代数幾何学シンポジウム記録
1982年度 pp.88-102

高階の広中部分群スキームと特異点解消

東北大理 小田忠雄

序

正標数代数多様体の特異点解消問題に関する最近の状況を，簡単のため超曲面の場合に限定して，報告する．詳細は[O_3],[O_4]を参照して頂きたい．

ネーター正則局所環 $\mathcal{O}$ の極大イデアルを $\mathfrak{m}$，剰余体を $k=\mathcal{O}/\mathfrak{m}$ とし，k の標指数を p とする．このとき $gr_{\mathfrak{m}}(\mathcal{O}):=\bigoplus_{\nu\geq 0}\mathfrak{m}^{\nu}/\mathfrak{m}^{\nu+1}$ は k 上の多項式環となる．正則スキーム $Z:=\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ 内の点 $\mathfrak{m}$ を通る超曲面 $X:=\mathrm{Spec}(\mathcal{O}/g\mathcal{O})$ を考える．このとき，X の $\mathfrak{m}$ における特異点の状況を測る二つの不変量 μ, τ を次のように定義する．

まず第一の不変量は

$$\mu:=\mathrm{mult}_{\mathfrak{m}}(X)=\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(g)$$

すなわち，X の $\mathfrak{m}$ における重複度であり，それは定義方程式 g の $\mathcal{O}$ における $\mathfrak{m}$進位数と一

致する．このとき g の $\mathfrak{m}$ 進 initial form を
$f \in gr_{\mathfrak{m}}^{\mu}(\mathcal{O})$ と書くことにしよう．

第二の不変量は次の通りである．多項式環 $gr_{\mathfrak{m}}(\mathcal{O})$ 内の f を含む斉次な部分環のうち，加法形式で生成されるもので最小のものを考え，それの k 上の超越次数を

$$\tau = \tau_{\mathfrak{m}}(X\ ;\ Z)$$

とする．ただし一般に k 上の多項式環 $k[x_0, \cdots, x_n]$ 内の加法形式とは

$$a_0 x_0^{p^e} + a_1 x_1^{p^e} + \cdots + a_n x_n^{p^e} \qquad (e \geqq 0,\ a_0, \cdots, a_n \in k)$$

の形をしたものである．

さて，次のことが既知である．

安定性定理　$\pi : Z' \longrightarrow Z$ を X に対し permissible な blowing-up（後述）とし，X' を π による X の strict transform とする．$\mathfrak{m}' \in X' \cap \pi^{-1}(\mathfrak{m})$ を任意に選び，X' の $\mathfrak{m}'$ における不変量を μ', τ' とする．

(i)（広中 [H_2]）常に $\mu \geqq \mu'$ が成立する．もし等号 $\mu = \mu'$ が成立（$\mathfrak{m}'$ is infinitely near to $\mathfrak{m}$ と [G] は称する）するなら後述の ☆ が成り立つ．

(ii) (Giraud [G]) もし $\mu=\mu'$ ならば $\tau\leq\tau'$ が成立する．もし $\mu=\mu'$ かつ $\tau=\tau'$ が成立（m' is infinitely very near と[G]は称する）するなら後述の☆☆が成り立つ．

注 1982年10月の日仏シンポジウム後になって，Giraudが既に1975年に(ii)を証明済みであることが判明した．

1. 多項式環の線形代数と高階の広中部分群スキーム.

上記の定理における☆，☆☆および最近の結果は，多項式環に関する線形代数により記述出来るので，まずそのための一般論を述べる．

$S=k[x_0,\cdots,x_n]$ を標指数 p の体 k 上の多項式環とし，通常どうり次数付き環 $S=\bigoplus_{\nu\geq 0}S_\nu$ と考える．S の斉次素イデアル $\mathfrak{p}\neq S_+$ $(=\bigoplus_{\nu>0}S_\nu)$ をとり，局所化 $R=S_\mathfrak{p}$，極大イデアル $M=\mathfrak{p}S_\mathfrak{p}$ および剰余体 $K=R/M$ を考える．

