不等式を充たす任意の d と g について，次数 d と種数 g の連結非特異曲線Cが存在する。

定理(a)と(b)は古典的結果で証明は容易である（例えば，[4, ch III, §6] を参照）。Cは Halphen [3] の結果で，Gruson と Peskine [6] が新証明を与えた。一番難しいのは定理(d)の存在証明である。Halphen は，その論文 [3] の最も難解な部分で，(d)の曲線を3次超曲面上に構成したと主張した。Gruson と Peskine の最近の仕事によれば，$d \geqslant 10$ と不等式(c)を充たす g で，3次曲面（例えば特異3次曲面を許したとしても）上の曲線の次数と種数にならないものが存在す

る。その最初の gap は $\langle d, g\rangle = \langle 10, 1\rangle$ である。従って Halphen の証明は間違っていることになる。

本稿の目的は，上述の存在定理(d)の，Gruson と Peskine [7] の最近の新証明を紹介することである。即ち，次の2定理を証明する。

<u>定理 0.2.</u> 不等式

$$\frac{1}{\sqrt{3}} d^{3/2} - d + 1 < g \leq \frac{1}{6} d(d-3) + 1$$

を充たす，任意の $d > 0$ と g について，$\mathbb{P}^3$ の非特異3次曲面上の連結非特異曲線，次数 d と種数 g をもつものが存在する。

<u>定理 0.3.</u> 不等式

$$0 \leq g \leq \frac{1}{8}(d-1)^2$$

を充たす，任意の $d > 0$ と g について，$\mathbb{P}^3$ 内の double line をもつ特異有理4次曲面上の連結非特異曲線で，次数 d と種数 g をもつものが存在する。

$d \geq 4$ ならば，$0 \leq g \leq \frac{1}{6}d(d-3) + 1$ を充たす g は (0.2) 又は (0.3) の不等式を充たすので，上記の結果は存在定理 (0.1, d) を与える。2つの

場合とも，$\mathbb{P}^2$ 上の点を blow up して得られる有理曲面上の曲線を研究して証明される。望ましい次数と種数を得るためには，$\mathbb{Z}$ 上の2次形式で表わされる整数に関する結果が必要である。定理(0.2)と(0.3)は§1，§3で証明する。2次形式に関する必要な結果は§2，§4で与える。§5では標数 $p>0$ の場合に，Gruson と Peskine の証明で使う"Bertini 型"の定理を与える。

Gruson と Peskine [7] は，特異3次曲面上の曲線を調べて，$\mathbb{P}^3$ 内の曲線がなす Hilbert スキームの既約成分で被約でない例を構成しているが，本稿ではそれには触れない。

§1. 3次曲面上の曲線

本節で定理(0.2)を証明する。$\mathbb{P}^3$ の非特異3次曲面 X は $\mathbb{P}^2$ 内の一般の位置にある6点 $P_1, \ldots P_6$ を blow up して得られ，$\mathbb{P}^2$ の6点 P_i を通る3次曲線がなす線形束で $\mathbb{P}^3$ に埋め込まれる(例えば [4, ch.V, §4]を参照)。$\pi : X \to \mathbb{P}^2$ で blowing up，$\ell \in \mathrm{Pic}(X)$ で $\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ の類，$e_i \in \mathrm{Pic}(X)$ で例外

曲線 $\pi^{-1}(P_i)$，$i=1,\ldots,6$ の類を表わす。$\mathrm{Pic}(X)$ の底として $\ell, -e_1, \ldots, -e_6$ を取れるので，$(a; b_1, \ldots, b_6)$ で類 $a\ell - \sum b_i e_i$，$a, b_1, \ldots, b_6 \in \mathbb{Z}$，を表わす。

[4, V, 4.12 と Ex. 4.8] により，$a, b_1, \ldots, b_6 \in \mathbb{Z}$ が

$$(1) \quad \begin{aligned} &a \geqslant b_1 + b_2 + b_3 \\ &b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_6 \geqslant 0 \end{aligned}$$

(但し $(a; b_1, \ldots, b_6) \neq (n; n, 0, \ldots, 0)$，$n > 1$)

を充たすならば，類 $(a; b_1, \ldots, b_6)$ は

$$(2) \quad \begin{aligned} d &= 3a - \sum b_i \\ g &= \frac{1}{2}\left(a^2 - \sum b_i^2 - d\right) + 1 \end{aligned}$$

をそれぞれ次数と種数にもつ非特異既約曲線で代表されることが判っている。

故に，望ましい値 d と g がすべて上の式から得られることは，純算術的に示される。

先ず，任意の元 $(a; b_1, \ldots, b_6) \in \mathrm{Pic}\,X$ について，

$$(3) \quad \begin{aligned} r &= a - b_1 \\ \alpha_i &= \frac{1}{2}r - b_i, \qquad i = 2, \ldots, 6 \end{aligned}$$

とおく。すると，$r \in \mathbb{Z}$ で $\alpha_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$。変数 a, $b_1, \ldots, b_6$ の代わりに $d, r, \alpha_2, \ldots, \alpha_6$ をとる。すると，

$$(4)\quad \begin{aligned} a &= \tfrac{1}{2}\left(d + \tfrac{3}{2}r - \Sigma\alpha_i\right) \\ b_1 &= a - r \\ b_i &= \tfrac{1}{2}r - \alpha_i , \qquad i = 2, \ldots, 6 \end{aligned}$$

