代数幾何学シンポジウム記録
1982年度 pp.69-87

Deformations of $\mathbb{P}^n$

都立大理 辻 元

0. 序

複素多様体論において 与えられたコンパクト複素多様体の変型を研究することは基本的である。 しかし、与えられた複素多様体の大域的な変型を知ることは非常に難かしく、確かな研究手段は現在、全く存在しない。このことは、主として変型の極限の状態を把握する手段が殆ど存在しないことに起因している。 本稿では $\mathbb{P}^n$ の大域的変型をベクトル束の複素解析族の切断の極限操作を行なうことにより解析する。

$\mathbb{P}^n$ の変型については、次の諸結果が知られている。

(1) $\mathbb{P}^1$ の変型は $\mathbb{P}^1$ (Riemann)

(2) $\mathbb{P}^2$ の変型は $\mathbb{P}^2$ (Kodaira - Spencer)

(3) $\mathbb{P}^n$ の Kaehler 的変型は $\mathbb{P}^n$ (Hirzebruph- Kodaira)

さらに最近、微分幾何に於てCalabiの予想が肯定的に解かれたので（　　）、(3)の研究の結果と合わせて、次の驚異的結果が得られた。

(4)　$\mathbb{P}^n$と微分同相なKaehler多様体は、$\mathbb{P}^n$と複素解析的に同相である。

しかし、Kaehler多様体の変型はKaehler多様体とは限らないので$\mathbb{P}^n$の変型は$\mathbb{P}^n$に限るとはすぐには言えない。次の定理が我々の目標である。

<u>Theorem</u>　$\mathbb{P}^n$の変型は$\mathbb{P}^n$に限る。

1. 直線束、Moishezon性

Theoremの証明には、次のTheorem′が証明されることが必要十分である。

<u>Theorem′</u>　$\Delta \subset \mathbb{C}$を単位円板、$\pi : M \longrightarrow \Delta$をコンパクト複素多様体の複素解析族で、次の条件を満足すると仮定する。

条件ー　$\exists \{t_\nu\}$、$t_\nu \longrightarrow 0$で$M_{t_\nu} = \pi^{-1}(t_\nu)$が

$\mathbb{P}^n$と双正則同値なものが存在する。

この時 $M_0=\pi^{-1}(0)$ は $\mathbb{P}^n$ と双正則同値である。

以下、Theorem' を証明する。

$M_t=\pi^{-1}(t)$ $(t\in\Delta)$ とおく。K_t を M_t の標準束とする。まず M_0 が Moishezon manifold であることを証明しておこう。これを示す為に $\lambda_t(\nu)=\dim H^0(M_t,\mathcal{O}(K_t^{-\nu}))$ とおく。仮定から明らかに

$$\lambda_{t_j}(\nu)=\binom{n+(n+1)\nu}{n}$$

が全ての j について成り立っている。

上半連続性定理により

$$\lambda_0(\nu)\geqq\binom{n+(n+1)\nu}{n}$$

が成り立つので、特に $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}\ \lambda_0(\nu)/\nu^n>0$ が出て、M_0 が Moishezon 多様体であることがわかる。

M_0 が Moishezon manifold であることから

$$\dim H^1(M_0,\mathcal{O}_{M_0})=0\qquad \dim H^2(M_0,\mathcal{O}_{M_0})=0$$

が直ちに従う。我々は、必要なら考察を $0\in\Delta$ の十分小さな近傍の上の family に限定

することで、上半連続性定理により、

$$\dim H^1(M_t, \mathcal{O}_{M_t}) = 0\ ,\quad \dim H^2(M_t, \mathcal{O}_{M_t}) = 0$$

が全ての $t \in \Delta$ について成立しているとして一般性を失わない。このことから容易に

$$\dim H^1(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}) = 0\ ,\quad \dim H^2(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}) = 0$$

となるので、exponential sequence

$$\to H^1(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}}) \longrightarrow H^1(\mathcal{M}, \mathcal{O}^*_{\mathcal{M}}) \longrightarrow H^2(\mathcal{M}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{\mathcal{M}})$$

