代数幾何学シンポジウム記録
1982年度 pp.1-17

Complete intersections with intermediate Picard number 1 defined over a number field.

東大. 理　寺杣 友秀

§0. Introduction.

k を代数閉体, $\bar{X}$ をその上の projective smooth な多様体, l を k の標数とは異なる素数とする。この時、$\bar{X}$ の codimention i の Chow group から、$2i$ 次の étale cohomology への cycle map が定義される。(SGA $4\frac{1}{2}$ P143. Milne [4] P275)

$$cl : CH^i(\bar{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_l \longrightarrow H^{2i}_{et}(\bar{X}, \mathbb{Q}_l)$$

この homomorphism の imge を algebraic cycle の空間と呼び、$C^i_l(\bar{X})$ と書く。$\dim_{\mathbb{Q}_l}(C^i_l(\bar{X}))$ は、l に independent である事が一般に期待されているが、k の標数が 0 の時には classical cohomology との comparizon theorem によって l に依らない事がわかる。以下標数が 0 の時には、この次元を $\rho^i(\bar{X})$ と書く。

さて、$\bar{X}$ が $\mathbb{P}^{n+d}$ の中の d 個の hypersurface の nonsingular な complete intersection (以下単にこれを complete intersection と呼ぶ。) の時には、

n が odd の時には、

$$\rho^i(X) = 1 \quad (0 \leq i \leq n)$$

n が even の時には、

$$\rho^i(X) \begin{cases} = 1 & (0 \leq i \leq n,\ i \neq \frac{n}{2}) \\ \geq 1 & (i = \frac{n}{2}) \end{cases}$$

となる事が、Weak Lefschetz theorem から示される。今から問題にする事は、

偶数次元 $2n$ の complete intersection $\overline{X}$ であって、

$\rho^n(\overline{X}) = 1$ となるものが存在するか、

という事である。

定義　$d \geq 1$, $\underline{a} = (a_1, \cdots, a_d)$ $(a_i \geq 2,\ i = 1, \cdots, d)$ なる時 $\mathbb{P}^{n+d}$ の smooth closed subvariety $\overline{X}$ が type $(n; \underline{a})$ の complete intersection であるとは、$\overline{X}$ が a_1次$\cdots a_d$次の hypersurface の complete intersection となることである。

先にあげた問題に関して、次の Deligne の定理がある。

Theorem 1 (SGA 7 II XIX)

$n, d \geq 1$, $\underline{a} = (a_1, \cdots a_d)$ が与えられて

(*) … $(2n; a_1, \cdots a_d) \neq (2;3), (2n;2), (2n;2,2)$

とする。この時、type $(2n; a_1, \cdots a_d)$ の complete intersection で generic なる $\overline{X}$（すなわち、定義方程式の係数が素体上互いに代数的に独立なるもの）は、$\dim_{\mathbb{Q}_\ell}(C^i_\ell(\overline{X})) = 1$ を満たす。

ここを出発点として、次の様な問題を考える事ができる。

問題：上の定理の結論が成り立つ X として、（X を体 k 上の代数多様体とした時に、$\overline{X} = X \otimes_k \overline{k}$ と書く事にする。）$\mathbb{Q}$ 上定義されたものが存在するか。

ここでは上の問題が肯定的に解決できた事を報告する。

Theorem 2.

$(2n; \underline{a})$ に関する仮定は Theorem 1 の (*) と同じであるとする。この時、$\mathbb{Q}$ 上定義された、type $(2n; \underline{a})$ の complete intersection X が存在して、$\rho^i(\overline{X}) = 1$ を満たす。

上の問いは、塩田先生によって問題にされたものである。また、加藤、織田の両氏、塩田先生から、貴重な助言を頂いた事をここに明記します。（これについては、§1と、最後のRemarkを見て下さい。）

§1. Hilbertの既約性定理と近似定理

ここではHilbertの既約性定理を使って、基本群をGalois群によって近似する事を考える。（このsectionは、加藤和也氏のideaによるものです。）

Theorem 3（Hilbertの既約性定理）

$\mathbb{Q}[t, x] \ni f(t, x)$が、$x$に関して$\mathbb{Q}(t)$上の既約多項式とする。この時、$\{t_i\}_{i=1,2,\cdots}$, $t_i \in \mathbb{Q}$が存在して、$f(t_1, x)$は、$f(t, x)$のxに関する次数と同じ次数の$\mathbb{Q}$上の既約多項式となる。（cf. Lang[3] P148 Cor 3）