$a, b_i \in \mathbb{Z}$ となるために、

$$(5)\quad \begin{aligned} \alpha_i &\equiv \tfrac{1}{2}r \quad (\mathrm{mod}\ 1), \qquad i = 2, \ldots, 6 \\ d + \tfrac{3}{2}r - \Sigma\alpha_i &\equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ 2) \end{aligned}$$

と仮定する。他方，不等式 (1) は

$$(6)\quad \begin{aligned} &|\alpha_2| \leqq \alpha_3 \leqq \cdots \leqq \alpha_6 \leqq \tfrac{1}{2}r \\ &-\alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_6 \leqq d - \tfrac{3}{2}r \end{aligned}$$

といいかえられる。最後に，種数 g は

$$g = \tfrac{1}{2}\left((r-1)d - \tfrac{3}{4}r^2 - \Sigma\alpha_i^2\right) + 1$$

と書けるので，

$$F_d(r) = \tfrac{1}{2}\left((r-1)d - \tfrac{3}{4}r^2\right) + 1$$

と置けば

$$(7)\quad g = F_d(r) - \tfrac{1}{2}\Sigma\alpha_i^2$$

となる。

故に，問題は，d を与えて，望ましい種数 g を公式 (7) で与えるように，合同式 (5) 及び不等式 (6) を充たす整数 r と半整数 α_i を見付けることである。関数 $F_d(r)$ は $r = \frac{2}{3}d$ で極大値

$F_d(\frac{2}{3}d) = \frac{1}{6}d(d-3)+1$ をとる。$d \equiv 0 \pmod 3$ ならば，$\alpha_i = 0$, $i = 2, \ldots, 6$ とおけば，極大値が得られる。区間 $(F_d(r-1), F_d(r)]$ にある g については，divisor の存在は5平方の和 $\sum \alpha_i^2$ の問題に帰着される。即ち次の結果がある。

補題 1.1. $d > 0$ を整数，r を

$$\frac{2}{\sqrt{3}}d - \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{2}{3}d$$

を充たす整数，g を

$$F_d(r-1) < g \leq F_d(r)$$

を充たす整数とする。すると(5)と(6)を充たす $\alpha_i \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $i = 2, \ldots, 6$, が存在して，g は式(7)で与えられる。

証明 $$F_d(r) - F_d(r-1) = \frac{1}{2}(d - \frac{3}{2}r + \frac{3}{4})$$

に注意すれば，

$$F_d(r) - g < \frac{1}{2}(d - \frac{3}{2}r + \frac{3}{4})$$

を得る。

$$F_d(r) - g = \frac{1}{2}\sum \alpha_i^2$$

と表わしたいのであるが，r の偶奇によって２つの場合に分ける。

r が偶数ならば，$F_d(r) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ となり，$n = 2(F_d(r) - g)$

は整数。$n=\sum\alpha_i^2$ となる α_i で $|\alpha_i|\leq\frac{1}{2}r$ となるものを求める。仮定により $n<d-\frac{3}{2}r+\frac{3}{4}$ 。他方 $\frac{2}{\sqrt{3}}d-\frac{1}{3}\leq r$ だから，$n<\frac{3}{4}r^2-r+\frac{5}{6}$ 。すると，後で述べる命題(2.1)により，α_i, $i=2,\ldots,6$ で，$|\alpha_i|\leq\frac{1}{2}r$, $n=\sum\alpha_i^2$ を充たすものが存在する。

ここで，合同式(5)と不等式(6)が充たされることを見る。g は整数だから，

$$(r-1)d-\frac{3}{4}r^2-\sum\alpha_i^2\equiv 0 \pmod 2 .$$

故に

$$d+\frac{3}{4}r-\sum\alpha_i\equiv 0 \pmod 2 。$$

α_i の添字づけと正負を入れかえれば，(6)の最初の不等式が成立する。ここで

$$\sum\alpha_i^2=n\leq d-\frac{3}{2}r+\frac{3}{4}$$

だから，明らかに

$$-\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_6\leq d-\frac{3}{2}r 。$$

さて，r が奇数であるとしよう。そのとき $F_d(r)\in\frac{1}{8}\mathbb{Z}$ 。$n=8(F_d(r)-g)$ とおいて，奇数 $x_i=2\alpha_i$, $|x_i|\leq r$ で $n=\sum_{i=2}^{6}x_i^2$ と表わそう。直ちに，$n\equiv 5 \pmod 8$ が分かる。他方，仮定から上記のようにして，$n<3r^2-4r+\frac{10}{3}$ 。後述の系(2.2)から，