から、$H^1(\mathcal{M}, \mathcal{O}^*_{\mathcal{M}}) \longrightarrow H^2(\mathcal{M}, \mathbb{Z})$ が同型、即ち、$\mathcal{M}$ 上の直線束は、その Chern 類と 1:1 に対応していることがわかる。明らかに $H^2(\mathcal{M}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(M_t, \mathbb{Z})$ なる自然な準同型は同型である（t に依らず）。従って我々は $\exists\, \mathfrak{L} \in H^1(\mathcal{M}, \mathcal{O}^*_{\mathcal{M}})$ で $\mathfrak{L}_{t_j} = \mathfrak{L}|M_{t_j}$ が $\mathrm{Pic}\, M_{t_j} \cong \mathbb{Z}$ の正の生成元になっているものをとる事ができる。$\mathfrak{L}_t = \mathfrak{L}|M_t$ とおくと、$\{\mathfrak{L}_t\}$ は、直線束の複素解析族になっている。

さて、後の準備の為に、次の事を見ておくことにする。

<u>Lemma 1.1</u> $\pi : \mathcal{M} \longrightarrow \Delta$ は Moishezon morphism で、M_0 以外は、全て M_t が $\mathbb{P}^n$ と双正則同値になっているとして良い。

$R^0\pi_*\mathcal{L}$ を考える。 この直接層はΔ上のベクトル束でΔがSteinだから大域的切断で生成されている。 $s_0, \cdots, s_N \in H^0(\Delta, R^0\pi_*\mathcal{L})$ を生成系として有理写像

$$\mathcal{M} \ni x \longmapsto [\pi(x), [s_0(x) : \cdots : s_N(x)]) \\ \in \Delta \times \mathbb{P}^N$$

を考えると $\overbrace{\text{bimeromorphic}}^{\text{into}}$ でM_0以外のM_tに制限するとinto biholomorphicと仮定できる。 従って、$\mathbb{P}^n$のKaehler的変型は$\mathbb{P}^n$という結果からM_0以外のπのfibreは全て$\mathbb{P}^n$と双正則同値であるとして良い。 このこととM_0がMoishezon manifoldであることから $\pi : \mathcal{M} \longrightarrow \Delta$ はMoishezon morphismとなる*。 □

注：この場合parameter spaceを少し縮める必要がある。 詳しくはFujiki [ ]を参照。

2. Harmonic theory.

この節ではコンパクト複素多様体の複素解析族とその上のベクトル束の複素解析族が与えられた時、良く知られている上半連続性

定理を少し精密化して、M_0を解析する。議論は $\pi : \mathcal{M} \longrightarrow \Delta$ 上の直線束の族 $\mathcal{L}^{\otimes\nu} = \{\mathcal{L}_t^{\otimes\nu}\}$ $(\nu \in \mathbb{N})$ に限るが、一般の場合にも直ちに拡張できる。

$h = \{h_t\}_{t\in\Delta}$ を h が $\mathcal{M}$ の Hermite 計量（勿論 C^∞ 級とする）で、$h_t = h|M_t$ となっているものとする。$a = \{a_t\}_{t\in\Delta}$ を、各 a_t が $\mathcal{L}_t$ の Hermite fibre 計量で、tに関して可微分に依存しているものとする。 Dolbeault 分解:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(\mathcal{L}_t^{\otimes\nu}) \longrightarrow \mathcal{E}^{0,0}(\mathcal{L}_t^{\otimes\nu}) \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}^{0,1}(\mathcal{L}_t^{\otimes\nu}) \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}^{0,2}(\mathcal{L}_t^{\otimes\nu}) \xrightarrow{\bar\partial} \cdots$$

を考えよう。ここに $\mathcal{E}^{p,q}(\mathcal{L}_t^{\otimes\nu})$ は $\mathcal{L}_t^{\otimes\nu}$値の可微分 (p,q) form の芽の層である。$B_t^{\nu,q} = \Gamma(M_t, \mathcal{E}^{0,q}(\mathcal{L}_t^{\otimes\nu}))$ と置く。$B_t^{\nu,q}$ には h_t と a_t から自然に Hermite 内積 $\langle\ ,\ \rangle_t^{\nu,q}$ とノルム $\|\ \ \|_t^{\nu,q}$ が自然に定義される（詳しくは [ ] 参照）。$\Box_t$ を Hermite 内積 $\langle\ \ \rangle_t^{\nu,q}$ に付随した複素ラプラシアンとする。

以後 $\langle\ ,\ \rangle_t^{\nu,q}$ $\|\ \ \|_t^{\nu,q}$ を簡単の為 $\langle\ ,\ \rangle_t$, $\|\ \ \|_t$ と書く。次の命題は良く知られている。

