代数幾何学シンポジウム記録
1983年度　pp.162-167

$\mathfrak{M}_g$ $(g=11,12,13)$ の unirationality について
(Chang と Ran の仕事)

京大数研　R. Hartshorne

§0. 序

基礎体 k を char.k ≥ 0 の代数閉体とし、$\mathfrak{M}_g$ を genus g の曲線の variety of moduli とする。表題に述べた結果は次の通りである:

定理 0.1 (Chang と Ran [2]). $g=11,12,13$ の場合, $\mathfrak{M}_g$ が unirational である。

前に知られた結果は次のようである。$g \leq 10$ の場合,「古典的に」Severi [12] 1915 によって示されたように, $\mathfrak{M}_g$ が unirational である。Severi は任意の g についても, $\mathfrak{M}_g$ が unirational であることを予想した。Severi の結果の現代的な証明は Arbarello と Sernesi [1] によって与えられている。

$g \geq 11$ の場合について, Sernesi [10] は $\mathfrak{M}_{12}$ が unirational であることを証明した; 森と向井[7]は $\mathfrak{M}_{11}$ は uniruled ($\mathbb{P}^1 \times$(何か)の quotient) ということを証明した。

Genus g が大きい場合には, Mumford と Harris [8] は $g \geq 23$, g: odd の場合 $\mathfrak{M}_g$ が general type ということを証明した。最近, Eisenbud と Harris ([3] 参照) は $g \geq 24$ ならば $\mathfrak{M}_g$ が general type ということを証明したそうである。

Chang と Ran の証明の方針は, 前の証明と違って, まず $\mathbb{P}^3$ の中である曲線の good family を構成して, 次にその曲線に $\mathbb{P}^3$ 上の rank 3 vector bundle を対応させる。このようにして得られた vector bundle はすべてある monad で作られていて, その monad の全体が rational であるから, $\mathfrak{M}_g$ が unirational であることが証明される。

§1. Good curves の構成.

kを代数閉体をfixする。この報告では，$g=11$ の場合だけを扱う。$g=12, 13$ の場合も同様に扱われる（Chang と Ran の仕事を参照）。

<u>定理 1.1.</u> $\mathbb{P}^3$ の中に次の性質を持つ degree 12 と genus 11 の既約非特異曲線 Y が存在する。

L) Y は linearly normal.

M) $\mu_0(Y): H^0(\mathcal{O}_Y(1)) \otimes H^0(\omega_Y(-1)) \longrightarrow H^0(\omega_Y)$ は injective.

R) Y は maximal rank をもつ.

S) $\varphi: H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(3)) \otimes H^0(\omega_Y(-1)) \longrightarrow H^0(\omega_Y(2))$ は injective.

ここで Y が <u>linearly normal</u> というのは，$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_Y(1))$ が surjective ということである。Y が <u>maximal rank</u> をもつということは，$\forall n \geq 0$，$\rho(n): H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_Y(n))$ の restriction map が maximal rank をもつ（すなわち $\rho(n)$ は injective 又は surjective）ということである。

この定理を証明するには，次の結果を使う。

<u>定理 1.2.</u> (Sernesi [11]) Y_0 を $\mathbb{P}^3$ の既約非特異曲線とする。H が general plane で，C が H の中の conic で，C は Y_0 と r 点で交わるとする。そうすると

a) $H^1(\mathcal{N}_{Y_0})=0$ で $r \leq 5$ ならば，$Y=Y_0 \cup C$ は smoothable かつ $H^1(\mathcal{N}_Y)=0$。

b) Y_0 が linearly normal，$\mu_0(Y_0)$ が maximal rank をもつ，$r \leq 4$ ならば，Y は linearly normal かつ $\mu_0(Y)$ は maximal rank をもつ。

さて，定理 1.1 を証明するために，次の構成を考える。Y_0 を degree 8 と genus 5 の $\mathbb{P}^3$ の一般曲線とする。Y_0 は nonspecial ($H^1(\mathcal{O}_{Y_0}(1))=0$) で，$Y_0$ は cubic surface に含まれていない maximal rank をもつ曲線であることが知られている。（例えば，Gruson と Peskine [4] 参照。）H_1, H_2 を general planes とし，C_1, C_2 を

H_1 と H_2 の中の conics として，$Y_0 \cap C_1 = 4$ 点，$Y_0 \cap C_2 = 4$ 点となっているとする。すると $Y = Y_0 \cup C_1 \cup C_2$ は degree 12, $p_a = 11$ の曲線である。Sernesi の結果 (1.2) を適用して，Y は smoothable かつ linearly normal で，$\mu_0(Y)$ は maximal rank である。$h^0(\omega_Y(-1)) = 2$ で $h^0(\omega_Y) = 11$ だから，$\mu_0(Y)$ は injective. ゆえに，Y の general deformation は (1.1) の性質 L), M), R) を持つ曲線である。

