代数幾何学シンポジウム記録
1983年度 pp.168-176

極小モデルと退化

阪大　角田秀一郎

§1. はじめに，1981年城ノ崎シンポジウムにおける筆者の拙文に誤りがありましたので，訂正させていただきます．

非特異射影多様体 $\mathfrak{X}$ と非特異曲線 Δ との間の全射 $\pi : \mathfrak{X} \to \Delta$ で次の条件を満たすものを考えます：

(i) $\pi^{-1}(p)$ は，reduced で連結，かつ単純正規交叉，ここで p は Δ の任意の点，

(ii) $\pi^{-1}(p)$ が非特異ならば，$\pi^{-1}(p)$ の標準因子 $K(\pi^{-1}(p))$ は nef．

この条件のもとで，結論は次の通り，

定理．正規射影多様体 $\mathfrak{Y}$ と双有理写像 $\varphi : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ があって

(i) $\pi' = \pi \cdot \varphi^{-1}$ は正則写像，

(ii) φ は特異ファイバーの外で同型，

(iii) $\mathfrak{Y}$ は高々 terminal 特異点，(定義については，本報告集川又氏の論文参照)，

(iv) $K(\mathfrak{Y})$ は π' に関して，相対的 nef．

前の拙著において，$\mathfrak{Y}$ の満たすべき特異点が間違っていました．これから，この特異点について説明します．そのために，2つの概念を導入します(実は本質的に同じものです)．

定義1．$\pi : \mathfrak{X} \to \Delta$ は前の通りとします．双有理写像の列

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}_n \xrightarrow{f_n} \mathfrak{Y}_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \mathfrak{Y}_{n-2} \cdots \to \mathfrak{Y}_1 \xrightarrow{f_1} \mathfrak{Y}_0 = \mathfrak{Y}$$

が次の条件を満たすとする：

(1) f_i は $\mathcal{Y}_i$ 上のある特異ファイバーに含まれる素因子 D_i を点につぶす，

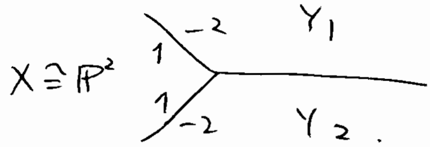
(2) $-K(\mathcal{Y}_i)|_{D_i}$ は ample であり，
$\mathrm{rank}(\mathrm{Pic}(\mathcal{Y}_i)\otimes\mathbb{Q} \to \mathrm{Pic}(D_i)\otimes\mathbb{Q}) = 1$，

(3) X がある $\mathcal{Y}_i$ の特異ファイバー F の素因子であれば，$(X, (F-X)|_X)$ は高々 log. terminal 特異点，X の全ての proper transform は，minimal resolution.

このとき，$\mathcal{Y}$ は高々特別 terminal 特異点をもつと定義します．この定義についてすこし注意しますと，まず，(1)の条件から帰納的に，π から誘導される有理写像は正則になることがわかります．(2)の条件からこれも帰納的に $\mathcal{Y}_i$ がすべて terminal 特異点のみもつことがわかり，したがって(2)も意味をもちます．(1),(2)は，terminal 特異点に対する条件としてそれほど強いものではありません(この報告集の川又氏，森氏の論文参照)．

次に特別 terminal 特異点の例を上げます．実は，これらが，ある意味で特別 terminal 特異点を特徴づけます．

例1．$\mathcal{Y}$，π を上の通りとし，F を特異ファイバーとします．以下この記号を使います．F が $F = X + Y_1 + Y_2 + Z$ という分解をもつと仮定します，ここで X，Y_1，Y_2 は既約で，Z は残りです．さらに，X は $\mathbb{P}^2$ と同型で，X，Y_1，Y_2，Z の configuration は次の図のようだとします；



ここで ― は double curve, double curve の両わきの数はそれぞれその double curve を含む素因子(=既約曲面)内での交点数をあらわします。

つまり, 言葉で書けば, X は, Y_1, Y_2 とのみ交わりその交わりは $\mathbb{P}^2$ の line で, Y_1, Y_2 内では X の決める double curve は -2 の自己交点数をもつ。

このとき, X の contraction は, 特別 terminal 特異点をもつことが容易に check されます。

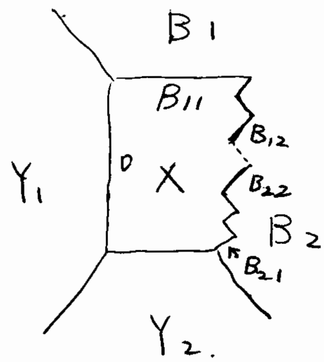
これをもとに, corbel type の特異点を定義します。

まずは, 例1の特異点は corbel type とします。

次に帰納的に次のように corbel type を定義する。

例2. $F = B_1 + B_2 + X + Y_1 + Y_2 + Z$ を, F の分解で次のようなものとします;