<u>Proposition</u> 2.1 (Apriori Estimate [ ]) Δ の任意の相対コンパクトな部分集合 S を固定する時、

$\exists C_k = C_k(S) > 0$；k と S のみによる定数が存在して．$\forall \Phi \in B_t^{p,q}$，$t \in S$ に対して；不等式

$$\|\Phi\|_{t,k+2} \leq C_k \left(\|\Box_t \Phi\|_{t,k} + \|\Phi\|_t \right)$$

が成立する。　ここに $\|\ \|_{t,k}$ は $B_t^{p,q}$ の k 次の Sobolev norm である。□

我々は上の Proposition で $S = \Delta$ としてしまってよいことは明らかである（family を制限すればよい）．そこで以後 C_k は k のみに依存すると仮定する。

まず L_0 の holomorphic global section e_0 で $\|e_0\|_0 = 1$ となるものを構成しよう。　各 j に対し $\Gamma(M_{t_j}, \mathcal{O}(L_{t_j}))$ の元 e_{0j} で $\|e_{0j}\| = 1$ となるものをとる．$\{e_{0j}\}$ の部分列の"極限"として e_0 を構成しようというのが基本構想である。

まず M_0 を $\mathcal{M}$ 内の座標近傍系 $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}$ で覆い、各 U_λ とその上の座標 $x_\lambda : U_\lambda \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ は次の条件を満足するとする；

(1) x_λ は $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の unit open polydisk Δ^{n+1} への onto biholo-morphic mapping である。

(2) $t = \pi^* t$（同一視）とおくと，$U_\lambda \cap M_0 = \{p \in U_\lambda ; t = 0\}$ となる。

(3). $x_\lambda = (x_\lambda', t)$ $(x_\lambda' : U_\lambda' \longrightarrow \mathbb{C}^n)$の形になっている。

さて、$\mathcal{M} = \bigcup U_\lambda$となっていると仮定してよいので、そう仮定して話を進める。射影$p_\lambda : U_\lambda \longrightarrow U_{\lambda 0} = U_\lambda \cap M_0$を$p_\lambda(x_\lambda) = (x_\lambda', 0)$で定義する。$\mathcal{U}$に関する$\mathfrak{L}$の変換関数系を$\{\rho_{\lambda\mu}\}$とする時、$\mathfrak{L}_{t_j}$の切断$e_{oj}$は、正則関数系$\{e_{oj}^\lambda\}$, $e_{oj}^\lambda : U_{\lambda t_j} = U_\lambda \cap M_{t_j} \longrightarrow \mathbb{C}$で、$U_{\lambda t_j} \cap U_{\mu t_j}$で$e_{oj}^\lambda = \rho_{\lambda\mu} e_{oj}^\mu$を満足するものと自然に同一視される。さて$\mathfrak{L}_0$のbroken section $e_{oj}^* = \{e_{oj}^{*\lambda}\}$を関係式$p_\lambda^* e_{oj}^{*\lambda} = e_{oj}^\lambda$ on $U_{\lambda t_j}$で定義する。Proposition 2.1. により、簡単な評価によりjとλに依らない正定数Cが存在して(Sobolevのlemmaを使う); $|e_{oj}^{*\lambda}| \leq C$が全てのj, λに対して成立するとしてよい。これとMontelの定理から次のLemmaを得る。

<u>Lemma 2.1</u>　e_{oj}^*は、各$U_{\lambda 0}$上で広義一様に$\mathfrak{L}_0$の切断e_0に収束し$\|e_0\| = 1$が成立するとして一般性を失わない。

e_{oj} (resp e_0)の定義するM_{t_j} (resp. M_0)の因子

を D_{0j} (resp. D_0) と書く。 $P_0 \in M_0$ を $P_0 \notin D_0$ となるように任意に一つ選ぶ。 D_{0j} は D_0 にフィルター収束するので、P_0 を通る $\pi: \mathcal{M} \longrightarrow \Delta$ の切断 $s: \Delta \longrightarrow \mathcal{M}$ を $s(t_j) \notin D_{0j}$ が全ての j に対して成立する様にとれる。 $s(t_j) = P_{0j}$ と書く。