定理 1.1 の証明の一番 delicate な部分は性質 S) の証明である。その証明は技術的なので，ここでは省略する。

系 1.3. Y を定理 1.1 の性質をもつ曲線とする。すると，Hilbert scheme H は，Y に対応する点 $y \in H$ で smooth，かつ y の近傍 U から $\mathfrak{M}_{11}$ への morphism は dominant である。

実は，$H^1(\mathcal{N}_Y) = 0$ ということから，H が smooth であることが分かる。さらに $\mu_0(Y)$ が injective であるから，$H^1(T_{\mathbb{P}^3} \otimes \mathcal{O}_Y) = 0$ ということがすぐ分かって，従って $H^0(\mathcal{N}_Y) \longrightarrow H^1(T_Y)$ は surjective である。$H^0(\mathcal{N}_Y)$ と $H^1(T_Y)$ は Hilbert scheme と variety of moduli それぞれの Zariski tangent space であるから，$U \longrightarrow \mathfrak{M}_{11}$ という morphism は dominant である。

§ 2. Vector bundle の構成.

Y を (1.1) の性質を持つ曲線とする。性質 S) から，$\omega_Y(-1)$ が section で生成されることは明らかである。$\xi_1, \xi_2 \in H^0(\omega_Y(-1))$ を sheaf $\omega_Y(-1)$ を生成する section とする。これらの section を使って，通常の方法で（例えば [5] (4.1) を参照），$\mathbb{P}^3$ 上の rank 3 vector bundle を構成する。この vector bundle $\mathcal{E}$ と曲線 Y の関係は次の exact sequence で表わされている。

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^2 \longrightarrow \mathcal{E}(2) \longrightarrow \mathcal{I}_Y(5) \longrightarrow 0 .$$

Y の性質から，$\mathcal{E}$ の cohomology が次のように計算出来る。

説明. 1. Y が maximal rank をもつから，$h^0(\mathcal{I}_Y(4)) = 0$ となり，ゆえに $h^0(\mathcal{E}(1)) = 0$。

2. Y が maximal rank をもつから，$h^1(\mathcal{I}_Y(5))=0$ となり，ゆえに $h^1(\mathcal{E}(2))=0$ 。

3. Y が linearly normal で，$h^1(\mathcal{I}_Y(1))=0 \Rightarrow h^1(\mathcal{E}(-2))=0$.

4. $H^0(\omega_Y(-1))$ は ξ_1, ξ_2 で生成されているから，$h^2(\mathcal{E}(-2))=0$ 。

5. 性質 5) によって，$h^2(\mathcal{E}(-5))=0$ 。

6. $\mu_0(Y)$ は injective だから，$h^3(\mathcal{E}(-3))=0$ 。

$h^i(\mathcal{E}(l))$

$i=$									
3	*	*	$0^{6)}$	0	0	0	0	0	0
2	$0^{5)}$	*	*	$0^{4)}$	0	0	0	0	0
1	0	0	0	$0^{3)}$	*	*	*	$0^{2)}$	0
0	0	0	0	0	0	0	$0^{1)}$	*	*
$l=$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3

なお，$c_1(\mathcal{E})=-1$ で，$h^0(\mathcal{E})=0$，$h^0(\mathcal{E}^\vee(-1))=h^3(\mathcal{E}(-3))=0$ だから，$\mathcal{E}$ は stable である。$\mathfrak{M}_\mathcal{E}$ を $\mathcal{E}$ と同じ Chern class を持つ rank 3 stable vector bundle の moduli space とする。$h^1(\mathcal{E}(2))=h^2(\mathcal{E}(2))=h^3(\mathcal{E}(2))=0$ だから，$\mathcal{E}$ の local deformation $\mathcal{E}'$ を考えると，$h^0(\mathcal{E}'(2))=h^0(\mathcal{E}(2))$ 。従って，$\mathcal{E}'(2)$ の general section を二つ取って，再び Y と同じ性質を持つ曲線 Y' を得る。だから $\mathfrak{M}_\mathcal{E}$ の open subset $U_\mathcal{E}$ と $U_\mathcal{E}\times H^0(\mathcal{E}(2))$ の open subset $V_\mathcal{E}$ が存在して，$V_\mathcal{E}$ から Y の Hilbert scheme H への dominant morphism がある。

§ 3. Monads.