この定理を基礎にして次の定理を証明する。

Theorem 4

G を $GL(n, \mathbb{Q}_\ell)$ の部分 ℓ 進 Lie group, $\mathbb{Q}(t) \supset A$ を $\mathbb{Q}$ 上有限生成なる環で、$Q(A) = \mathbb{Q}(t)$ と仮定する。$\operatorname{Spec} A$ の generic geometric point $\bar{\eta}$ を fix する。さらに下の連続全射準同型 φ が与えられているとする。

$$\varphi : \pi_1(\operatorname{Spec} A, \bar{\eta}) \twoheadrightarrow G$$

この時、$\operatorname{Spec} A$ の $\mathbb{Q}$ rational point の無限列 $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ が存在して、下の diagram において $\tilde{\varphi}_i$ は全射となる。(γ は、$\bar{\eta}$ と t_i の geometric point $\bar{t}_i$ を結ぶ path。i.e. $\bar{t}_i$ における A の strictly henselization の $\bar{\eta}$ の関数体への埋め込み。)

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\operatorname{Spec} A, \bar{\eta}) \arrow[rr, "\varphi"] & & G \\
\pi_1(\operatorname{Spec} A, \bar{t}_i) \arrow[u, "\gamma_*"] & & \\
\pi_1(t_i, \bar{t}_i) = \operatorname{Gal}(\overline{\kappa(t_i)} / \kappa(t_i)) \arrow[u] \arrow[uur, "\tilde{\varphi}_i"'] & &
\end{tikzcd}$$

(注意) $\tilde{\varphi}_i$ が全射か否かは、path γ のとり方に依らない。

Proof. G は ℓ 進 Lie group であるから、下の様な性質を持つ G の filtration が存在する。

$$G \supset G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_n \supset \cdots$$

$\bigcap_n G_n = 0$, G_i $(i \geq 0)$ は G の compact open subgroup。

さらに十分大きい i について、$\langle x^\ell \mid x \in G_i \rangle \subset G_{i+1}$ で、$\overline{[G_i, G_i]} \subset G_{i+1}$, $G_{i+1} \triangleleft G_i$ が成り立ち、G_i の元の ℓ 乗は、下の準同型を induce して、同型になる。

$$\begin{array}{ccc} G_i / G_{i+1} & \longrightarrow & G_{i+1} / G_{i+2} \\ [x] & \longmapsto & [x^\ell] \end{array}$$

定理の仮定のもとで、G は compact だから、G/G_i $(i \gg 0)$ は有限群で、(i は十分大きものを fix。) この代表系を G 内にとれば、それは G を生成する。さて、$\varphi^{-1}(G_i)$ は $\pi_1(\mathrm{Spec}\,A, \bar{\eta})$ の open subgroup でこれは $\mathrm{Spec}\,A$ の finite étale Galois covering $\mathrm{Spec}\,B$ に対応する。$Q(B)$ の $\mathbb{Q}(t)$ 上の生成元 y を A 上の整元かつ $\mathbb{Q}[t]$ 上でも整元になる様にとる。y の定義方程式は Y に関する $\mathbb{Q}[t]$ 係数 monic で、$\mathbb{Q}(t)$ 上既約である。これを、

$$Y^m + a_1(t) Y^{m-1} + \cdots + a_m(t) = 0 \quad \cdots\cdots (**)$$

とおく。

今、$t_0 \in \mathbb{Q}$ を $(t - t_0) \in \mathrm{Spec}\,A$ なる様にとった時、$(t - t_0)$ の B での分解 $\mathfrak{p}$ を定めるごとに、下の自然な写像が考えられる。

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Aut}(B/A) & \cong \pi_1(\mathrm{Spec}\,A, \bar{\eta})/\pi_1(\mathrm{Spec}\,B, \bar{\eta}) \\ \uparrow \gamma|_B & \\ \mathrm{Aut}((B/p)/(A/(t-t_0))) & \cong \pi_1(\mathrm{Spec}(A/(t-t_0)), \bar{t}_0)/\pi_1(\mathrm{Spec}(B/p), \bar{t}_0) \end{array}$$