奇整数 x_i, $|x_i| \leq r$, が存在して $n = \sum x_i^2$。
$\alpha_i = \frac{1}{2}x_i$ とおく。(6) の最初の不等式により, α_i の順序と $\alpha_3, \ldots, \alpha_6$ の符号が定まる。α_2 の符号は (5) の2番目の合同式により定まる。(6) の2番目の不等式, 即ち

$$-x_2 + x_3 + \cdots + x_6 \leq 2d - 3r$$

を確かめればよい。$n < 4d - 6r + 3$ で $n \equiv 5 \pmod 8$ だから, $n \leq 4d - 6r - 1$。他方, $n = \sum x_i^2$。従って

$$-x_2 + x_3 + \cdots + x_6 \leq \frac{1}{2}\sum x_i^2 + \frac{1}{2}$$

を示せば十分である。この式は

$$(x_2+1)^2 + \sum_{i=3}^{6}(x_i - 1)^2 - 4 \geqq 0$$

ともかける。x_i がすべて奇数だから, $(x_2, \ldots, x_6) = (-1, 1, \ldots, 1)$ を除いて, 上式は正しい。この場合でも, $2d - 3r = 1$ 又は 3 となる場合を除いて,

$$-x_2 + x_3 + \cdots + x_6 \leq 2d - 3r$$

が成立する。$2d - 3r = 1$ ならば, $n \leq 4d - 6r + 1$ となる $n \equiv 5 \pmod 8$ は存在しない。$2d - 3r = 3$ ならば, (5) の2番目の合同式は成立しない。
補題の証明終。

<u>定理 (0.2) の証明</u> $d > 0$ として, r_0 を

$r_0 \geqq \frac{2}{\sqrt{3}}d - \frac{1}{3}$ を充たす最小の整数とする。補題(1.1)により,

$$F_d(r-1) < g \leqq \frac{1}{6}d(d-3)+1$$

を充たす任意整数 g について, $\mathbb{P}^3$ の非特異3次曲面上に, 次数 d と種数 g をもつ既約非特異曲線が存在する。 $\rho = \frac{2}{\sqrt{3}}d + 1$ とおけば, $\rho > r_0$ で, 上記 g は

$$F_d(\rho-1) < g \leqq \frac{1}{6}d(d-3) + 1$$

を充たす。 $F_d(\rho-1) = \frac{1}{\sqrt{3}}d^{3/2} - d + 1$ だから, 定理が証明された。

<u>注意</u>. (1) 定理(0.2)における g の下限は最良のものではない。 g の gap のばらつきは大変不規則なので, g の gap の最大値を得る公式を見出すことは望めない。しかし Gruson と Peskine は, d が大きいとき, g の gap の最大値は $\frac{1}{\sqrt{5}}d^{3/2} + O(d^{5/4})$ の order であることを示した。

(2). Gruson と Peskine [7] は補題(1.1)の逆を与えている。それによって, 次数 d を与えると $0 \leqq g \leqq \frac{1}{6}d(d-3)+1$ を充たす g の値で種数の

gap となるもの，即ち3次曲面X上の曲線の種数とならないもののリストを計算できる。同時に，彼等は，特異3次曲面上の非特異曲線の次数と種数になる $\langle d, g\rangle$ は非特異3次曲面上のそれになることを示している。

§2. 5平方数の和

命題 2.1　$k>0$ を整数とすると，$n<3k^2-2k+3$ を充たすすべての正整数 n は5平方数の和

$n=\sum_{i=1}^{5} x_i^2$，　x_i：整数，$|x_i|\leq k$，とかける。

証明に Gauss の定理 [8, p.79] を使う。即ち，正整数 n が3平方数の和とかける必要十分条件は $n=4^a(8b-1)$，$a, b\in\mathbb{Z}$，とかけないことである。

先ず，$n<(k+1)^2$ と仮定する。n が3平方数の和 $n=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ ならば，任意の i について $|x_i|\leq k$ となり，証明は終る。n が3平方数の和と書けなければ，$n=4^a m$，$m\equiv 7 \pmod 8$ とかけ，$m-1$ は3平方数の和。故に n は4平方数の和 $n=\sum_{i=1}^{4} x_i^2$ とかけて，$|x_i|\leq k$。

$k^2\leq n<k^2+(k+1)^2$ ならば，同じ議論を $n-k^2$

に適用して，n は4つ又は5つの整数 x_i，$|x_i| \leq k$ の平方の和とかける。

$n > 2k^2$ を仮定しよう。$n = 2k^2 + m$ とおく。$m < (k+1)^2$ で m が3平方数の和ならば，証明は終りである。そうでなければ，$m = 4^a(8b-1)$ で，$m \equiv 0, 4, 7 \pmod 8$。すると $n = 2(k-1)^2 + m'$，$m' = m + 4k - 2$ とかけて，$m' \equiv 1, 2, 5, 6 \pmod 8$。故に m' は3平方数の和となる。$m' < (k+1)^2$，即ち $n < 3k^2 - 2k + 3$，ならば，命題の結果が得られる。

<u>系 2.2</u>　$k > 0$ を奇数とする。$n < 3k^2 + 2k + 1$，$n \equiv 5 \pmod 8$ を充たす正整数 n はすべて5平方数の和 $n = \sum_{i=1}^{5} x_i^2$，x_i：奇数，$|x_i| \leq k$，とかける。

同じ議論によるが，証明はもっと易しい。上記の n は $1 + 1 + m$，$1 + k^2 + m$ 又は $k^2 + k^2 + m$ とかけて，$0 < m < (k+1)^2$，$m \equiv 3 \pmod 8$。すると $m = \sum_{i=1}^{3} x_i^2$，$|x_i| \leq k$ とかけて，x_i は必然的に奇数である。