(1,1)（広中[H,]）R内で考えて

$$\bigoplus_{\nu\geq 0} S_\nu \cap M^\nu$$

はSの斉次部分環であり，しかも加法形式で生成される．言い換えれば，ベクトル群スキーム Spec(S) 内に斉次部分群スキーム $B(\mathfrak{g})$ が存在して，Sの $B(\mathfrak{g})$-不変式全体のなす部分環を $S^{B(\mathfrak{g})}$ としたとき

$$\bigoplus_{\nu\geq 0} S_\nu \cap M^\nu = S^{B(\mathfrak{g})}$$

が成立する．ここで斉次部分群スキームとは，スカラー倍の作用で閉じているもの，つまり斉次の（加法形式で生成される）イデアルで定義された部分群スキームである．

(1,2) 各 $\nu\geq 0$ に対し $S_\nu \cap M^{1+\nu}=\{0\}$ が成立する．従って $f\in S_\nu\cap M^\nu$ に対し f の $M^{1+\nu}$ を法とする剰余類 $\rho(f)$ を対応させることにより得る変換準同型

$$\rho:\ S^{B(\mathfrak{g})} \hookrightarrow gr_M(R)$$

は次数を保存する1対1の環準同型である．

証明には[O,]にあるJacobi判定法

$$M^\nu=\{f\in R \mid \mathrm{Diff}_{\nu-1}(R)f\subset M\}$$

$$S \cap M^{\nu} = \{ f \in S \mid \mathrm{Diff}_{\nu-1}(S) f \subset \mathfrak{g} \}$$

を用いる．ここに $\mathrm{Diff}_{\nu-1}(R)$ および $\mathrm{Diff}_{\nu-1}(S)$ は R および S から自分自身への素体上の微分作用素で階数が $\nu-1$ 以下のもの全体である．階数が $\nu-1$ 以下の k 上の微分作用素全体 $\mathrm{Diff}_{\nu-1}(S/k)$ が $\mathrm{Diff}_{\nu-1}(S)$ に自然に含まれることを考えれば，本項最初の主張は明らかである．

(1.3) 各 $e \geq 0$ に対し S_{p^e} 内の加法形式全体のなす k 部分空間を

$$L_e = \{ a_0 x_0^{p^e} + a_1 x_1^{p^e} + \cdots + a_n x_n^{p^e} \mid a_0, \cdots, a_n \in k \}$$

とする．従って $S_1 = L_0$ である．

$$L := \bigoplus_{e \geq 0} L_e$$

は次数付き左 $k[F]$-加群となる．ただし F は p 巾乗 Frobenius 写像である．また

$$L_e = k F^e(L_0) = k \otimes_{F^e(k)} F^e(L_0)$$

が成立する．(1.2) の変換準同型を L_e に制限すれば，k 線形写像

$$\rho : L_e \cap M^{p^e} = L_e^{B(\mathfrak{g})} \hookrightarrow gr_M^{p^e}(R)$$

を得る．

K 上の多項式環 $gr_M(R)$ 内の次数 p^e の加法形

式全体は $KF^e(gr^1_M(R))$ であるが，ρ によってその中に移る $L_e \cap M^{p^e}$ の元全体は明らかに $L_e \cap (RF^e(M)+M^{1+p^e})$ である．従って k 線形写像

$$\rho: L_e \cap (RF^e(M)+M^{1+p^e}) \longrightarrow KF^e(gr^1_M(R))$$

を得る．

(1, 4)（高階の広中部分群スキーム）整数 $r \geq 0$ に対し

$$\bigoplus_{e\geq 0} L_e \cap (RF^e(M)+M^{rp^e})$$

および

$$\bigoplus_{e\geq 0} L_e \cap (RF^e(M)+M^{1+rp^e})$$

は明らかに L の $k[F]$ 部分加群である．従って $\mathrm{Spec}(S)$ の有次部分群スキーム $B(g, r)$ および $B(g, r+0)$ が存在して，上記はそれぞれ不変加法形式の全体 $L^{B(g,r)}$ および $L^{B(g,r+0)}$ と一致する．

この定義により次のことが成り立つ．

(i) $B(g, r) \subset B(g, r+0)$ であり，それぞれは r に関し単調に増大して

$$B(g,\infty) := \bigcup_{r\geq 0} B(g, r) = \bigcup_{r\geq 0} B(g, r+0)$$

$$= B(g, r) \qquad r \gg 0$$

が成立する．

(ii) $B(\mathfrak{g},0)=\{0\}$ である．また $L^{B(\mathfrak{g},0+0)}=\mathfrak{g}\cap L$ 従って $B(\mathfrak{g},0+0)$ は点 $\mathfrak{g}\in \mathrm{Spec}(S)$ を通る最小の斉次部分群スキームである．

