代数幾何学シンポジウム記録
1983年度 pp.132-140

Hilbert modular 曲面の 巾についてのHodge予想

東京電機大 理工 硲 文夫

§1. 定 義

Fを実2次体，$\mathcal{O}_F$をその整数環とする。Fの元 α に対し，その$\mathbb{Q}$上の共役を α' と書くことにすると，$\alpha \mapsto (\alpha, \alpha')$ は，埋め込み $F \hookrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$，更に，$SL_2(F) \hookrightarrow SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})$ を定義する。上半平面 H には $SL_2(\mathbb{R})$ が一次分数変換として作用するから，その積として，$SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})$ が $H \times H$ に作用し，上の埋め込みと合成して，$SL_2(F)$ の $H \times H$ への作用が得られる。$\Gamma = SL_2(F)/\{\pm 1\}$ とおいて $S = \Gamma \backslash H \times H$ という商空間が得られ，これを Hilbert modular 曲面と呼ぶ。以下では S のコンパクト化の極小な resolution を $\tilde{S}$ と書き，これも Hilbert modular 曲面と呼ぶことにする。もう少しことばを導入する。$SL_2(\mathcal{O}_F)$ に関するウェイト2の cusp form の空間を $S_2(SL_2(\mathcal{O}_F))$ と書き，cusp form が Hecke 作用素の同時固有関数であるとき，primitive form と言う。

§2. Oda's Theory ([O])

以下，Fの類数は1であり，$\mathcal{O}_F$の unit ε で $\varepsilon\varepsilon' = -1$ なるものが存在すると仮定する。$W_2H^2(S, \mathbb{Q})$ の中で

automorphic factor $(\gamma z_1+\delta)^2$, $(\gamma' z_2+\delta')^2$ から生ずる line bundle ($\tilde{S}$ 上の) $\tilde{L}_1$, $\tilde{L}_2$ の class の直交補空間を $H^2_{sp}(S,\mathbb{Q})$ と書く。そして，Hecke 環を $\mathfrak{A}$ と書き，その $\mathrm{End}(H^2_{sp}(S,\mathbb{Q}))$ での image によって $\mathbb{Q}$ 上生成される部分環を $\mathfrak{A}_0$ と書く。互いに "companion" である ([O, Ch.1, 2.6]) という同値関係で primitive form を類別したときの代表元の集合を fix し Ξ と書く。すると，次の"固有空間分解"が得られる：

$$\mathfrak{A}_0 \cong \bigoplus_{f\in\Xi} K_f ,$$

$$H^2_{sp}(S,\mathbb{Q}) \cong \bigoplus_{f\in\Xi} H_f ,$$

ここに K_f は f の固有値でされる総実代数体，H_f はその上に K_f が Hodge 構造の準同型として作用するある偏極 rational Hodge 構造である。さて，ようやく，Oda's Theory の主定理の一つを述べることができる。

定理 (2.1) $\mathrm{End}^0 A_f^i \supset K_f$ なるアーベル多様体 A_f^i ($i = 1, 2$) が存在して，Hodge 構造の同型として，

$$H_f \cong H^1(A_f^1,\mathbb{Q}) \otimes_{K_f} H^1(A_f^2,\mathbb{Q})$$

が成り立つ。更に上の同型は K_f の作用と compatible である。

§3. 主定理

定理（3．1） 以上の記号の下で，更に（2．1）の A_f^1 と A_f^2 とが同じアーベル多様体 A_f に K_f-同種であると仮定する。そして

$$\mathrm{End}^0\left(\prod_{f\in\Xi} A_f\right) \cong \prod_{f\in\Xi} K_f$$

が成り立っていると仮定する。このとき

$$\mathcal{B}^*(\tilde{S}^n) = \mathcal{C}^*(\tilde{S}^n)$$

がすべての n について成り立つ。更に $n=2$ については

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{B}^2(\tilde{S}\times\tilde{S})/\mathcal{D}^2(\tilde{S}\times\tilde{S}) = \sum_{f\in\Xi}[K_f:\mathbb{Q}]$$

$$= p_g(\tilde{S})$$

が成り立つ。

注意． $\mathcal{B}^*(X) = \bigoplus_{d=0}^{\dim X}(H^{2d}(X,\mathbb{Q}) \cap H^{d,d}(X))$,