$\mathbb{P}^n$ の homogeneous coordinate を $[z_0 : z_1 : \cdots : z_n]$ とし $\mathbb{P}^{n-1}$ をその部分多様体 $\{[z_0 : \cdots : z_n] \in \mathbb{P}^n \mid z_0 = 0\}$ と同一視する。 $F_j : \mathbb{P}^n \longrightarrow M_{t_j}$ を $F_j([1:0:\cdots:0]) = P_{0j}$, $F_j(\mathbb{P}^{n-1}) = D_{0j}$ を満たす双正則写像とする。 F_j の存在は明らかである。 $\mathbb{P}^n$ 上の直線束 $\mathcal{O}(\nu)$ $(\nu \geq 0)$ の大域切断全体は degree ν の $z_0, \cdots, z_n$ に関する homogeneous polynomials と同一視できる。

今 $H^0(M_{t_j}, \mathcal{O}(L_{t_j}^{\otimes \nu}))$ の部分ベクトル空間 $E_{\nu j}$ を $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(\nu))$ の部分ベクトル空間 $\{$homogeneous polynomials of degree ν in $z_1, \cdots, z_n\}$ に F_j により自然に対応するものとして定義する。 $E_{\nu j}$ の内積 $\langle\ ,\ \rangle_{t_j}$ に関する正規直交基底 $\{e_{1j}^{\nu}, \cdots, e_{N_\nu j}^{\nu}\}$ $\left(N_\nu = \binom{n+\nu-1}{n}\right)$ をとる。 この時、次の補題は Lemma 2.1 と同様に証明される。

<u>Lemma</u> 2.2 $\{e_{1j}^{\nu}, \cdots, e_{N_\nu j}^{\nu}\}$ から作られる.

broken sections $\{e_{1j}^{\nu *},\dots,e_{N_\nu j}^{\nu *}\}$ は、各 U_{a0} 上で広義一様に収束し、或る $H^0(M_0,\mathcal{O}(\mathcal{L}_0^{\otimes\nu}))$ のベクトル部分空間 E^ν の正規直交系 $\{e_1^\nu,\dots,e_{N_\nu}^\nu\}$ に収束するとしてよい。□

上の補題により十分大きな ν に対し、有理写像 $\Phi_\nu : p\in M_0 \longmapsto [e_1^\nu(p):\cdots:e_{N_\nu}^\nu(p)]\in\mathbb{P}^{N_\nu-1}$ の像の次元は、少なくとも $n-1$ 次元になることがわかる。

3. Euler vector fields

$\mathbb{P}^n$ 上の正則ベクトル場 Z_0 を homogeneous coordinates を使って $\hat{Z}_0=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{z_j}{z_0}\right)\partial/\partial\left(\frac{z_j}{z_0}\right)$ と定義する。この正則ベクトル場を Euler vector field と呼ぶ。$\hat{Z}_0$ を使って M_{t_j} 上の正則ベクトル場 Z_{0j} を $Z_{0j}=F_{j*}\hat{Z}_0$ で定義する。M_t の正則接束 T_{M_t} の可微分切断の空間の自然な Hermitian inner product $\langle\ ,\ \rangle_t^\#$ が h_t により定義される。$\|\ \|_t^\#$ を $\langle\ \rangle_t^\#$ に随伴するノルムとする。次の補題は前節の議論と同様の議論から従う。

<u>Lemma</u> 3.1. M_{t_j} 上の正則ベクトル場 Z_{0j}^* を、

$Z^*_{0j} = Z_{0j} / \|Z_{0j}\|^{\#}_{t_j}$ で定義する。このとき、一般性を失うことなく Z^*_{0j} から作られる Θ_{M_0} の broken sections は各 U_α 上で広義一様に収束してその極限は M_0 上の正則ベクトル場 Z'_0 を定義する。(としてよい) さらに $\|Z'_0\|^{\#}_{t_0} = 1$ が成立する。□

ところで前節で作った $\Phi_\nu : M_0 \dashrightarrow \mathbb{P}^{N_\nu - 1}$ のファイバーは Z'_0 のひき起こす M_0 の正則変換の1パラメーター族の作用に関して明らかに stable である。従って $\dim \operatorname{im} \Phi_\nu \leq n-1$ が成立する。結局、我々は、次の補題が成り立つ。

<u>Lemma</u> 3.2. $\exists \nu_0 \in \mathbb{N}$, s.t. $\dim \Phi_{\nu_0} = n-1$. □

さて、Z_{0j} の orbit は、M_{t_j} を $\mathbb{P}^n$ と同一視したとき、degree 1 の $\mathbb{P}^1$、即ち直線になっているが、Z'_0 の orbit はどうなっているのか解析してみよう。

$Y = \mathbb{P}^1 \times \mathcal{M}$, $h : Y \longrightarrow \Delta$ natural projection とおく。$\beta_{Y/\Delta} : D_{Y/\Delta} \longrightarrow \Delta$ を morphism $h : Y \longrightarrow \Delta$ に付随した relative Douady space とする。

$\pi : \mathcal{M} \longrightarrow \Delta$ は Moishezon morphism なので (c.f.