(iii) $B(\mathfrak{g},1)=B(\mathfrak{g})$ すなわち元来の広中部分群スキームである．また(1,3)により $k[F]$-加群の変換準同型

$$\rho:\ L^{B(\mathfrak{g},1+0)} \hookrightarrow \bigoplus_{e\geq 0} KF^e(gr^1_M(R))$$

を得る．右辺は K 上の多項式環 $gr_M(R)$ 内の加法形式全体のなす左 $K[F]$ 加群である．

(iv) 各 $e\geq 0$ に対して

$$L_e^{B(\mathfrak{g},\infty)}=L_e\cap RF^e(M)=kF^e(\mathfrak{g}\cap L_0)$$

が成立し，結局 $B(\mathfrak{g},\infty)$ は点 $\mathfrak{g}\in \mathrm{Spec}(S)$ を通る最小のベクトル部分群スキーム（一次式の生成するイデアルで定義されるもの）である．

(1,5)（Jacobi 判定法）前項(1,4)において導入した高階の広中部分群スキームは，後述するように安定性定理の☆，☆☆を述べるためおよびその後の発展のために不可欠な概念である．(1,4)における定義は一見不自然であるが，[O₂], [O₃] における普遍族等の結果か

ら考えれば極めて自然なのである。ここでは高階の広中部分群スキームを完全にL内部での線形代数で記述するJacobi判定法を述べるにとどめる。

kの元のp^e巾乗全体のなす部分体を$F^e(k)$とし，kから自分自身への$F^e(k)$上の微分作用素全体のなすkベクトル空間を$\mathrm{Diff}(k/F^e(k))$とし，$L_e = k \otimes_{F^e(k)} F^e(L_0)$には才一因子$k$を通して作用するものと考える。また各$\nu \geqq 0$に対し，$\mathrm{Diff}_\nu(k/F^e(k))$を階数が$\nu$以下の微分作用素全体とする。このとき各$r \geqq 0$に対し（$r=\infty$も許す）

$$L_e^{B(\mathfrak{g},r)} = \{ h \in L_e \mid \mathrm{Diff}_{rp^e-1}(k/F^e(k))h \subset \mathfrak{g} \cap L_e \}$$

$$L_e^{B(\mathfrak{g},r+0)} = \{ h \in L_e \mid \mathrm{Diff}_{rp^e}(k/F^e(k))h \subset \mathfrak{g} \cap L_e \}$$

が成立する。証明は［O_3, Section 4］を参照して頂きたい。

2、安定性定理　前節の記法を使用すれば，序における☆，☆☆およびその後に調べるべきことは次の通りである．

(2.1)　$\pi : Z' \to Z$ が X に関し permissible な部分スキーム $Y = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/\mathfrak{q})$ に沿ってのblowing-upであるとは，Y が正則（すなわち $\mathcal{O}/\mathfrak{q}$ が正則局所環）であり，$X \supset Y \ni \mathfrak{m}$ であり，しかも X が Y に沿って法平坦なことである．今考えている如く $X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}/g\mathcal{O})$ と超曲面である場合には，法平坦性は，g の $\mathfrak{q}$ 進位数 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{q}}(g)$ が $\mathfrak{m}$ 進位数 $\mu = \mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(g)$ と一致することと同値である．

Y の $\mathfrak{m}$ における接平面 $T_{Y,\mathfrak{m}} = \mathrm{Spec}(gr_{\mathfrak{m}/\mathfrak{q}}(\mathcal{O}/\mathfrak{q}))$ は自然に Z の $\mathfrak{m}$ における接平面 $T_{Z,\mathfrak{m}} = \mathrm{Spec}(gr_{\mathfrak{m}}(\mathcal{O}))$ の部分ベクトル群スキームである．このとき法平坦性は，g の $\mathfrak{m}$ 進 initial form f が $T_{Y,\mathfrak{m}}$ 不変であることとも同値である．つまり f は $T_{Y,\mathfrak{m}}$ 不変式全体のなす右上の多項式環

$$S := gr_{\mathfrak{m}}(\mathcal{O})^{T_{Y,\mathfrak{m}}}$$

内の次数 μ の斉次多項式である．

(2, 2) 上記の S は一方で次のような意味を持つ。良く知られているように $Rees(\mathfrak{q})=\bigoplus_{\nu\geq 0}\mathfrak{q}^{\nu}$ とすれば $Z'=\mathrm{Proj}(Rees(\mathfrak{q}))$ であり, $\pi^{-1}(\mathfrak{m})=\mathrm{Proj}(S)$, $S=k\otimes_{\mathcal{O}/\mathfrak{q}} gr_{\mathfrak{q}}(\mathcal{O}) = k\otimes_{\mathcal{O}} Rees(\mathfrak{q})$ である。従って $\mathfrak{m}'\in\pi^{-1}(\mathfrak{m})$ に対し $Rees(\mathfrak{q})$ の斉次素イデアルが決まり, それの S における像として S の斉次素イデアル $\mathfrak{p}\neq S_+$ を得る。