しかも $\gamma|_B$ は、ある $\bar{t}_0$ から $\bar{\eta}$ への path から induce されたものである。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gal}((B/p)/(A/(t-t_0))) & \xrightarrow{\gamma|_B} & \mathrm{Aut}(B/A) \\ & \searrow^{\tilde{\tilde{\varphi}}_i} & \downarrow \\ & & G/G_i \end{array}$$

だから定理を示すのには、$\tilde{\tilde{\varphi}}_i$ の surjectivity が言えれば良いが、それは $\gamma|_B$ が surjective であれば十分である。故に無限個の $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ で $(t_i \in \mathbb{Q})$ (**) が既約、かつ $A/A(t-t_i) = \mathbb{Q}$ となればよい。しかし Spec A は $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ から有限個の closed point を除いたものに他ならないから、この様な $\{t_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ は、Hilbert の既約性定理から存在する。 QED.

§2. Vanishing Cycle についての Deligne の結果.

$Y \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ を代数閉体 k 上の smooth projective variety, ℓ は標数と素な素数とする。上の embedding

によって、projective linear system $\mathrm{Proj}(H^0(Y, \mathcal{O}(1)))$ を考えると、その各点 p は、$\mathbb{P}^N$ の hyperplane H_p に対応する。$\mathrm{Proj}(H^0(Y, \mathcal{O}(1)))$ の line D が Lefschetz pencil $\{Y \cap H_t\}_{t \in D}$ を定めるとは、

(1) $H_0 \cap H_\infty$ は Y と transversal に交わる

(2) $\tilde{Y} = \{(y, t) \in Y \times D \mid H_t \ni y\} \xrightarrow[pr_2]{} D$

は、D の closed pt の有限集合 S 以外で、smooth で、$s \in S$ に対し、$Y_s = Y \cap H_s$ は、高々1つの孤立特異点のみを持ち、$\tilde{Y} - \{y_s\}_{s \in S} \xrightarrow[pr_2]{} D$ は smooth.

(3) $\tilde{Y} \ni (y_s, s)$ において、pr_2 は、quadratic ordinary singularity のみをもつ

が成り立つ事である。この様な Lefschetz pencil は標数が 0 の時には Grassmann variety の中で dense に存在する事が知られている。(SGA 7 II XVII)

$D - S$ の上にある geometric point $\bar{t}$ に対して、$Y_{\bar{t}} = Y \cap H_{\bar{t}}$ と書くこれは $k(\bar{t})$ 上の variety である。

上で、$\dim Y = n+1$ として、vanishing cycle の空間を $E_v(Y_{\bar{t}}) = \mathrm{Coker}(H^n_{et}(Y, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^n_{et}(Y_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_\ell))$ と定義する。

さて vanishing cycle を $H^n_{et}(X_{\bar\eta}, \mathbb{Q}_\ell)$ の中に定義しよう。(cf. SGA 7_{II} XIII, XV). まず、local な場合に定義する。S を hensel 環の Spectrum, s を closed point, η を generic point とする。X をその上の generically smooth な、proper scheme, $X_s = X \times_S s$ には唯1つの孤立特異点 x を持ち、そこで structure morphism は quadratic ordinary singularity を持つとする。左の diagram とそれから得られる右の diagram を考える。

$$\begin{tikzcd} \bar s \arrow[r] \arrow[d] & \bar S & \bar\eta \arrow[l] \arrow[d] \\ s \arrow[r] & S & \eta \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_{\bar s} \arrow[r, "\bar i"] \arrow[d] & X_{\bar S} \arrow[d, "\varphi"] & X_{\bar\eta} \arrow[l, "\bar j"'] \arrow[d] \\ X_s \arrow[r, "i"] & X & X_\eta \arrow[l, "j"'] \end{tikzcd}$$

($\bar S$ は $\bar\eta$ の S における normalization.)