Lemma 1.1) 一般性を失うことなく $D_{Y/\Delta}$ の任意の既約成分 D_α は $\beta_{Y/\Delta}|D_\alpha : D_\alpha \longrightarrow \Delta$ が proper, Moishezon morphism になっているとしてよい。 $H = \mathrm{Hol}(\mathbb{P}^1, \mathcal{M})$ とおくと、H は、Y の Douady space D_Y の中で Zariski open である。 $\mathrm{Hol}(\mathbb{P}^1, M_{t_1})$ の既約成分で、$\mathbb{P}^1$ から M_{t_1} の中の直線への同型を含むものを1つとり、その $\mathbb{P}^1 \times M_{t_1}$ の Douady space の中での閉包を D_{0t_1} とする。 さらに、D_{0t_1} を含む $D_{Y/\Delta}$ の既約成分を一つとりそれを D_0 とする。 $\beta_0 : D_0 \longrightarrow \Delta$ を $\beta_{Y/\Delta}$ の D_0 への制限、$\rho_0 : \mathfrak{X}_0 \longrightarrow D_0$ を universal family とする。 $\pi_0 : \mathfrak{X}_0 \longrightarrow \mathcal{M}$ を projection $D_{Y/\Delta} \times_\Delta Y \longrightarrow Y \longrightarrow M$ から誘導されるものとする。 $\gamma_0 = \pi \circ \pi_0$ とおく。次の可換図式が成り立つ。

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{X}_0 \arrow[dl, "\pi_0"'] \arrow[dr, "\rho_0"] \arrow[dd, "\gamma_0"] & \\
\mathcal{M} \arrow[dr, "\pi"'] & & D_0 \arrow[dl, "\beta_0"] \\
 & \Delta &
\end{tikzcd}$$

さて、次の補題を引用する。

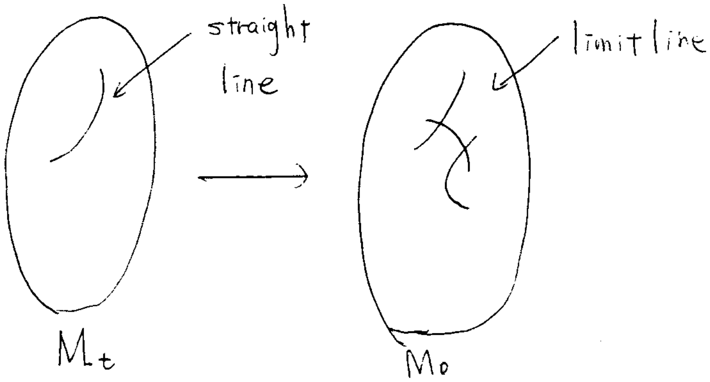
<u>Lemma</u> 3.3. 既約複素解析空間の間の morphism の可換図式

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{X} \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, "\rho"] & \\ \mathcal{M} \arrow[r, "f"'] & S & D \arrow[l, "\beta"] \end{tikzcd}$$

が与えられ β, ρ, f は proper であると仮定する。$M_{s_0} = f^{-1}(s_0)$ ($s_0 \in S$) の近傍で β が proper, flat surjective であると仮定する。さらに f は smooth で連結な fibre を持つものとする。$d_0 \in D$ を $\beta(d_0) = 0$ なる点とする。次の3条件を仮定する；(1) β は d_0 で smooth。(2) $\mathfrak{X}_{d_0} = \rho^{-1}(d_0)$ は irreducible, smooth, dim. 1。(3) $\pi(\mathfrak{X}_{d_0}) = M_{s_0}$ なる $\mathfrak{X}_{s_0}$ を含む既約成分 $\mathfrak{X}_0$ がある。$\Longrightarrow$ この時、任意の $s \in S$ と任意の $M_{s,red} = f^{-1}(s)$ の既約成分 $M_{s,k}$ に対してある $\mathfrak{X}_{s,red}$ の既約成分 $\mathfrak{X}_{s,k}$ が存在して $\pi(\mathfrak{X}_{s,k}) = M_{s,k}$ で $\dim \pi((\mathfrak{X}_{s,k})_d) = 1$ ($d \in D_{s,k}$) が成り立つ。ここで $(\mathfrak{X}_{s,k})_d = \mathfrak{X}_{s,k} \cap \mathfrak{X}_d$ ($\mathfrak{X}_d = \rho^{-1}(d)$), $D_{s,k} = \rho(\mathfrak{X}_{s,k})$。□