(2, 3) $\mathcal{O}' := \mathcal{O}_{Z',\mathfrak{m}'}$ とすれば X の π による strict transform X' は点 $\mathfrak{m}'$ において $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}'/g'\mathcal{O}')$ と一致する。ただし, $\mathcal{O}$ の正則パラメーターを $\mathfrak{m}=(u_0,\cdots,u_n,v_1,\cdots,v_r)$, $\mathfrak{q}=(u_0,\cdots,u_n)$, $\mathfrak{q}\mathcal{O}'=u_0\mathcal{O}'$ となるように選んだとき $g'=g/u_0^{\mu}$ である。g' の $\mathfrak{m}'$進位数は μ' であり, $\mu\geq\mu'$ が殆んど明らかに成立する。

(2, 4) $\mu=\mu'$ が成立する場合, 第一節における記法で

$$f\in S_{\mu}\cap M^{\mu} = S_{\mu}^{B(\mathfrak{p})}$$

となることも比較的容易に判る。すなわち g の $\mathfrak{m}$進 initial form f は法平坦性により S に属するが, 更に $\mathfrak{p}$ に関する広中部分群スキーム

$B(g) \subset \mathrm{Spec}(S)$ により不変である.

さて, f を含む $gr_m(\mathcal{O})$ の斉次k部分環であってしかも加法形式で生成されるものの内で最小のものを仮に $\tilde{S}$ とします. (2.1) の法平担性により $\tilde{S} \subset S$ である. 従って $\mathrm{Spec}(S)$ の斉次部分群スキーム A が存在して $\tilde{S} = S^A$ となる. A は $f \in S$ を不変とする $\mathrm{Spec}(S)$ の斉次部分群スキーム中最大のものであると言っても良い. このとき $\tau = \tau_m(X;Z)$ は S^A の k 上の超越次数である. $\mu = \mu'$ なら $f \in S^{B(g)}$ であることは上述した. A の最大性から

$$\bigstar \qquad S^A \subset S^{B(g)} \quad \text{すなわち} \quad A \supset B(g)$$

が成立する.

(2.5) $S' := gr_{m'}(\mathcal{O}')$ とすれば g' の m' 進 initial form f' は S' の μ' 次の斉次元である. 上への準同型 $S' \twoheadrightarrow S'' := gr_{m'/m\mathcal{O}'}(\mathcal{O}'/m\mathcal{O}')$ による f' の像を f'' とする. S', S'' は $k' = \mathcal{O}'/m'$ 上の多項式環である. (2.3) における $u_0, \cdots, u_n, v_1, \cdots, v_r$ の m 進 initial forms を $x_0, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_r$ とすれば $S = k[x_0, \cdots, x_n]$, $gr_m(\mathcal{O}) = k[x_0, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_r]$ である.

一方 $\mathfrak{m}\mathcal{O}'$ の生成元 $u_0, v_1, \dots, v_r$ の $\mathfrak{m}'$進 initial forms を $w_0, w_1, \dots, w_r$ とすれば，一次式 $z_1', \dots, z_s'$ $\in S'$ を適当に選び多項式環 $S' = k'[w_0, \dots, w_r, z_1', \dots, z_s']$ を得る．z_i' の S'' への像を z_i とすれば $S'' = k'[z_0, \dots, z_r]$ であり，$S' \twoheadrightarrow S''$ は一次式の生成するイデアル $(w_0, \dots, w_r)$ を法とする剰余写像である．

さて，(2.4) におけると同様に k' 上のベクトル群スキーム $\mathrm{Spec}(S')$ 内の斉次部分群スキーム A' および k' 部分ベクトル群スキーム $\mathrm{Spec}(S'')$ 内の斉次部分群スキーム A'' を，それぞれ f' および f'' を不変とするものの内で最大のものとする．従って $\tau' = \tau_{\mathfrak{m}'}(X'; z')$ は $S'^{A'}$ の k' 上の超越次数である．また $S' \twoheadrightarrow S''$ は明らかに k' 上の環準同型 $S'^{A'} \longrightarrow S''^{A''}$ をひきおこす．