Λ を residual characteristic と素な torsion ring. X 上の Λ module の étale sheaf F に対して、Category $K(X_{\hat S}\eta, \Lambda)$ における $\bar i^*\varphi^*F \longrightarrow \bar i^* R\bar j_* \bar j^* \varphi^* F$ の mapping cone として $R\Phi(F)$ を定義する (cf. SGA 7_{II} p917) と、$F = \Lambda$ とした時、

$$\cdots \longrightarrow H^i(X_{\bar s}, \Lambda) \longrightarrow H^i(X_{\bar\eta}, \Lambda) \longrightarrow H^i(X_{\bar s}, R\Phi_{\bar\eta}(\Lambda)) \longrightarrow \cdots$$

なる長完全列が得られ、$i=n$ の時の morphism

$$H^n(X_{\bar\eta}, \Lambda) \longrightarrow H^n(X_{\bar s}, R\Phi_{\bar\eta}(\Lambda)) \cong (R^n\Phi_{\bar\eta}(\Lambda))_x$$

において、矢印の右側が rank 1 の Λ module である事から、Poincare duality によって得られる $H^n_{et}(X_{\bar\eta}, \mathbb{Q}_\ell)$ の1次元 sub $\mathbb{Q}$ space の生成元 δ で、$(\delta, \delta) = (-1)^{m}2$ なるものを vanishing cycle という。

さらに Vanishing Cycle の集合を (cf. SGA 7 II XV)

$R = \{ \delta' \mid$ すべての s と s における henselization の geometric point $\bar{\eta}$ と $\bar{t}$ を結ぶすべての path γ について考えた morphism, $\gamma_* ; H^n(Y_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\cong} H^n(Y_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_\ell)$ による $H^n(Y_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell)$ の vanishing cycle δ の image $\delta' = \gamma_* \delta \}$

と定義すると、R によって $\mathbb{Q}_\ell$ 上張られる vector space は、$E_v(Y_{\bar{t}})$ の spliting を与える。(La conjecture de Weil II Proposition 4.3.3) $H^n_{et}(Y_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_\ell)$ には monodromy 群として $\pi_1(D-S, \bar{t})$ が作用するが、$E_v(Y_{\bar{t}})$ は、$\pi_1(D-S, \bar{t})$ stable な subspace である。また、$H^n_{et}(Y_{\bar{t}}, \mathbb{Q}_\ell)$ の cup product により $E_v(Y_{\bar{t}})$ に non-degenerate な内積 ψ が定まる。そして、$\pi_1(D-S, \bar{t})$ はこの内積を不変にするから $M ; \pi_1(D-S, \bar{t}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(E_v(Y_{\bar{t}}), \psi)$ が定まる。

$\pi_1(D-S, \bar{t})$ は $\mathrm{ch}\, k = 0$ なら、Free group の profinite completion であり この topological な生成元の M による image は、Picard-Lefschetz の公式から n が even の時は、R の元に関する鏡影になっている。さらに Deligne は次の定理を示した。

Theorem 5 (La conjecture de Weil II. (4.4.1))

Ch $k \neq 2$, n = even とする。この時次のいずれかが起こる。

(i) Im M は Aut$(E_n(Y_{\bar{k}}), \psi)$ の l adic open subgroup である。

(ii) Im M は、finite group である。

§3. Theorem 2 の証明

今、complete intersection の type $(2n; a_1, \cdots a_d)$ が与えられた時、任意の $\mathbb{Q}$ 上の type $(2n+1, a_1, \cdots a_{d-1})$ なる smooth complete intersection Y を考える。実際 smooth な complete intersection が存在することは parameter space が $\mathbb{Q}$ 上の rational variety である事から明らか。

この状況から出発して、Y のある $\mathbb{Q}$ 上の smooth hyperplane section で定理を満たすものがあることをいくつかの Step に分けて示す。

Step 1 $\mathbb{Q}$ 上の Lefschetz pencil (閉体で考えた時、Lefschetz pencil の fibration になっているもの。) で smooth な fiber が type $(2n; a_1, \cdots, a_d)$ となるものがとれる。

Proof. $Y \subset \mathbb{P}^{2n+d}$ を Segre embedding によって $\mathbb{P}^N$ に embedd することにより、Y の $\mathbb{P}^N$ の hyperplane による hyperplane section がすべて type $(2n; a_1, \cdots a_d)$ となる様にできる。さらに $\check{\mathbb{P}}^N$ の中の $\check{\mathbb{P}}^1$ を parametrize する Grassmann 多様体は $\mathbb{Q}$ 上の rational variety で $\tilde{Y} \longrightarrow D$ が Lefschetz pencil の fibration になる様な $\mathbb{P}^1$ はこの Grassmann の中で open dense に存在することから Grassmann の $\mathbb{Q}$ rational point で Lefschetz pencil となるものが存在する。