$\mathcal{C}^*(X) = \mathcal{B}^*(X)$ の algebraic cycle で生成される部分環，

$\mathcal{D}^*(X) = \mathcal{B}^*(X)$ の divisor class で生成される部分環，

なる記号を用いた。複素数体上定義された非特異射影多様体 X について $\mathcal{B}^*(X) = \mathcal{C}^*(X)$ が成り立つであろう，というのが Hodge 予想であるが，上の（3．1）はそれがある仮定の下で $\tilde{S}^n$ について成り立つという主張である。従って，実際にその仮定（かなりたくさんの）をみたすような $\tilde{S}$ が存在するかどうかが問題となるが，次の定理はその例を与える。

定理（3．2）　Fの判別式をDとする。そのDが次の条件をみたすとする：

$$D \equiv 1 \pmod 4 \quad \text{かつ} \quad D \leq 181$$

あるいは，

$$D = 197,\ 269,\ 293,\ 317.$$

そのとき，対応する Hilbert modular 曲面$\tilde{S}$について

$$\mathcal{B}^*(\tilde{S}^n) = \mathcal{C}^*(\tilde{S}^n).$$

§4．定理（3．1）の証明．

$n=2$ のときの証明を与える。まず $\tilde{S}$ は regular なので（[HV, Prop. II. 4]）$H^4(\tilde{S}\times\tilde{S}, \mathbb{Q})$ の Künneth 分解は

$$\begin{aligned} H^4(\tilde{S}\times\tilde{S}, \mathbb{Q}) \cong & (H^0(\tilde{S},\mathbb{Q})\otimes H^4(\tilde{S},\mathbb{Q})) \\ & \oplus (H^4(\tilde{S},\mathbb{Q})\otimes H^0(\tilde{S},\mathbb{Q})) \\ & \oplus (H^2(\tilde{S},\mathbb{Q})\otimes H^2(\tilde{S},\mathbb{Q})) \end{aligned}$$

となる。従って，$H^2(\tilde{S},\mathbb{Q})\otimes H^2(\tilde{S},\mathbb{Q})$ を考察すればよい。更に次の

命題（4．1）（[O, Remark 1. 13]）
偏極有理 Hodge 構造として

$$\begin{aligned} H^2(\tilde{S},\mathbb{Q}) \oplus (\oplus\, \mathbb{Q}(-1)) & \\ & \cong H^2_{sp}(S,\mathbb{Q}) \oplus (\oplus\, \mathbb{Q}(-1)), \end{aligned}$$

ここに，$\mathbb{Q}(-1)$ は ウェイト2の "Tate" Hodge 構造．

と，Lefschetz の定理 "$\mathcal{B}^1(X) = \mathcal{D}^1(X)$" より，$H^2_{sp}(S,\mathbb{Q})\otimes H^2_{sp}(S,\mathbb{Q})$ を考察すればよいことになる。その上，（3．1）の仮定と定理（2．1）を考慮すれば，結局，$V_f = H^1(A_f,\mathbb{Q})$ として，$(V_f \otimes_{K_f} V_f) \otimes_{\mathbb{Q}} (V_f \otimes_{K_f} V_f)$

の Hodge 構造を考察すればよくなる。ところが，V_f の Hodge 構造は A_f の Hodge 群 $Hg(A_f)$ の表現としてとらえることができるから，$Hg(A_f)$ の構造がわかればよい。つまり，

$$\dim_{\mathbb{Q}}[(V_f \otimes_{K_f} V_f) \otimes_{\mathbb{Q}} (V_f \otimes_{K_f} V_f) \text{ の } (2,2)\text{-part}]$$

$$= \dim_{\mathbb{Q}} [(V_f \otimes_{K_f} V_f) \otimes_{\mathbb{Q}} (V_f \otimes_{K_f} V_f)]^{Hg(A_f)}$$

$$= \dim_{\mathbb{C}} [((V_f \otimes_{K_f} V_f) \otimes_{\mathbb{Q}} (V_f \otimes_{K_f} V_f)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}]^{Lie(Hg(A_f)_{\mathbb{C}})}$$