一方，(2.2) により $\pi^{-1}(\mathfrak{m}) = \mathrm{Proj}(S)$ であるから，$\mathcal{O}'/\mathfrak{m}\mathcal{O}' = \mathcal{O}_{\pi^{-1}(\mathfrak{m}), \mathfrak{m}'}$ は局所化 $R = S_g$ 内の次数 0 の斉次元全体と一致する．また

$$gr_M(R) = k'(x_0) \otimes_{k'} S''$$

となることも明らかである．

(2.6) さて，$\mu=\mu'$ が成立するとき，(2.4)により $f\in S^A\subset S^{B(\delta)}$ であり，(1.2) における変換準同型 ρ を用い

$$f\in S^A\subset S^{B(\delta)} \xrightarrow{\rho} gr_M(R)$$

による像 $\rho(f)$ を考えることが出来る．このとき $\rho(f)=x_0^{\mu}\cdot f''$ となることも明らかである．

序に述べた Giraud の安定性定理は

$$\tau=\mathrm{tr.deg}_k(S^A)\leq \mathrm{tr.deg}_{k'}(S''^{A''})\leq \mathrm{tr.deg}_{k'}(S'^{A'})=\tau'$$

である． 右の不等式は (2.5) より明らかであるが，左の不等式を示すには少し考察が必要である．

(2.7) $\mu=\mu'$ かつ $\tau=\tau'$ なら (2.6) の二つの不等式において共に等式が成立する．Giraud によりこのとき

(i) $S'^{A'} \longrightarrow S''^{A''}$ は同型写像

(ii) $S^A\subset S^{B(\delta)} \xrightarrow{\rho} gr_M(R)$ により L^A の元はすべて $gr_M(R)$ 内の加法形式に移る．つまり (1.4),(iii) により $S^A\subset S^{B(\delta,1+0)}$ すなわち $A\supset B(\delta,1+0)$ となる．

以上要約すれば次の通りである．

⊙ permissible blowing-up に対し $\mu \geq \mu'$ が成立．

⊙ $\mu = \mu'$ なら $\tau \leq \tau'$ かつ $A \supset B(\mathfrak{g}, 1)$ が成立．

⊙ $\mu = \mu'$ かつ $\tau = \tau'$ なら $A \supset B(\mathfrak{g}, 1+0)$ が成立．

このとき，(1.4), (iii) により k 上の多項式環 S と K 上の多項式環 $gr_M(R)$ それぞれの加法形式全体の間に $k[F]$-加群の単同型

$$L^A \subset L^{B(\mathfrak{g}, 1+0)} \xrightarrow{\rho} \bigoplus_{e \geq 0} KF^e(gr^1_M(R))$$

が存在する．(以上は完全に S，その斉次素イデアル $\mathfrak{g} \neq S_+$ および μ 次の斉次元 f のみに関する結果である．) 更に $S'^{A'} \to S''^{A''}$ は同型である．

標数0と類似の状況(すなわちほぼ広中ゲームが適用出来る状況)は $A \supset B(\mathfrak{g}, \infty)$ すなわち

$$L^A \subset L^{B(\mathfrak{g}, \infty)} = \bigoplus_{e \geq 0} kF^e(\mathfrak{g} \cap L_0)$$

の場合である．(cf. (1.4), (iv))．上記とのギャップについての考察は現在進行中である．

参考文献

[G] J. Giraud, Contact maximal en caractéristique positive, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 8(1975), 201-234.

[H_1] H. Hironaka, Additive groups associated with points of a projective space, Ann. of Math. 92(1970), 327-334.

[H_2] H. Hironaka, Certain numerical characters of singularities, J. Math. Kyoto Univ. 10(1970), 151-187.

[O_1] T. Oda, Hironaka's additive group scheme, in <u>Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra in honor of Y. Akizuki</u> (Y. Kusunoki et al., eds.), Kinokuniya, Tokyo, 1973, 181-219.

[O_2] T. Oda, A versal family of Hironaka's additive group schemes, Proc. Japan Acad. 58(A) (1982), 126-128.

[O_3] T. Oda, Hironaka's additive group scheme, II, to be submitted to Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ.

[O_4] T. Oda, Hironaka group schemes and resolution of singularities, to appear in Proc. Japan-France Conference in Algebraic Geometry, Tokyo and Kyoto, 1982 (to be published as Lecture Notes in Math., Springer-Verlag).