<u>注意</u>．Gruson と Peskine は，ずっと複雑な議論をして，(2.1) が $n \leq 3k^2 + 2$ でも成立することを示している。これは最良の結果である。実際，

78は5以下の整数5つの平方和にはかけない。他方，彼等はkが大きければ，同様の結果を $n \leq 5k^2 - O(k^{3/2})$ について証明している。

§3. 4次曲面上の曲線

本節で定理(0.3)を証明する。$\mathbb{P}^2$ 上の9点を blow up して得られる有理曲面Sの有理写像による像として，$\mathbb{P}^3$ の特異4次曲面を構成することが証明のideaである。3次曲面の場合のように非特異曲線を含むS上の因子類を具体的に決定するのとは違って，今回は，S上に具体的な曲線を構成し，それらを Pic S の自己同型部分群で動かすことがideaである。その部分群は第4節で調べる。

先ず，$\mathbb{P}^2$ 上の"一般の位置にある"9点 $P_1, \ldots, P_9$ をとる。特に，次の条件を仮定する。

(*) $P_1, \ldots, P_9$ を通る3次曲線 Γ_0 が唯一つ存在し，Γ_0 は非特異である。又，$P_1, \ldots, P_9$ と $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \otimes \mathcal{O}_{\Gamma_0}$ で代表される類は $\mathrm{Pic}\,\Gamma_0$ の中で $\mathbb{Z}$ 上一次独立である。

k が非可算無限体ならば，条件(*)を充たすように $P_1, \dots, P_9$, Γ_0 を取れる。k が一般の場合は，k を適当な体 k' に拡大して，条件(*)が成立するように出来て，定理 (0.3) が k' 上で証明出来る。Hilbert スキームは k 上局所的有限生成だから，k 上 (0.3) の結論は k' 上のそれから導かれる。

$\pi : S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ を 9 点 $P_1, \dots, P_9$ の blowing up とする。すると $\mathrm{Pic}\, S \cong \mathbb{Z}^{10}$ の直交基底として $\ell = \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ と $-e_i$ がとれる。但し e_i は例外曲線 $E_i = \pi^{-1}(P_i)$ の類である。すると $\ell^2 = 1$ かつ $e_i^2 = -1$。

Γ_0 の proper transform を Γ とおく。$\mathrm{Pic}\, S$ で $\Gamma = (3; 1, \dots, 1)$ で，canonical divisor class (標準因子類) $\omega = \omega_S$ は $-\Gamma$ に等しい。P_1 を通る直線の proper transform を C とおく。すると，$\mathrm{Pic}\, S$ で $C = (1; 1, 0, \dots, 0)$.

<u>命題 3.1</u>　完備線形束 $|C+\Gamma|$ は底点を持たず，次元は 3 である。従って morphism (射) $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{P}^3$ を定める。φ の像 X は 4 次曲面である。φ の Γ への制限は X の上の直線 L への次数 2

の有理射で，4つの分岐点 $Q_1, \ldots, Q_4 \in \Gamma$ をもつ。φ の $S-\Gamma$ への制限は $X-L$ 上への同型射である。接空間の写像 $T_\varphi : T_{S,x} \longrightarrow T_{\mathbb{P}^3, \varphi(x)}$ は Q_i を除くすべての点 x で単射である。$Y \subseteq S$ が，Γ と異なる，非特異曲線ならば，$\varphi(Y)$ が非特異であるための十分条件は，Y が $Q_1, \ldots, Q_4$ を含まず，かつ $Y \cap \Gamma$ が Γ 上 φ_Γ によって引き起される involution pair を含まないことである。

線形束 $|C|$ が底点を持たないことは容易にわかる。従って $\mathcal{O}(C)$ は section で生成される。又，$H^1(\mathcal{O}(C)) = 0$ が成り立つ。故に，完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(C) \longrightarrow \mathcal{O}(C+\Gamma) \longrightarrow \mathcal{O}_\Gamma(C+\Gamma) \longrightarrow 0$$

と，$\deg \mathcal{O}_\Gamma(C+\Gamma) = 2$ だから $\mathcal{O}_\Gamma(C+\Gamma)$ が section で生成されるということから，$\mathcal{O}(C+\Gamma)$ が section で生成されて，$\dim H^0(\mathcal{O}(C+\Gamma)) = 4$ となることがわかる。従って，射 $\varphi : S \to \mathbb{P}^3$ が得られる。$\deg \mathcal{O}_\Gamma(C+\Gamma) = 2$ だから，制限 φ_Γ は Γ から $\mathbb{P}^1 \cong L \subseteq \mathbb{P}^3$ 上への次数2の有理射である。L は $\mathbb{P}^3$ の直線である。故に φ_Γ は4つの分岐点 $Q_1, \ldots, Q_4$ をもつ。

他方，通常の方法で φ が φ_{Γ} の involution pair を除く S の2点を分離し，かつ $Q_1,\dots,Q_4$ を除く S の各点で接ベクトルを分離することを示すことができる。命題の他の主張は以上のことから従う。

<u>命題 3.2</u>　(a)　任意整数 $n\geq 0$ について，線形束 $|C+n\Gamma|$ は底点を持たず，種数 $g=2n$ の既約非特異曲線 Y を含む。

