代数幾何学シンポジウム記録
1983年度 pp.72-86

高次元の extremal ray について

東大理 安藤哲哉

§0 序

以下基礎体 k は標数 0 の代数閉体とする。多様体はすべて射影的とする。今 X は非特異で、その canonical divisor K_X は not nef とする。すると extremal curve ℓ が存在する。(定義は §1 を見よ。) 任意の extremal curve ℓ をひとつ fix した時、森、川又、Shokurov 等の理論により、extremal ray $R = \mathbb{R}_+[\ell]$ の contraction と呼ばれる射 $f: X \longrightarrow Y$ が存在して次の性質をみたす。

(i) X 内の curve Z につき、$f(Z)$ が一点 $\Longleftrightarrow$ $Z \in \mathbb{R}_+[\ell]$,

(ii) Y は projective, normal で $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$.

(iii) $0 \longrightarrow \mathrm{Pic}\, Y \xrightarrow{f^*} \mathrm{Pic}\, X \xrightarrow{(\cdot \ell)} \mathbb{Z}$ は exact.

このような contraction $f: X \longrightarrow Y$ の形は 3 次元以下の時は森 [1] によって分類されている。この小論では、4 次元以上の場合の f の構造を調べる。§1 では、定義と §2 以下の議論に必要な知られている結果を簡単に述べ、§2 では、f が birational な場合の構造について、§3 では、$\dim Y < \dim X$ の場合の構造について考察する。§4 では、§1 に述べる contraction theorem の 4 次元の場合での Riemann-Roch を用いた古い証明を付記しておく。

§1. 定義と知られている結果.

k は標数 0 の閉体、X は k 上の非特異射影多様体とする。以下に述べる結果は、すべて高々 canonical singularity をもつ多様体の場合に拡張されているが、これに関しては、本報告集の中の川又氏の論文を参照されたい。ここでは、最小限必要な

詳しい形で述べる。

<u>Notation</u> $N^1(X) := \{\text{Cartier divisor on } X\}/\approx \otimes \mathbb{R}$

$N_1(X) := \{\text{1-cycle on } X\}/\approx \otimes \mathbb{R}$

ただし $\approx$ は numerical equivalence をあらわす。$N^1(X)$ と $N_1(X)$ は，intersection pairing によって互いに dual vector space になっている。これらには，自然に位相を入れておく。

$\overline{NE}(X) :=$ $N_1(X)$ 内で effective 1-cycle で生成される convex cone の closure.

<u>定義</u>. Cartier divisor D が nef とは任意の curve Z に対し，$(D\cdot Z)_X \geqq 0$ となること。

1-cycle Z が nef とは任意の effective Cartier divisor D に対し，$(D\cdot Z)_X \geqq 0$ となること。

D が nef のとき，D の numerical Kodaira dimension $\kappa_{num}(D)$ (又は $\sigma(D)$ と書く) とは，$\kappa_{num}(D) := \max\{d \mid D^d \not\approx 0\}$ のこと。

一般に，$\kappa(D) \leqq \kappa_{num}(D) \leqq n$ $(n = \dim X)$ が知られている。

D が big とは $\kappa(D) = n$ となること。

特に D が nef のとき，D が big $\Leftrightarrow \kappa_{num}(D) = n$ である。

Linear system が free とは，fixed component も base point ももたないことをいう。

$|mD|$ が free $({}^{\exists}m > 0)$ ならば，$\kappa(D) = \kappa_{num}(D)$ である。

<u>定義</u>. curve ℓ が extremal であるとは，

(i) $(K_X\cdot \ell)_X < 0$

(ii) $A, B \in \overline{NE}(X)$ が $A+B \in \mathbb{R}_+[\ell]$ をみたすとき，必ず $A, B \in \mathbb{R}_+[\ell]$ となることをいう。ただし $\mathbb{R}_+[\ell]$ は，ℓ の numerical class $[\ell]$ が vector space $N_1(X)$ 内で張る半直線をあらわす。

<u>定義</u>. ℓ が extremal curve の時，Cartier divisor H が，ℓ の good supporting divisor であるとは

(i) H は nef，

(ii) 任意の $Z \in \overline{NE}(X)$ につき，$(H\cdot Z)_X = 0 \Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}_+[\ell]$.