として，Hodge cycle $\mathcal{B}^2(\tilde{S} \times \tilde{S})$ の本質的な部分をとらえることができる。さて，上の等式の右辺の [ ] の中の部分は，$Hom(K_f, \mathbb{C}) = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_{d_f}\}$ ($d_f = [K_f : \mathbb{Q}]$) として，

$$((V_f \otimes_{K_f} V_f) \otimes_{\mathbb{Q}} (V_f \otimes_{K_f} V_f)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

$$\cong ((V_f \otimes_{K_f} V_f) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} ((V_f \otimes_{K_f} V_f) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})$$

$$\cong [\bigoplus_{\sigma_i} ((V_f \otimes_{K_f} V_f) \otimes_{K_f, \sigma_i} \mathbb{C})] \otimes_{\mathbb{C}} [\bigoplus_{\sigma_j} ((V_f \otimes_{K_f} V_f) \otimes_{K_f, \sigma_j} \mathbb{C})]$$

$$\cong \bigoplus_{i,j} ((V_f \otimes_{K_f, \sigma_i} \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} (V_f \otimes_{K_f, \sigma_i} \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} (V_f \otimes_{K_f, \sigma_j} \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} (V_f \otimes_{K_f, \sigma_j} \mathbb{C}))$$

となる。一方，$Hg(A_f)$ については，

命題 (4.2) $Hg(A_f) \cong SL_2(K_f)$ で，$Hg(A_f)$ の V_f への表現は $SL_2(K_f)$ の K_f^2 への自然な表現と同値.

が成り立つ。これは，$End^0 A_f \cong K_f$ ，(K_f は $\dim A_f$ 次

の総実代数体）が成り立つアーベル多様体については $Hg(A_f)_{\mathbb{C}} \cong \prod_{i=1}^{d_f} SL_2(\mathbb{C}) \cong SL_2(K_f) \otimes \mathbb{C}$ であること（[H]），及び，$Hg(A_f)$ が V_f に K_f-linear に作用してしかも V_f 上の Riemann 形式（それは $\mathbb{Q}$-双線形で歪対称である）を不変にすること，より従う。よって，

$$[V_i \otimes V_i \otimes V_i \otimes V_i]^{sl_2(\mathbb{C})},$$

$(V_i = V_f \otimes_{K_f, \sigma_i} \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^2$）を考えればよい。これに関し，

補題（4．3） $V_i \cong \mathbb{C}^2$ の標準的な base を $e_i = {}^t(1\ 0)$，$\overline{e_i} = {}^t(0\ 1)$ とおくと，$sl_2(\mathbb{C})$ の自然な作用について，

$$[V_i \otimes V_i]^{sl_2(\mathbb{C})} = \langle e_i \otimes \overline{e_i} - \overline{e_i} \otimes e_i \rangle_{\mathbb{C}},$$

$$\begin{aligned}
&[V_i \otimes V_i \otimes V_i \otimes V_i]^{sl_2(\mathbb{C})} \\
&= \langle e_i \otimes \overline{e_i} \otimes e_i \otimes \overline{e_i} - e_i \otimes \overline{e_i} \otimes \overline{e_i} \otimes e_i \\
&\quad - \overline{e_i} \otimes e_i \otimes e_i \otimes \overline{e_i} + \overline{e_i} \otimes e_i \otimes \overline{e_i} \otimes e_i, \\
&\quad e_i \otimes e_i \otimes \overline{e_i} \otimes \overline{e_i} - e_i \otimes \overline{e_i} \otimes \overline{e_i} \otimes e_i \\
&\quad - \overline{e_i} \otimes e_i \otimes e_i \otimes \overline{e_i} + \overline{e_i} \otimes \overline{e_i} \otimes e_i \otimes e_i \rangle_{\mathbb{C}}.
\end{aligned}$$

従って，

系（4．4）

$$\dim_{\mathbb{Q}}(H_f \otimes_{\mathbb{Q}} H_f \text{ の } (2,2)\text{-part}) = d_f^2 + d_f.$$

さて，$[V_f \otimes_{K_f} V_f]^{Hg(A_f)} \cong \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A_f) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong K_f$ に注意すれば，$[V_i \otimes V_i]^{sl_2(\mathbb{C})}$ の部分はすべて algebraic cycle であることがわかる（もちろん，これは Lefschetz の定理の帰結でもある）。従って，問題は $[V_i \otimes V_i \otimes V_i \otimes V_i]^{sl_2(\mathbb{C})}$ のもう1次元分の cycle，よって，全体で（i を動かして）d_f 次元分の algebraic cycle を見出さなければならな