上の Lemma を用いて Z_0' の orbit が rational curve (の一部)になることを見よう。C を $\mathbb{P}^n$ の中の直線とする時 $H^1(C, \Theta_{\mathbb{P}^n}|_C) = 0$ なので

B_0は，D_{0t_i}の各点でsmoothである。従って，上のLemmaから容易に$\pi_0:\mathcal{X}_0 \longrightarrow \mathcal{M}$，$\delta_0:\mathcal{X}_0 \longrightarrow \Delta$は全射であり，$Z_0'$のorbitはrational curvesのZariski openになっていることがわかる。別の言い方をすれば，M_t $(t \neq 0)$の含むdeg 1の有理曲線はM_0の中の有理曲線の和に収束させることができる訳である。



さらに，有理写像$\Phi_{\nu_0}:M_0 \dashrightarrow \mathbb{P}^{N_{\nu_0}-1}$のfibresは，limit lineの1つのcomponentに一般に等っている（specialな所では限らない）。

Φ_{ν_0}のfibre（の閉包）がP_0を通ることを見よう。その為には，或る$1 \leq i \leq n$に対しe_i/e_{0j}が，少なくとも1つのfibre上non constならよい。実際$H^0(M_{t_j}, \mathcal{O}(\nu_{t_j}^{\otimes}))$の$\langle\ ,\ \rangle_{t_j}$に

関する正規直交基底を $H^0(M_0, \mathcal{O}(L_0^{\mu}))$ のベクトル部分空間の正規直交基底に収束させて(broken sections の technic を用いて)、それを使って有理写像 $\Phi_\mu : M_0 \dashrightarrow \mathbb{P}^{N_\mu+1-1}$ を作ると再び増大度より、十分大なる μ に対し Φ_μ は into bimeromorphic になることがわかる。そこで Φ_{L_0} の fibre の Φ_μ による image の次数を考えると μ になり、この事から limit rational curve は fibre (Φ_{L_0} の) になる部分以外は全て D_0 に含まれてしまうことがわかる。ところが limit line は、連続性により p_0 を通るので、これから Φ_{L_0} の fibre (の閉包) は全て p_0 を通ることになる。$\exists i$ に対して e_i/e_0 が、一般の fibre (Φ_{L_0} の) 上 nonconst になることは、p_0 と M_0 の任意の点を結ぶ limit line が存在することに注意すると(それは、簡単にわかる)、簡単に出るが長くなるので省略する。

さて、以上の準備の下にいよいよ核心的な次の lemma を証明しよう。

Lemma 3.4. $\varlimsup_{j\to\infty} \|Z_{0j}\|^{\#}_{t_j} < \infty$

(∵) 次のような μ のうち最小の μ_0 をとする。

(*) $\exists\, \hat{f}_j \in H^0(M_{t_j}, \mathcal{O}(\mathcal{K}_{t_j}^{\otimes\mu}))$ の列 $\{f_j\}$ が存在して、この部分列の limit $\hat{f}_0$ を作ったとき

$f_0 = \hat{f}_0(e_0^*)^{\mu}$ は general な Φ_{μ_0} の fibre 上 non constant。

今 $f_j = \hat{f}_j(e_0)^{\mu_0} = f_j^0 + \cdots + f_j^{\mu_0}$ と degree により分解する。つまり $Z_{0j} f_j^k = k f_j^k$。