以上の notation のもとに，基本的な定理をいくつかあげる．

定理 1.1 （Base point free theorem：川又，Shokurov）
H は nef，$aH - K_X$ は nef and big（$^\exists a > 0$）とすると，全ての十分大なる m について，$|mH|$ は free となる．

定理 1.2 （Cone theorem：森） $\overline{NE}(X)$ は $\{ z \in N_1(X) \mid (K_X \cdot z) < 0 \}$ なる半空間において，locally polyhedral である．

系 1.3 任意の extremal curve ℓ について，必ず good supporting divisor H が存在して，さらに次の性質もみたす．

(i) E を $(E \cdot \ell)_X > 0$ となる任意の Cartier divisor とすると，$^\forall m >> 0$ について，$mH + E$ は ample．特に
$$H^i(X, mH + E) = 0 \quad (\text{for } i > 0,\ m >> 0).$$

(ii) $H^i(X, mH) = 0 \quad (\text{for } i > 0,\ m >> 0)$

(iii) m を十分大にとり，$f : X \dashrightarrow Y$ を $|mH|$ から定まる rational map とすると，f は morphism となり，f は $\mathbb{R}_+[\ell]$ の contraction を定める．すなわち，

(iii-1) X 内の curve Z に対し，$f(Z)$ が一点 $\Leftrightarrow$ $Z \in \mathbb{R}_+[\ell]$．

(iii-2) Y は projective, normal, $f_*(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$, $R^i f_* \mathcal{O}_X = 0 \ (i > 0)$．

(iii-3) $0 \to \operatorname{Pic} Y \xrightarrow{f^*} \operatorname{Pic} X \xrightarrow{(\cdot \ell)} \mathbb{Z}$ は exact．

Rem 系 1.3 は (i) の中の vanishing と (iii-3) を除けば，X が，canonical singularity をもつ場合にも成り立つ．

系 1.3 は森 [1]，Reid [4] の 3 次元の場合の証明と全く同様であるので省略する．

prop 1.4 ℓ は extremal curve，$f : X \to Y$ はその contraction，H は ℓ の good supporting divisor とする．このとき，

f が birational $\Leftrightarrow$ H が big $\Leftrightarrow$ ℓ が not nef．

証明は森 [1] の 3 次元の場合と同様にしてできるが，念のため，「H が big $\Rightarrow$ ℓ が not nef」の証明のみ書いておく．

$(H^n) > 0$ （$n = \dim X$）を仮定する．

H は nef and big だから川又 vanishing により $H^i(X, mH + K_X) = 0 \ (i > 0)$．

$\therefore\ h^0(X, mH+K_X) = \chi(mH+K_X) = \frac{1}{n!}(mH+K_X)^n + \cdots\cdots$

$= \frac{m^n}{n!}(H)^n +$ mについて低次の項 $\longrightarrow \infty$ as $m \longrightarrow \infty$.

従って $m \gg 0$ に対し $|mH+K_X| \neq \phi$. そこで $D \in |mH+K_X|$ をとる.

$(D\cdot l) = m(H\cdot l) + (K_X\cdot l) = (K_X\cdot l) < 0$. 従って l は not nef. $\square$

§2 Birational Case.

以下 X は非特異とし, extremal curve l をひとつ fix する. さらに, l は not nef と仮定する. すなわち, l の contraction $f: X \longrightarrow Y$ は birational と仮定する. A を Y 上の任意の ample divisor とすると, $H := f^*A$ は l の good supporting divisor となる. $E \subset X$ を f の exceptional set とする. また $n := \dim X$ とする。

<u>§2-1°</u> 以下の sub section では $\dim E = n-1$ を仮定し, この場合を考察する. 今, l は not nef だから $(D\cdot l) < 0$ となる irreducible divisor D が存在する。

<u>lemma</u> $D = E$. 特に D は unique で, E は既約.

(∵) 系1.3 (i) より $mH - D$ は ample $(m \gg 0)$. また $H^1(X, mH-D) = 0$ より, $H^0(X, mH) \twoheadrightarrow H^0(D, mH)$. 従って $|mH|$ は D の外で ample. つまり, f は D の外で同型. $\therefore D \supset E$. 今 D は既約で $\dim E = n-1$ だから $D = E$. $\square$

さて, $\kappa := \kappa_{num}(H|_D) = \kappa(D, H|_D) = \dim f(D)$ とする. まず, $\kappa = 0$ の場合を扱う.

<u>prop 2.1</u> $\dim f(D) = 0$ とする. そのとき, ある X 内の Cartier divisor L が存在して

(0) $L|_D$ は D 上 ample

(i) $\mathcal{O}_D(-K_X) \cong \mathcal{O}_D(pL)$, $\mathcal{O}_D(-D) \cong \mathcal{O}_D(qL)$ $(^\exists p, q \in \mathbb{N})$.

特に $\omega_D \cong \mathcal{O}_D(-(p+q)L)$.