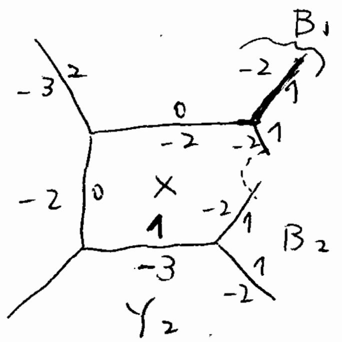
B_1, B_2 は, corbel type の特異点を定義し, X, Y_1, Y_2 は既約, Z は残りとします, また, B_1, B_2, X, Y_1 と Y_2 の配列は, 次の通り;



ここで, ---- は $\overbrace{(-1)\ \text{curve}}^{B_2 \neq 0\ \text{のとき}}$ ($\overbrace{0\text{-curve}}^{B_2 = 0\ \text{のとき}}$),

言葉で書けば，B_1は，XとY_1にのみ交わり，B_2はXとY_2に交わり，Xは有理曲面であるrulingに対して，fiberに含まれる(-1) curveが高々1本とします。ここで，$Y_1' = Y_1|X$，$Y_2' = Y_2|X$，$B_1' = B_1|X$，$B_2' = B_2|X$とおけば，Y_1'は上のrulingに対するfiber，Y_2'はsection。B_1'とB_2'は帰納的に，linear chainであることがわかります，したがって，B_1' (resp. B_2') は二つの端成分B_{11} B_{12} (resp. B_{21}，B_{22}) をもちます。ここで，B_{11}はY_1と交わり，B_{21}はY_2と交わるとします。とすると，B_{11}はsectionで，Y_2'とは交わらず，$B_1' - B_{11}$とB_2'と(-1) curveが，Xのrulingに関する特異ファイバーを構成し，(-1) curveはB_{12}とB_{22}に交わる。

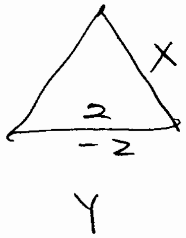
この場合，B_1+B_2+Xは特別terminal特異点につぶすことができます。これをcorbel typeの特異点とします。ひとつ例を書いておきますと，

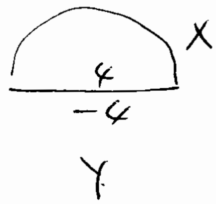


次に，rod typeの特異点を定義します。

例13.　$F = Y + X + Z$なる分解で，Xは$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ or $\mathbb{P}^2$で，XはYのみと交わり，

$\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ のときは double curve は，自己交点数2をもつ非特異有理曲線，$\mathbb{P}^2$ のときは，conic．



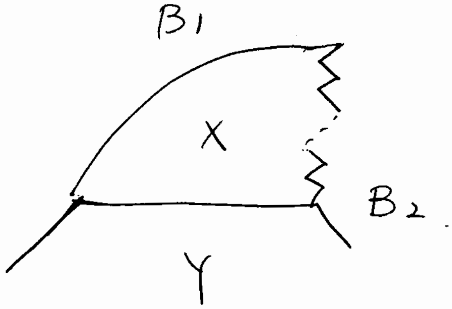


このとき，Xは特別 terminal sing を定義する，cabel type のときと同様に，帰納的に，rod type を定義します．すると，例3の特異点は rod type です．

例4．　$F = B_1 + B_2 + X + Y + Z$ が次のような分解とします；

(i) B_1，B_2 は cabel type の特異点を定義し，Xは有理曲面で，ある ruling に対して，(−1) curve を高々一本しかもたないものとします，

(ii) B_1，B_2，X，Y の配列は次の通り，



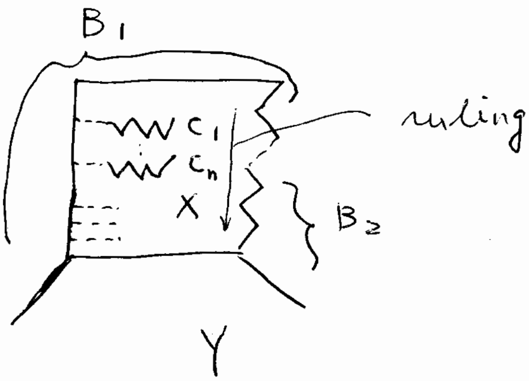
すなわち，$B_1' = B_1|_X$，$B_2' = B_2|_X$　$Y' = Y|_X$ とおけば，Y' はその ruling に関して section となり，B_1' の Y と交わる component（曲線）がまた section で，B_1' の残りと B_2' と (−1) curve が特異ファイバーを