(b)　$B=E_8+E_9$ とおく。任意整数 $n\geq 1$ について，線形束 $|B+n\Gamma|$ は底点を持たず，かつ種数 $g=2n-1$ の既約非特異曲線 Y を含む。

実際，n に関する帰納法で，$\mathcal{O}(C+n\Gamma)$ 及び $\mathcal{O}(B+n\Gamma)$ が section で生成され，$H^1(\mathcal{O}(C+n\Gamma))=0=H^1(\mathcal{O}(B+n\Gamma))$ となることがわかる。$|B+n\Gamma|$ に帰納法を適用するには，最初に $|B+\Gamma|$ が底点を持たないことを示さねばならないが，これは $\mathbb{P}^2$ の一般の位置に与えられた7点を通る3次曲線全体は共通点を持たないことからわかる [4, II, 4.3]。次いで，基礎体 k の標数が0ならば，Bertini の定理によって非特異曲線 Y の存

在がわかる。(既約性はある種の H^1 が消えることからわかる。)種数は S 上の adjunction formula を使って計算できる。char. $k = p > 0$ の場合には後述の (5.1) を参照。

次の結果は証明の main idea の一つである。G は $\mathrm{Pic}\, S$ の,ω を固定する isometry[(*)] 全体のなす群とする。G を利用して S 上の曲線を多数作り出す。

<u>補題 3.3</u>　$E_i = \pi^{-1}(P_i)$ を S 上の例外曲線の一つとし,$\sigma \in G$ とする。すると類 $\sigma(E_i)$ は既約有理曲線 E, $E^2 = -1$, を含む。

<u>証明</u>　明らかに $\sigma(E_i)^2 = -1$, $\sigma(E_i).\omega = -1$。S 上の Riemann-Roch の定理により,$h^0(\mathcal{O}(\sigma(E_i))) > 0$。$D \in |\sigma(E_i)|$ を有効因子とする。$\Gamma = -\omega$ だから,$D.\Gamma = 1$。故に $D = D_1 + \sum_{i=2}^{r} D_i$, D_i:既約曲線,$D_1.\Gamma = 1$, $D_i.\Gamma = 0$, $i > 1$ とかける。もし既約曲線 D_i が $D_i \neq \Gamma$, $D_i.\Gamma = 0$ をみたせば,$\mathbb{P}^2$ の像 $\pi(D_i)$ は Γ_0 と 9 点 $P_1, \ldots, P_9$ 以外では交わらない。しかし,これは P_i に関する条件 (*) に反する。故に $D = D_1 + r\Gamma$, $r \geq 0$。D_1 は

(*) intersection pairing に関して。

既約だから，adjunction formula により $D_1^2 \geqq -1$。他方 $-1 = D^2 = D_1^2 + 2r$。故に $r=0$ で，$D=D_1$ は既約有理非特異曲線である．

<u>系 3.4</u>　$\sigma \in G$ とする。すると $\mathbb{P}^2$ の条件 $(*)$ をみたす，一般の位置にある新しい 9 点 $P_1', \dots, P_9'$ が存在して，$\pi' : S \longrightarrow \mathbb{P}^2$ を P_i' の blowing up とすれば，$\pi'^{-1}(P_i') = \sigma(E_i)$，$\pi'^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) = \sigma(\ell)$ となる。

実際，上記補題により，$\sigma(E_i)$ は例外曲線 E_i' を含み，それらは互いに相交わらない．E_i' を contract して $\mathbb{P}^2$ に同型な曲面を得る。Γ の像 Γ_0' は点 $P_1', \dots, P_9'$ を含み，条件 $(*)$ をみたす。G は ω を固定するから，$\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) = \sigma(\ell)$ である。

<u>定理 3.5</u>　任意の $d \geqq 3$ と $0 \leq g \leq d-3$ を充たす任意の g について，種数 g の S 上の既約非特異曲線 Y が存在して，$\varphi(Y)$ は $\mathbb{P}^3$ の次数 d の非特異曲線である。

<u>証明</u>　$n \geqq 0$ を整数とする。(3.2) により，$|C+n\Gamma|$ は種数 $g = 2n$ の既約非特異曲線を含む。$\sigma \in G$ とする。(3.2) を曲面 S に適用する。(3.4) によって S を射 π' で構成されたと見なして，

類 $\sigma(C+n\Gamma)$ は同様に種数 $g=2n$ の既約非特異曲線 Y を含むことがわかる。$\mathbb{P}^3$ における像 $\varphi(Y)$ の次数 d は，$\sigma(\Gamma)=\Gamma$, $C.\Gamma=2$ となることから，

$$d=(C+\Gamma)(\sigma(C+\Gamma))=C.\sigma(C)+2n+2$$

で与えられる。

他方，$Y.\Gamma=2$ で，条件 (*) により，Γ への制限写像 $\mathrm{Pic}\,S\to\mathrm{Pic}\,\Gamma$ は単射である。従って，$Y.\Gamma$ の 2 点が φ_Γ の involution pair になるのは，$\mathrm{Pic}\,S$ の類として，$Y=C+\Gamma$ とかけるときだけである。直ちに，この場合は，$n=1$, $\sigma(C)=C$ のときのみに起ることがわかる。故に，$C.\sigma(C)>0$ と仮定すれば，(3.1) によって，像 $\varphi(Y)$ は非特異である。