(ii) $H^i(D, tL) = 0$ ただし, i と t は (ア) $i > 0$, $t \geqq -p$ であるか, (イ) $i < n-1$, $t \leqq -q$ 又は (ウ) $n \leqq 5$, $0 < i < n-1$, $^\forall t \in \mathbb{Z}$.

(iii) $n=2 \Rightarrow D \cong \mathbb{P}^1,\ \mathcal{O}_D(D) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$.

$n=3 \Rightarrow D \cong \mathbb{P}^2,\ \mathcal{O}_D(D) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$ または $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$

または $D \cong Q^2,\ \mathcal{O}_D(D) \cong \mathcal{O}(-1)$. ただし Q^2 は $\mathbb{P}^3$ 内の singularity を許した hyper quadric. (以下でも同様).

$n=4 \Rightarrow D \cong \mathbb{P}^3,\ \mathcal{O}_D(D) \cong \mathcal{O}(-1), \mathcal{O}(-2)$ or $\mathcal{O}(-3)$

または $D \cong Q^3,\ \mathcal{O}_D(D) \cong \mathcal{O}(-1)$ or $\mathcal{O}(-2)$

または D は Del Pezzo variety で $\mathcal{O}_D(D) \cong \mathcal{O}(-1)$, すなわち.

$\Delta(D,L) := \dim D + (L^{n-1})_D - h^0(D,L) = 1$, $\omega_D \cong \mathcal{O}_D(-2L)$,

$H^i(D, tL) = 0$ for $0<i<n-1$, ${}^\forall t \in \mathbb{Z}$ となる variety.

このとき, D は hypersurface singularity を許す.

$n=5 \Rightarrow D \cong \mathbb{P}^4,\ \mathcal{O}_D(D) \cong \mathcal{O}(-1), \mathcal{O}(-2), \mathcal{O}(-3)$ or $\mathcal{O}(-4)$.

または $D \cong Q^4,\ \mathcal{O}_D(D) \cong \mathcal{O}(-1), \mathcal{O}(-2), \mathcal{O}(-3)$.

または D は Del Pezzo variety で $\mathcal{O}_D(D) \cong \mathcal{O}(-1)$ or $\mathcal{O}(-2)$. すなわち

$\Delta(D,L)=1$, $\omega_D \cong \mathcal{O}_D(-3L)$, $H^i(D,tL)=0$ $(0<i<n-1, {}^\forall t\in\mathbb{Z})$.

または D は Mukai variety で $\mathcal{O}_D(D) \cong \mathcal{O}(-1)$. すなわち,

$\Delta = \frac{d}{2}$ (ただし $d=(L^{n-1})_D$), $\omega_D \cong \mathcal{O}(-2L)$ で

$H^i(D,tL)=0$ $(0<i<n-1, {}^\forall t\in\mathbb{Z})$ となる variety.

このようなタイプを $(E(n-1)-0)$ 型と呼ぶ.

<u>proof</u> $|mH|$ は free $(m \gg 0)$ で, $H|_D \approx 0$ だから $\mathcal{O}_D(H) \cong \mathcal{O}_D$ である. D 内の任意の curve Z について, $(H\cdot Z)_X = 0$ だから $Z \in \mathbb{R}_+[\ell]$. すなわち $\mathrm{Im}(N_1(D) \to N_1(X)) \cong \mathbb{R}$. 双対的に $\mathrm{Im}(N^1(D) \to N^1(X)) \cong \mathbb{R}$. 今 $I := \mathrm{Im}(\mathrm{Pic}\,X \to \mathrm{Pic}\,D)$ とおき $I \cong \mathbb{Z}$ を示す. $M \in \mathrm{Pic}\,X$ を $M|_D \approx 0$ on D となるような任意の元とするとき, $\mathcal{O}_D(M) \cong \mathcal{O}_D$ を示せばよい. $0 \to \mathcal{O}_X(mH+M-D) \to \mathcal{O}_X(mH+M) \to \mathcal{O}_D(M) \to 0$ は exact で, $m \gg 0$ に対し $mH+M-D-K_X$, $mH+M-K_X$ は ample だから. 小平 vanishing とこの exact sequence より, $H^i(D, \mathcal{O}_D(M)) = 0$ $(i>0)$. 特に $M=0$ としてみると $H^i(D,\mathcal{O}_D)=0$ $(i>0)$ と $\chi(\mathcal{O}_D)=1$ を得る. よって $h^0(\mathcal{O}_D(M)) = \chi(\mathcal{O}_D(M)) = \chi(\mathcal{O}_D) = 1$ であるから, $|M|_D| \neq \phi$.