Horrocks [6] の定義によって，<u>monad</u> は sheaf $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ と morphism $\alpha:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$; $\beta:\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ の組で，α は injective，β は surjective，$\beta\circ\alpha=0$ なるものである。$\mathcal{E}=\ker\beta/\mathrm{im}\,\alpha$ を monad の <u>cohomology sheaf</u> という。Monad の重要さは，いろいろな vector bundle がある monad の cohomology の形で表わされるからである。我々の場合には，次の結果を使う。

<u>定理 3.1.</u> (Horrocks, Barth, Hulek, Drinfeld, Manin, Beilinson : [9] 参照) $\mathcal{E}$ を $\mathbb{P}^3$ 上の coherent sheaf とすると，次の性質は互いに同値である。

(i) monad

$$\mathcal{O}(-1)^a \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}^b \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}(1)^c$$

が存在して，$\mathcal{E} = \ker\beta/\mathrm{im}\,\alpha$ とかける。

(ii) $h^0(\mathcal{E}(\ell)) = 0 \quad \forall \ell \leq -1$

$h^1(\mathcal{E}(\ell)) = 0 \quad \forall \ell \leq -2$

$h^2(\mathcal{E}(\ell)) = 0 \quad \forall \ell \geq -2$

$h^3(\mathcal{E}(\ell)) = 0 \quad \forall \ell \geq -3$ 。

(iii) $h^0(\mathcal{E}(-1)) = 0$, $h^1(\mathcal{E}(-2)) = 0$, $h^2(\mathcal{E}(-2)) = 0$, $h^3(\mathcal{E}(-3)) = 0$.

(i) ⇒ (ii) → (iii) は明らかで，(iii) → (i) は Beilinson の定理を使って，すぐに証明できる。

<u>系 3.2.</u> §2 の性質を持つ vector bundle $\mathcal{E}$ は，

$$\mathcal{O}(-1)^3 \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}^{10} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}(1)^4$$

の形の monad の cohomology sheaf である。さらに，$h^2(\mathcal{E}(-5)) = 0$ だから，$h^1(\mathcal{E}^\vee(1)) = 0$ 。したがって，

$$h^0(\alpha^\vee(1)) : H^0(\mathcal{O}(1))^{10} \longrightarrow H^0(\mathcal{O}(2))^3$$

が surjective である。

<u>命題 3.3.</u> $h^0(\alpha^\vee(1))$ が surjective となる

$$\mathcal{O}(-1)^3 \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}^{10} \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}(1)^4$$

の形の monad の全体は rational variety である。

<u>証明.</u> まず，$H^0(\mathcal{O}(1))^3$ の general section を 10 個を取って，$\alpha^\vee : \mathcal{O}^{10} \longrightarrow \mathcal{O}(1)^3$ という morphism を定める。次に，$\ker h^0(\alpha^\vee(1))$ の section を 4 つ取って，morphism $\beta^\vee$ を定める。これらの choice は皆 rational であるから，こういう monad の全体は rational variety である。

<u>定理 0.1 の証明.</u> Monad から vector bundle が得られ，vector bundle から curve が得られるので，Hilbert scheme から $\mathfrak{M}_{11}$ への morphism が dominant であることを用いて，$\mathfrak{M}_{11}$ が unirational であることが分かる。

文献

1. Arbarello, E., Sernesi, E., The equation of a plane curve. Duke Math. J. 46 (1979) 469-485

2. Chang, M.-C., Ran, Z., Unirationality of the moduli space of curves of genus $g = 11, (12), 13$. Invent. math. (to appear)

3. Cornalba, M., Systèmes pluricanoniques sur l'espace des modules des courbes et diviseurs de courbes k-gonales, Sém. Bourbaki 615 (1983)

4. Gruson, L., Peskine, C., Genre des courbes de l'espace projectif. in: Algebraic Geometry (Tromsø). Springer LNM 687 (1978) 31-59.

5. Hartshorne, R., Stable reflexive sheaves, Math. Ann. 254 (1980) 121-176.

6. Horrocks, G., Vector bundles on the punctured spectrum of a local ring. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 14 (1964) 689-713.

7. Mori, S., Mukai, S., The uniruledness of the moduli space of curves of genus 11. (preprint)

8. Harris, J., Mumford, D., On the Kodaira dimension of the moduli space of curves, Invent. math. 67 (1982) 23-87.

9. Okonek, C., Schneider, M., Spindler, H., Vector bundles on complex projective spaces, Birkhäuser (1980)

10. Sernesi, E., L'unirazionalità della varietà dei moduli delle curve di genere dodici. Ann. Sci. Norm. Sup. Pisa 8 (1981) 405-439.

11. Sernesi, E., On the existence of certain families of curves. (preprint)

12. Severi, F., Sulla classificazione delle curve algebriche ... Rend. R. Acc. Naz. Lincei (5) 241 (1915) 877-888.