最後に，後述の結果 (4.5) によって，σ が G を動くとき，交叉数 $C.\sigma(C)$ がすべての非負整数を値にとることがわかる。従って，任意偶数 $g\geq 0$ を種数にもつ S 上の曲線 Y が得られ，その $\mathbb{P}^3$ における像 $\varphi(Y)$ は（任意の）次数 $d\geq g+3$ の非特異曲線である。

奇数の種数の場合は，$n>0$ と $Y\in|\sigma(B+n\Gamma)|$ に

ついて同様の議論をすればよい。

<u>(0.3) の証明</u>. 定理 (3.5) で (0.3) の特別な場合は証明されているので，証明を完結するには少し補足をすればよい。$0 \leq g_0 \leq d_0 - 3$ を充たす整数 d_0, g_0 に対して，(3.5) で与えられる S 上の曲線 Y_0 をとる。整数 $r \geq 0$ について，線形束 $|Y_0 + r(C+\Gamma)|$ を考える。$|Y_0|$ と $|r(C+\Gamma)|$ は底点を持たないので，$|Y_0 + r(C+\Gamma)|$ も底点をもたない。従って非特異曲線 Y を含む。Y が既約であることは容易にわかる。($\mathrm{char}.\, k = p > 0$ の場合は (5.1) を参照。) $d = \deg \varphi(Y)$ と $g = \mathrm{genus}\,(Y)$ は

$$d = d_0 + 4r$$

$$g = g_0 + r(d_0 + 2r - 1)$$

で与えられ，簡単な議論により，$|Y_0 + r(C+\Gamma)|$ の一般元 Y について，$Y \cap \Gamma$ は φ_Γ の involution pair を含まず，故に $\varphi(Y)$ は $\mathbb{P}^3$ の非特異曲線であることがわかる。

d_0, g_0 を d と g で表わせば，

$$d_0 = d - 4r$$

$$g_0 = g - r(d - 2r - 1)$$

となり，不等式 $0 \leq g_0 \leq d_0 - 3$ は

$$r(d-2r-1) \leq g \leq (r+1)(d-2r-3)$$

と表わされる。

$$F_d(r) = (r+1)(d-2r-3)$$

とおくと，g に関する不等式は

$$F_d(r-1) \leq g \leq F_d(r)$$

となる。従って，$d, r \geq 0$ に対して，g のすべての値が得られる。$r=0$ ならば，区間 $0 \leq g \leq d-3$ を得る。$F_d(r)$ の極大値は $r = \frac{1}{4}(d-5)$ のときで $F_d(\frac{1}{4}(d-5)) = \frac{1}{8}(d-1)^2$ となる。故に $d \equiv 1 \pmod 4$ に対しては，0 と $\frac{1}{8}(d-1)^2$ の間の g のすべての値が得られる。$d \equiv 0, 2, 3 \pmod 4$ ならば，簡単な計算で，整数 r の関数 $F_d(r)$ の極大値は常に $[\frac{1}{8}(d-1)^2]$ となるので，定理 (0.3) の証明が完結する。

§4. $\mathbb{Z}^{10}$ 上の2次形式について

V を自由アーベル群 $\mathbb{Z}^{10}$，$e_0, e_1, \ldots, e_9$ をその自由底，Q を V 上の2次形式 $x_0^2 - \sum_{i=1}^{9} x_i^2$ とする。$(\cdot)$ で付随した内積を表わすと，$e_0^2 = 1$, $e_i^2 = -1$, $i = 1, \ldots, 9$, $(e_i \cdot e_j) = 0$, $i \neq j$ となる。ω でベクトル

$(-3;-1,-1,\ldots,-1)$ を表わすと，$\omega^2=0$。$H\subseteq V$ で ω に直交するベクトルがなす超平面を表わす。

<u>補題 4.1</u>　V の元 $r_1, r_2, \ldots, r_8$ が存在して，次の条件を充たす。

(a) $\omega, r_1, r_2, \ldots, r_8, e_9$ は V の自由底をなす，

(b) $\omega, r_1, \ldots, r_8$ は H の自由底をなす，

(c) $r_i^2=-2$，$(r_i\cdot r_j)=0$；但し $(i,j)\in I=\{(2,3),(3,4),\ldots,(7,8),(1,4)\}$ となる場合を除く；その場合には，$(r_i\cdot r_j)=1$.