捕約して、(-1) curve は、B_1', B_2' の edge component と交わる。
このとき、B_1+B_2+X の contraction は特別 terminal 特異点となります。これも rod type のひとつと定義します。

例.5. $F = B_1+B_2+X+Y+C_1+\cdots+C_n+Z$ を次のような分解とする;

(i) B_1, B_2 は wheel type の特異点を定め、$C_1, \ldots, C_n$ は rod type の特異点で、$C_1|X, \ldots, C_n|X$ は cyclic 有理2重点の minimal resolution とし、

(ii) $B_1+B_2+X+Y+C_1+\cdots+C_n$ の配列は次の通り;



$Y' = Y|X$　$B_1' = B_1|X$, $B_2' = B_2|X$, $C_i' = C_i|X$ とおく。B_1, B_2 ともに X, Y と交わる。X はある ruling をもつ。B_1' の edge component で Y と交わる曲線と $C_1', \ldots, C_n'$ といくつかの (-1) curve がある fiber をつくる。さらにすべての (-1) curve は B_1' の edge component と交わるとする。また、この edge component と交わる B_1' の component は section となり、その他の

component とひとつの(-1) curve と B_2 が別の fiber を構成する。 B_1 の別の edge component と (-1) curve が交わり, B_2 の edge component で Y と交わらない方が (-1) curve と交わる. Y は section.

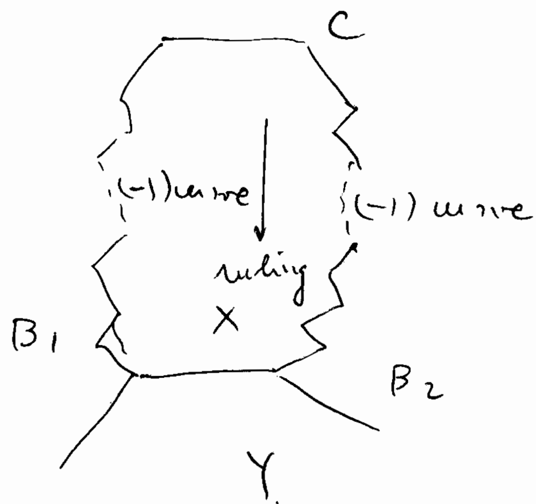
このとき, $B_1+B_2+C_1+\cdots+C_n+X$ は, 特別 terminal 特異点を定義し, これも rod type の特異点と定めます,

例16. $F = B_1+B_2+C+X+Y+Z$ を次のように分解とします;

(i) B_1, B_2 は corbel type の特異点,

(ii) C は rod type の特異点,

(iii) $B_1+B_2+C+X+Y$ の配列は次の通り:



言葉での説明は略します.

この場合も, B_1+B_2+C+X の contraction は, 特別 terminal sing. となります.

例3〜例6までの特異点が rod type の特異点です。最後に、exceptional type の特異点を定義します。$p \in \mathcal{V}$ を特別 terminal 特異点で、p は double curve に含まれないとします。このとき、p が有理2重点で、cyclic sing. でないとするとき、p を exceptional type の特異点と呼びます。次の命題が定理の証明のひとつの key になります。

命題. 特別 terminal sing. は、corbel type、rod type、exceptional type の特異点となる、すなわち、ある resolution をとると、上のそれぞれと一致する。

証明の方針は、前の報告と同様なので略し、以下城崎でお話したことの補足等をしてみたいと思います。

§2. V を射影代数多様体とします。V は高々 terminal 特異点のみを許すとします。極小モデルの存在がわかれば、次の2つの case に V の研究が帰着されます(　　　　これについては川又氏の論文を参照してください):

case 1. $-K_V$ が ample

case 2. K_V が nef.

case 1 について予想されることは、次です

予想1. $-K_V$ が ample であれば、V は rationally connected、すなわち、V の任意の2点は rational curve の chain で結べる。

この予想に関して，次の定理があります．

定理（森，Kollár） Vが非特異であれば，Vの任意の点を通る有理曲線が存在する．

case 2について予想されることは，

予想2，ある $m>0$ が存在して，mK_V が global sectionsで生成される．

この予想に関して，知られていることは，非常に少く，一般次元では次の川又氏による2つの定理だけです，

定理． case 2の仮定のもとで，

(i) K_Vが numerically trivial

(ii) $K_V^n > 0$ $n = \dim V$

のいずれかを満たせば，予想2は正しい，ただし標数は0とする．

興味ある問題としては標数が正のとき，この定理は成立するかというのが残っています，また予想2の弱い形の次もまだ解けていません．

予想2′： case 2の仮定のもとで，$\kappa(V) \geq 0$，

ここでκは小平次元です，

この予想2′について，3次元の場合に，$\chi(V, \mathcal{O}_V) \leq 0$ がわかれば，予想2′がO.K.ということがわかっています，