Step 2. そこで $\tilde{Y} \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}} \longrightarrow D \otimes_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}$ について、§2 の事を考える。さらに今から、$(2n; a_1, \cdots a_d)$ は、Theorem 1 の $(*)$ の条件を満たしていると、仮定する。この時 M は有限群にはなり得ない事を示す。さて、$D \ni t$ について、$\overline{k(t)} \hookrightarrow \mathbb{C}$ なる embedding を1つ fix する。この時 comparison Theorem から得られる自然な射

$$H^i_{et}(Y_t \otimes_{k(t)} \overline{k(t)}, \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^i_{\mathcal{C}}(Y_t(\mathbb{C}), \mathbb{Q}_\ell)$$

は同型になり、この同型を通して次は可換で、im は dense となる。

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\overline{D}-\overline{S},\bar{t}) \arrow[rr] & & \mathrm{Aut}\,(H^{2n}_{et}(Y_t \otimes_{k(t)} \overline{k(t)}, \mathbb{Q}_\ell)) \\
\pi_{1\,an}((D-S)(\mathbb{C}),\bar{t}) \arrow[u, "\wr"] \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{Aut}\,(H^{2n}_{cl}(Y_t(\mathbb{C}), \mathbb{Q}_\ell)) \arrow[u] \\
& \mathrm{Aut}\,(H^{2n}_{cl}(Y_t(\mathbb{C}), \mathbb{Q})) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

今 $E_n(Y_{\bar{t}})_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Coker}\,(H^{2n}_{cl}(Y_t(\mathbb{C}),\mathbb{Q}) \longrightarrow H^{2n}_{cl}(Y(\mathbb{C}),\mathbb{Q}))$

とおくと、$\mathrm{Im}\,M$ が有限群なら下の同様なる自然な準同型の M' の像も有限群となる。

$$M' : \pi_{1\,an}((D-S)(\mathbb{C}),\bar{t}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(E_n(Y_{\bar{t}})_{\mathbb{Q}})$$

$\mathrm{Im}\,M'$ も indecomposable な鏡影群で、鏡影面の法線ベクトルが $E_n(Y_{\bar{t}})_{\mathbb{Q}}$ を生成するから、もし、$\mathrm{Im}\,M'$ が有限群なら $E_n(Y_{\bar{t}})_{\mathbb{Q}}$ の内積は、n が even なら positive definite, n が odd なら negative definite でなくてはならない。

そこで、$H^{2n}_{cl}(Y_t(\mathbb{C}),\mathbb{Q})$ の Hodge 分解を考えると、$E_n(Y_t)_{\mathbb{Q}}$ における cup product が definite $\Longleftrightarrow$ $H^{2n}_{cl}(Y_t(\mathbb{C}),\mathbb{Q})$ は pure Hodge type (n,n) $\Longleftrightarrow$ $(2n;\underline{a}) = (2;3), (2n;2)$ 又は $(2n;2,2)$

これは初めの仮定に矛盾する。

Step 3. $D(\mathbb{Q})$ の点を選ぶ。

§2 の Theorem 5 より $\mathrm{Im}\,M$ は open である。

故に、自然な準同型

$$\pi_1(D-S, \bar{\eta}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(E_n(Y_{\bar{\eta}}))$$

の image は $\mathrm{Aut}(E_n(Y_{\bar{\eta}}), \psi)$ の open subgroup を含む。§1 の近似定理 Theorem 4 から $D-S$ の $\mathbb{Q}$-rational point の無限列 $t_1, t_2, t_3 \cdots$ が存在して、下の図における β の image は、$\mathrm{Aut}(E_n(Y_{\bar{t}_i}), \psi)$ の open subgroup を含む。

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(D-S, \bar{\eta}) \arrow[r] & \mathrm{Aut}(E_n(Y_{\bar{\eta}})) \\
\pi_1(D-S, \bar{t}_i) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Aut}(E_n(Y_{\bar{t}_i})) \arrow[u] \\
\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \arrow[u] \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

故に、β から得られる下の準同型

$M'' : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(E_n(Y_{\bar{t}_i}) \otimes \mathbb{Q}(n))$ もやはり、$\mathrm{Aut}(E_n(Y_{\bar{t}_i} \otimes \mathbb{Q}(n), \psi)$ の open set を含む。