い。ところが　$\tau(z_1, z_2) = (z_2, z_1)$ で定義される $H \times H$ の自分自身への写像から induce される $\tilde{S}$ の algebraic correspondence を考え，τ が H_f に induce する Hodge 構造としての自己準同型を τ^* と書くと，すべての $\sigma_i : K_f \to \mathbb{C}$ に対し，τ^* は $H_f \underset{K_f, \sigma_i}{\otimes} \mathbb{C}$ に(あるbaseに関し)

$$\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

として作用していることがわかる。一方，K_f は $H_f \underset{K_f, \sigma_i}{\otimes} \mathbb{C}$ に scalar として作用（固有空間だから）しているから，結局 $K_f \oplus K_f \cdot \tau^*$ で $H_f \otimes H_f$ のすべての Hodge cycle を尽くすことがわかる。更に，(3. 1) の後半 $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathcal{B}^2(\tilde{S} \times \tilde{S}) / \mathcal{D}^2(\tilde{S} \times \tilde{S})) = \sum_{f \in \Xi} [K_f : \mathbb{Q}]$ も上の議論から明らかであろう。

§5. 定理 (3. 2) の証明.

D が 23 以下の mod 4 で 1 に合同な素数の時は $\tilde{S}$ は rational となり ([HV]) 問題ない。D が 29 以上の mod 4 で 1 に合同な素数の時は 次の著しい事実を用いる：

定理 (5. 1) ([O, Th. 17. 2, Prop. 13. 5]) 任意の "self-conjugate" な primitive form f は，ある primitive elliptic cusp form $h(f) \in S_2(\Gamma_0(D), (\frac{D}{\ }))$ の Doi-Naganuma lifting として得られ，(2. 1) の A_f^1, A_f^2 は $h(f)$ に附随するアーベル多様体 $B_{h(f)}$ に K_f-同種である。更に，$\prod_{f \in \Xi} A_f$ は $\prod_{h \in \Xi'} B_h$ (Ξ' は Ξ と同様に定義される) と同種である。

(ここに f が self-conjugate とは $\tau^*(f)$ が f の定数倍になることを言う。)

更に次の定理が成り立つことに注意すれば，

定理 (5.2)
D が mod 4 で 1 に合同な素数ならば

$$\mathrm{End}^0(\prod_{h \in \Xi'} B_h) \cong \prod_{h \in \Xi'} \mathrm{End}^0 B_h \cong \prod_{f \in \Xi} K_f$$

(証明は Ribet 氏に教えて頂きました。彼の [R] のことばを用いて言えば，D が上の条件をみたすとき，f は "twist" も "inner twist" も持たない，ということになります。)．

(5.1) と合わせて (3.2) が言えることになる ((3.2) の D について，すべての $f \in \Xi$ が self-conjugate であることは知られている。例えば [C, p.109]。)。

注意 i) [HV] によると，$\widetilde{S}$ は

1) elliptic K3 $(D = 29, 37, 41)$
2) honestly elliptic $(D = 53, 61, 73)$
3) general type $(D \geq 89$ かつ $\equiv 1 (4))$

である。

注意 ii) (塩田先生による) 上の 1) の場合 $\widetilde{S}$ は $Km(E^2)$ (E はある elliptic curve，$Km(E^2)$ はアーベル多様体 $E^2 = E \times E$ に附随する Kummer 曲面) で dominate され，従って $\widetilde{S}^n$ の Hodge 予想は E^{2n} の Hodge 予想 (Tate, Murasaki による) に帰着される。

Reference

[H] F. Hazama, Algebraic cycles on Abelian varieties with many real endomorphisms, Tôhoku Math. Journ. 35 (1983), 303-308.

[HV] F. Hirzebruch, Van de Ven, Hilbert modular surfaces and the classification of algebraic surfaces, Invent. Math. 23 (1974), 1-29.

[O] T. Oda, Periods of Hilbert modular surfaces, Progress in Mathematics 19, Birkhäuser, 1982.

[R] K. A. Ribet, Twists of modular forms and endomorphisms of abelian varieties, Math. Ann. 253 (1980), 43-62.