$M|_D \approx 0$ であったから，このことは $\mathcal{O}_D(M) \cong \mathcal{O}_D$ を意味する。
$\therefore\ I \cong \mathbb{Z}$.

さて，$-K_X|_D \sim (mH-K_X)|_D$ は ample だから，I には ample な元がある。今 $L \in \mathrm{Pic}\,X$ を $L|_D$ が I の ample generator となるようにとる。$I \cong \mathbb{Z}$ であり，$-K_X|_D$, $-D|_D$ は ample だったから，
$\mathcal{O}_D(-K_X) \cong \mathcal{O}_D(pL)$, $\mathcal{O}_D(-D) \cong \mathcal{O}_D(qL)$ ($^\exists p, q \in \mathbb{N}$) とかける。
特に $\omega_D \cong \mathcal{O}_D(K_X+D)$ より $\omega_D \cong \mathcal{O}_D(-(p+q)L)$.

次に (ii) を証明する。$0 \to \mathcal{O}_X(mH+tL-D) \to \mathcal{O}_X(mH+tL) \to \mathcal{O}_D(tL) \to 0$ は exact で，$t \geq -p$ のとき，$m \gg 0$ について，$mH+tL-D-K_X$ は ample
$mH+tL-K_X$ は nef and big となる。川又 vanishing とこの exact sequence から $H^i(\mathcal{O}_D(tL)) = 0$ ($i>0$, $t \geq -p$) を得る。また Serre duality により，$t \leq -q$ のとき，$-t-p-q \geq -p$ であるから，
$H^i(\mathcal{O}_D(tL)) \cong H^{n-i-1}(\mathcal{O}_D((-t-p-q)L)) = 0$ ($i<n-1$, $t \leq -q$).
最後の (ウ) の場合は (iii) の分類の帰結である。

(iii) を証明する。$P(t) := \chi(\mathcal{O}_D(tL))$ とおくと $P(t)$ は t について $n-1$ 次の多項式になる。$d := (L^{n-1})_D$ として，Riemann-Roch により，

$$P(t) = \frac{d}{(n-1)!}t^{n-1} + \frac{pd}{2(n-2)!}t^{n-2} + t\text{について低次の項}$$

となる。また $P(0) = \chi(\mathcal{O}_D) = 1$，Serre duality により，
$P(-t) = \chi(\mathcal{O}_D(-tL)) = (-1)^{n-1}\chi(\omega_D(tL)) = (-1)^{n-1}\chi(\mathcal{O}_D((t-p-q)L)) = (-1)^{n-1}P(t-a-b)$
さらに $-p \leq t \leq 0$ なる整数 t については，$H^i(\mathcal{O}_D(tL)) = 0$ for $\forall i$
より $P(t) = 0$。以上の $P(t)$ に関する条件から

$n=4$ のとき $\quad P(t) = \dfrac{d}{12}t(t+p+q)(2t+p+q) + \dfrac{2t}{p+q} + 1$

$n=5$ のとき $\quad P(t) = \dfrac{1}{24}\left\{t^2(t+p+q)^2 d + t(t+p+q)\left(pqd + \dfrac{24}{pq}\right)\right\} + 1$

が得られる。$h^0(\mathcal{O}_D(L)) = P(1)$ に注意して Fujita の Δ-genus:
$\Delta := \Delta(D, L) = \dim D + d - h^0(\mathcal{O}_D(L))$ を計算する。

$n=4$ のとき $p+q \leq 4$ となり ($\because$ $p+q \geq 5$ とすると $\Delta < 0$ となってしまいます.),

$(p,q)=(3,1),(2,2),(1,3)$ なる $\Delta=0$, $d=1$ で $D\cong\mathbb{P}^3$,
$(p,q)=(2,1)$ or $(1,2)$ なる $\Delta=0$, $d=2$ で $D\cong Q^3$,
$(p,q)=(1,1)$ なる $\Delta=1$ で D は Del Pezzo variety となる。
$n=5$ の時も同様だから略す。 □

次は $E=D$ で $\dim f(D)$ が一般の場合を扱う。

<u>prop 2.2</u> $\dim f(D)=k$ とすると、$f_D: D\longrightarrow f(D)$ の general fiber は $(E(n-k)-0)$ 型の exceptional divisor と同型である。(すなわち、prop 2.1 で $n=n-k$ とした時の D の分類にあらわれるものと同一視できる。).