最後に、Step 3 での t_i の fiber $Y_{t_i} = Y \cap H_{t_i}$ が、$\rho^i(Y_{\bar{t}_i}) = 1$ を満たすことを示そう。これは、$\mathbb{Q}$ の拡大体 K 上の定義された $Y_{\bar{t}_i}$ の codimension i の cycle ξ は、$cl(\xi) \in H^{2i}(Y_{\bar{t}_i}, \mathbb{Q}_\ell(i))^{\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/K)}$ に含まれている事、及び、$\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/K)$ の $\mathrm{Aut}(E_n(Y_{\bar{t}_i}))$ に

おける image が、$\mathrm{Aut}(E_n(Y_{t_i}), \psi)$ の open subgroup を含むことからわかる。これで、$\mathbb{Q}$ 上定義された Y_{t_i} で $\rho^n(\overline{Y}_{t_i}) = 1$ なるものの存在が示された。

Remark 1.

同様に下の様な問題も考えることができる。

問題：代数体 K 上に定義された abel 多様体 A で、

$$\mathrm{End}(A \otimes_K \overline{K}) = \mathbb{Z}$$

なるものが存在するか。

これに関しては、$K = \mathbb{Q}$ の時に肯定的な解決が森[ ]によって与えられているが、この問題の延長線上に次の問題が考えられる。

問題　$\mathbb{C}$ 上の abel 多様体 A に対して、これと同型な Endomorphism ring を持つ abel 多様体で、代数体上に定義されたものがあるか。

これについても、Complete intersection の時の議論と同様の議論をすることにより、次の事がわかる。

$\mathbb{C}$ 上の abel 多様体 A に対して、$H^1(A,\mathbb{R})$ の complex structure $S^1=\{z\in\mathbb{C}^\times \mid |z|=1\} \xrightarrow[\rho]{} \mathrm{Aut}(H^1(A,\mathbb{R}))$ の image を含む最小の $\mathbb{Q}$-algebraic group を $Hg(A)$ と書き、Hodge group と言う。(これには、自然な $\mathbb{Z}$-structure がはいる。)

$\mathrm{Im}\,\rho \subset Hg(A)(\mathbb{R})$ の centralizer を $Z_{\mathbb{R}}$ と書く。さらに、下の universal な Hodge family を考える。(Deligne [2] Mumford [5])

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\pi} Hg(A)(\mathbb{Z}) \backslash Hg(A)(\mathbb{R}) / Z_{\mathbb{R}}.$$

下の仮定 (*), (**) を考える。

(*) $Hg(A)(\mathbb{Z}) \backslash Hg(A)(\mathbb{R}) / Z_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ は複素多様体として、$\mathbb{C}$ 上の quasi projective variety で、$\mathcal{A} \longrightarrow Hg(A)(\mathbb{Z}) \backslash Hg(A)(\mathbb{R}) / Z_{\mathbb{R}}$ は、代数体 K 上の variety の K homomorphism から得られる。

(**) $Hg(A)(\mathbb{Z})$ は、$Hg(A)$ の中で zariski dense.

上の仮定 (*)(**) のもとで、ある代数体 K' 上に定義された abel 多様体 B で、

$\mathrm{End}(A)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} \cong \mathrm{End}(B\otimes_{K'}\overline{K'})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ となるものが存在する。

Remark 2. また下の事も同様の議論をする事により、示すことができる。

X を代数体 K 上の projective smooth algebraic variety とする。この時、X に関して下の意味で、Tate 予想が成り立っているとする。

$$\rho^i(\overline{X}) = \dim_{\mathbb{Q}_\ell}\left(\bigcup_{H \subset \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)} H^{2i}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(i))^H\right)$$

この時、X の open hyperplane section X_t で K 上定義されていて、

$$\rho^i(\overline{X}_t) = \dim_{\mathbb{Q}_\ell}\left(\bigcup_{\substack{H \subset \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \\ \text{open}}} H^{2i}(\overline{X}_t, \mathbb{Q}_\ell(i))^H\right)$$

が成り立つものが存在する。(cf Lang[ ] P151 Prop3).

文献 [1] Deligne.P, La Conjecture de Weil II., Publ. Math. IHES

[2] Deligne.P, Travaux de Shimura, Sém. Bourbaki 1970/1971 Expose 389. Lecture Note in Math 224. Springer

[3] Lang. S, Diophantine Geometry, Interscience (1962)

[4] Milne, S, Etale cohomology, Princeton U.P. (1980)

[5] Mumford. D. A Note on Shimura's paper "Discontinuous group and abelian varieties" Math. Ann. 181 (1969)