(d) 特に，$r_1,\ldots,r_8$ で生成される部分群は階数8の自由アーベル群で，偶数値をとる負の定符号2次形式をもち，Γ_8 の opposite に同型である [8, p.88]。

実際 $r_1=(1;1,1,1,0,\ldots,0)$, $r_2=(0;-1,1,0,\ldots,0)$, $r_3=(0;0,-1,1,0,\ldots,0)$, …, $r_8=(0;0,\ldots,0,-1,1,0)$ と取ればよい。条件 (a),(b),(c), は直ちに検証できる。(d) を示すには，Γ_8 に対する交叉行列を（[8, p.89] 参照；但し r_1 と r_2 を入れ替える），r_i に対する交叉行列と比較すればよい。

さて，ω を固定する V の isometry 全体がなす

群を G，ω を固定する H の isometry 全体がなす群を G_H，$W=H/(\omega)$ の isometry 群を G_W とおく。$\overline{W}=W/2W$ 上に誘導 2 次形式 $\overline{Q}=\frac{1}{2}Q(x) \pmod 2$ を考えて，その isometry 群を $G_{\overline{W}}$ とする。

<u>補題 4.2</u>　(a) 制限写像 $G\to G_H$ は同型写像である。

(b) 自然な準同型写像 $G_H\to G_W$ は surjective で，その kernel は transvection $x\longmapsto x-(x.z)\omega$，$x, z\in H$，がなす群である。

(c) 制限写像 $G_W\longrightarrow G_{\overline{W}}$ は surjective で，その kernel は $\{\pm 1\}$。

実際，G_W は root $r_1,\dots,r_8$ に関する reflection σ_i：$x\longmapsto x+(x.r_i)r_i$ で生成される Weyl 群 E_8 である [2, ch VI]。他方，$\overline{W}$ 上の 2 次形式 $\overline{Q}$ は $\mathbb{F}_2$ 上の 2 次形式 $x_1x_2+x_3x_4+x_5x_6+x_7x_8$ に同型であることが確かめられる。(c) は G_W と $G_{\overline{W}}$ の位数（既知である）を較べて証明される [2, ch.VI, ex 4.1, p. 228]。

H は W と (ω) の直交和だから，$G_H\to G_W$ が surjective になることは明らか。$\sigma\in G_H$ が W 上恒等写像ならば，H の任意の元 x について，$\sigma(x)=x-\varphi(x)\omega$。

但し φ は H 上の 1 次形式。従って，適当な H の元 z に関して，$\varphi(x) = (x.z)$ とかける。これから (b) が証明される。

$G \longrightarrow G_H$ が injective になることは容易にわかる。surjective であることを見るには，root r_i に関する reflection σ_i が V 上に持ち上げられることから，$G \longrightarrow G_W$ が surjective であることを注意すればよい。他方，transvection $x \longmapsto x - (x.z)\omega$ は次のように V 上に持ち上げられる，

$$\tau_z(x) = x - (x.z)\omega + (x.\omega)z - \frac{1}{2}(z.z)(x.\omega)\omega, \qquad x \in V.$$

但し，Q_W が偶数値 2 次形式だから，$\frac{1}{2}(z.z) \in \mathbb{Z}$.

<u>命題 4.3</u>　V の元 x で，(i) $x^2 = 0$，(ii) $x.\omega = -2$, (iii) $\bar{V} = V/2V$ で $\bar{x} \neq 0 \pmod{\omega}$ を充たすもの全体は，G の作用で唯一つの orbit をなしている。

<u>証明</u>　x, y を上記の条件を充たす元とする。$\bar{x}, \bar{y} \pmod{\omega}$ は $\bar{W}$ の 0 でない isotropic な元である。$\mathbb{F}_2$ 上の Witt の定理 [1] により，$G_{\bar{W}}$ の元，従って G の元が存在して，$\bar{x}$ を $\bar{y}$ に移す。故に $\bar{x} = \bar{y}$ と仮定してもよい。すると，$y = x - 2z + \lambda\omega$, $z \in H$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ とかける。他方，$\tau_z(x) = x - 2z + \mu\omega$, $\mu \in \mathbb{Z}$.

$y^2=\tau_2(x)^2=0$ から $\lambda=\mu$ がわかり，従って，$y=\tau_2(x)$。

注意. 条件(iii)を落すと，同じ議論により，$x^2=0,\ x.\omega=-2,\ \bar{x}\equiv 0 \pmod{\omega}$ を充たす元 x の全体がなす，もう一つの orbit が存在することがわかる。応用として，これから G が例外曲線，即ち $e^2=-1,\ e.\omega=-1$ を充たす元 $e\in V$，全体に推移的に作用することがわかる。実際，そのような e に対して，$x=2e-\omega$ とおけば，$x^2=0,\ x.\omega=-2,\ \bar{x}\equiv 0 \pmod{\omega}$ となる。

補題 4.4 任意整数 $n>0$ に対して，$n=-\frac{1}{2}(x.x)$ となる W の元 x が存在する。更に $\bar{W}$ で $\bar{x}\neq 0$ と仮定しても同じ結果が言える。

証明. Γ_8 の2次形式で偶数を表現する仕方の数を与える一般公式 [8, p.176] を使うか，又は次のように直接的に議論してもよい。$x=x_2r_2+x_4r_4+x_6r_6+x_8r_8$ とおけば，$-\frac{1}{2}(x.x)=x_2^2+x_4^2+x_6^2+x_8^2$ となり，任意の正整数は4平方数の和となるから，上記の結果を得る。$\bar{x}=0$，従って x_i がすべて偶数，ならば，$n\equiv 0 \pmod 4$。このとき，$x'=x_2r_2+2r_1+r_4+x_6r_6+x_8r_8$ とおくと，$-\frac{1}{2}(x'.x')=$

$x_2^2+x_6^2+x_8^2+3$。$n-3\equiv 1,5 \pmod 8$ だから，$n-3$ は3平方数の和である。従って $\bar{x}\neq 0$。