今 $\varlimsup_{j\to\infty} \|Z_{0j}\|^{\#} = \infty$ とする。このとき

$$Z_0'^2 f_0 = \lim_{j\to\infty} Z_{0j}'^2 (f_j^0 + \cdots + f_j^{\mu_0})$$

$$= \lim_{j\to\infty} Z_{0j}' (f_j^1 + 2f_j^2 + \cdots + \mu_0 f_j^{\mu_0}) / \|Z_{0j}\|$$

$$= \lim_{j\to\infty} \{ Z_{0j}' ((1-\mu_0) f_j^1 + (2-\mu_0) f_j^2 + \cdots + f_j^{\mu_0 - 1})) / \|Z_{0j}\|$$

$$+ \mu_0 \underbrace{Z_{0j}'}_{\|Z_{0j}\|} (f_j + \cdots + f_j^{\mu_0}) \}$$

$$= \lim_{j\to\infty} (Z_{0j}' ((1-\mu_0) f_j^1 + (2-\mu_0) f_j^2 + \cdots + f_j^{\mu_0 - 1}) / \|Z_{0j}\|$$

$$= 0 \quad (\mu_0 \text{ の最小性より})$$

従って Z_0' は Φ_{μ} の一般の fibre 上では一点で2位の零をもち他では0にならない vector field である。従って結局 Z_0' は $\equiv 0$。なぜなら Z_0' は P_0 で0となり、その上にそれを通る general fibre 上 P_0 との交わりで2位の0をもつからである。これは $\|Z_0'\| = 1$ に矛盾する　　q.e.d.

4. Contractions.

α を $0<|\alpha|<1$ なる複素数とし M_0 の自己同型 $g=\exp(\log\alpha\cdot Z_0)$ を考える。 ここで、Z_0 は $\{Z_{0j}\}$ の limit である（Lemma 3.4. による）。（必要なら部分列をとる）。 exp は指数写像、$\exp: H^0(M_0, \Theta_{M_0}) \longmapsto \mathrm{Aut}_0 M_0$ である。

Z_0 は P_0 で isolated 0 をもつ 実際、$(y_1 \cdots y_n)$ を P_0 の近傍の M_0 の local coordinate とすると

$$Z_0 = \sum_{i=1}^{n} y_i \partial/\partial y_i + (\text{higher order terms})$$

なる。 なぜなら 先頭項を $\sum a_{ij} y_i \partial/\partial y_j$ として matrix (a_{ij}) を書くと $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & 1 \end{pmatrix}$ になる、これは、Bott residue が不変ということと同じだからである（各 Z_{0j} に対し同じように P_{0j} の周りの coordinate で展開すると この matrix は全て $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & 1 \end{pmatrix}$ となる。）

各 Φ_{∞} の fibre は結局 Z_0 の orbit の閉包になる。 このことから g は $[M_0 - \{Z_0$ の零 locus$\}] \cup \{P_0\}$ の contraction になることは容易に出てくる。

$\therefore [M_0 - \{Z_0$ の 0-locus$\}] \cup \{P_0\} \cong \mathbb{C}^n$

であり $g^*(e_i/e_0) = \alpha(e_i/e_0)$ となる。

これから $f_i = (e_i/e_0)$ とおくと、$(f_1 \cdots f_n)$

は $M_0 - D_0$ の global coordinate になる.

$D_i = \{0\text{-locus of } e_i\}$ とおくと同様にして $M_0 - D_i \cong \mathbb{C}^n$ が出てくる. $M_0 - D_i$ の global coordinate として $(e_0/e_i, \ldots, \widehat{e_i/e_i}, \ldots, e_n/e_i)$ がとれることは言う迄もない。これから $M_0 \cong \mathbb{P}^n$ となる。 Q.E.D.

References

[1] Fujiki. A. Deformations of Uniruled manifolds, Publ RIMS. Kyoto Univ. 17 (1981) 687–702

[2] Fujiki, A, Relative algebraic reductions and relative Albanese map for a fibre space in $\mathcal{C}$, to appear.

[3] Hirzebruch, Kodaira K.; On the complex projective spaces, J. Math. Pure Appl. 36 (1957), 201–216

[4] Kato, Ma. Complex structures on $S^1 \times S^5$, Jour. of Math. Soc. of Japan, Vol. 28 (1976) 550–576

[5] Kodaira. K. Spencer, D.C. On deformation of complex analytic structures, I, II, Ann of Math, 67 (1958), 328 ~ 466

[6] Yau. S.T., On the Ricci curvature of

compact complex Kaehler manifold and the complex
Monge-Ampéré Equation I, Comm Pure and Appl
Math. XXXI (1978), 339-411.