<u>命題 4.5</u>　$c=(1;1,0,\dots,0)$, $b=(0;0,\dots,0,-1,-1)$ とおく。σ が G を動くと，$(c.\sigma(c))$, $(b.\sigma(c))$ はすべての非負整数を値にする。

<u>証明</u>　$n>0$ を与えて，$x\in H$ を $-\frac{1}{2}(x.x)=n$, $\bar{W}$ で $\bar{x}\neq 0$ となるように選ぶ。而上の Witt の定理により，必要ならば x を G の元で動かして，$\bar{c}+\bar{x}$ は $\bar{W}$ の 0 でない isotropic な元としてよい。すると，$(c+x)^2\equiv 0 \pmod 4$。ここで $c'=c+x+\frac{1}{4}(c+x)^2\omega$ とおく。c' が (4.3) の仮定を充たして，$c'=\sigma(c)$, $\sigma\in G$ になることと，$(c.c')=n$ であることがわかる。

$(b.\sigma(c))$ がすべての非負整数値をとることを見るには，x を上のように取る。$\overline{b}+\bar{x}$ が 0 でない isotropic な元と仮定してもよい。すると，$c'=b+x+\frac{1}{4}(b+x)^2\omega$ はある $\sigma\in G$ について，$c'=\sigma(c)$ とかけ，$(b.c')=n-1$ となることからわかる。

<u>§5. Bertini の定理</u>

Gruson と Peskine [7] は基礎体 k の標数を 0 と仮定したが，それは (3.2) と (0.3) の証明に Bertini の定理を使うことができるようにするためであった。Bertini の定理によれば，底点を持たない線形束は非特異因子を含む（例えば，[4, III, 10.9] 参照）。この結果は標数 $p>0$ の場合には成立しないが，ここで Bertini 型の定理を与える。それは，任意の標数で成立し，本稿における応用のために十分である。

X を非特異射影多様体，$\varphi: X \to \mathbb{P}^n$ を射，$T_{\varphi,x}: T_{X,x} \longrightarrow T_{\mathbb{P}^n,\varphi(x)}$ を点 $x \in X$ に於ける接写像とする。任意の i について，

$$\Sigma_i = \{x \in X \mid \dim \ker T_{\varphi,x} \geqq i\}$$

とおく。X 上の底点を持たない線形束を，それに付随した射が任意の i について $\operatorname{codim}(\Sigma_i, X) \geqq i$ という条件を充たすとき，almost very ample と呼ぶ。明らかに very ample な線形束は almost very ample である。

<u>定理 5.1</u>　X を非特異射影多様体，$\mathcal{L}$ を almost very ample な線形束とする。すると，空でない

Zariski 開集合 $U \subseteq \mathfrak{D}$ が存在して，U の任意の元 D は（必ずしも既約でない）非特異被約因子である。

証明は very ample な線形束の場合と同様である [4, II, 8.18]。$X \times \mathfrak{D}$ の部分集合

$$B = \{ \langle x, D \rangle \in X \times \mathfrak{D} \mid D \text{ は } x \text{ で特異} \}$$

を考えて，B の各点で $\dim B < \dim \mathfrak{D}$ が成立することを見ればよい。

最後に，本稿における応用では，§3 の記号で，線形束 $|C+n\Gamma|$，$n \geqq 0$，$|B+n\Gamma|$，$n \geqq 1$，$|Y_0+r(C+\Gamma)|$，$r \geqq 0$ がすべて almost very ample であることを示せば十分である。$|C+n\Gamma|$ と $|B+n\Gamma|$ については，(3.2) の証明中，これらの線形束が $Q_1, \ldots, Q_4$ 以外の点において（$B+\Gamma$ の場合には直線 E_8 と E_9 上の点を除いて）接ベクトルを同様に分離することを示せば十分である．線形束 $|Y_0+r(C+\Gamma)|$ については，$\mathfrak{D}$ が almost very ample な線形束，$\mathfrak{D}'$ が底点を持たない線形束のとき，$\mathfrak{D}+\mathfrak{D}'$（$D+D'$，$D \in \mathfrak{D}$，$D' \in \mathfrak{D}'$ という形の因子全体で張られた線形束）が almost very ample であること

に注意すればよい。

文献

[1] N. Bourbaki – Algèbre, Ch. 9, Hermann, 1959

[2] N. Bourbaki – Groupes et algèbres de Lie, Ch. 4, 5, 6, Hermann, 1968

[3] G. Halphen – Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques, J. éc. polyt. 52 (1882) 1–200

[4] R. Hartshorne – Algebraic Geometry, Springer (1977)

[5] R. Hartshorne – On the classification of algebraic space curves, in: Vector bundles and differential equations, (Nice 1979), Birkhäuser (1980) 83–112.

[6] L. Gruson et C. Peskine, – Genre des courbes de l'espace projectif, in: Algebraic geometry (Tromsø 1977) Springer, Lecture Notes in Math. 687 (1978) 31–59.

[7] L. Gruson et C. Peskine – Genre des courbes de l'espace projectif, (II), Ann. Sci. ENS, Paris (à paraître)

[8] J.-P. Serre – Cours d'arithmétique, Presses Univ. France (1970)

12.22.82