<u>proof</u> general point $p\in Y$ に対し、$A_1,\cdots,A_k\subset Y$ を general な ample divisor で $A_1\cap\cdots\cap A_k\ni p$, となるようにとれば、$H_i:=f^*A_i$ $(1\leq i\leq k)$ とおくとき、$\dim H_1\cap\cdots\cap H_k=n-k-1$ で F が $H_1\cap\cdots\cap H_k$ の連結成分となるようにできる。$H_1,\cdots,H_k$ は l の good supporting divisor である。F 内の任意の curve Z に対して $(Z\cdot H)_X=0$ である。これより prop 2.1 の証明と同様にして、$Im(\mathrm{Pic}X\to\mathrm{Pic}F)\cong\mathbb{Z}$ がわかる。$L\in\mathrm{Pic}X$ を $L|_F$ が $Im(\mathrm{Pic}X\to\mathrm{Pic}F)$ の ample generator となるようにとる。$\mathcal{O}_F(H_i)\cong\mathcal{O}_F$ だから $\omega_F\cong\mathcal{O}_F(K_X+D)$. 今 $\mathcal{O}_F(-K_X)\cong\mathcal{O}_F(pL)$, $\mathcal{O}_F(-D)\cong\mathcal{O}_F(qL)$ $({}^{\exists}p,q\in\mathbb{N})$ と書くと、以下 prop 2.1 の証明と同様に $H^i(\mathcal{O}_F(tL))=0$ for (ア) $i>0$, $t\geq -p$ or (イ) $i<n-k-1$, $t\leq -q$ がわかる。これらより結論は容易に導かれる。 □

<u>prop 2.3</u> $\dim f(D)=n-2$ で $f_D: D\to f(D)$ が equidimensional ならば、f_D は $\mathbb{P}^1$-bundle で Y, $f(D)$ は non-singular, f は $f(D)$ を center とした Y の blow up となる。

<u>proof</u> $S:=f(D)$ とおく。$C\in R_+[l]$ を任意の既約な curve とする。$p=f(C)\in S$ は point. Y の ample divisor $A_1,\cdots,A_{n-2}$ で、$p\in A_1\cap\cdots\cap A_{n-2}$ $\dim A_1\cap\cdots\cap A_{n-2}\cap S=0$ となるようなものがある。f_D は equidimensional だから $H_i:=f^*A_i$ $(1\leq i\leq n-2)$ とするとき $\dim H_1\cap\cdots\cap H_{n-2}\cap D=1$.

今 C' は $(C')_{red}=C$ となる X 内の任意の scheme とする。$a\gg 0$ を $I_{C'}\supset I_{H_1}^{a}+\cdots+I_{H_{n-2}}^{a}+I_D^{a}$ となるようにとる。ここに $I_{C'}$ は C' の $\mathcal{O}_X$ での定義 ideal 層である。Standard exact sequence をいくつか書いて計算すると、$H^1(\mathcal{O}_{aD\cap aH_1\cap\cdots\cap aH_{n-2}}(mH))=0$, $H^1(\mathcal{O}_{aD\cap aH_1\cap\cdots\cap aH_{n-2}}(mH+K_X))=0$ $(m\gg 0)$ が容易に得られる。これより $H^1(\mathcal{O}_{C'}(mH))=H^1(\mathcal{O}_{C'}(mH+K_X))=0$ が得られる。ここで $\mathcal{O}_{C'}(H)\cong\mathcal{O}_{C'}$ より $H^1(\mathcal{O}_{C'})=H^1(\mathcal{O}_{C'}(K_X))=0$。特に $C\cong\mathbb{P}^1$ がわかる。$0\leq h^0(\mathcal{O}_C(K_X))=\chi(\mathcal{O}_C(K_X))=\chi(\mathcal{O}_C)+(K_X\cdot C)_X=1+(K_X\cdot C)_X$ で $(K_X\cdot C)<0$ より $(K_X\cdot C)_X=-1$ がわかる。f_D の general fiber は既約で K_X との intersection number は -1 だから、f_D の全ての fiber は既約で $\mathbb{P}^1$ に同型であることがわかる。また $N_{C/X}\cong\mathcal{O}_C(-1)\oplus\mathcal{O}_C^{\oplus n-2}$ が、後で述べるようにしてわかるから、Deformation 理論により、D は smooth で、$f_D: D\longrightarrow S$ は Zariski $\mathbb{P}^1$-bundle であることがわかる。ここで中野の contraction theorem を用いると f は S を center とした Y の blow up と同一視できることがわかる。

さて $N_{C/X}\cong\mathcal{O}_C(-1)\oplus\mathcal{O}_C^{\oplus n-2}$ を証明する。$I_C/I_C^2=\mathcal{O}_C(a_1)\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}_C(a_{n-1})$ $(a_1\geq\cdots\geq a_{n-1})$ とおく。I_C は locally complete intersection だから $0\longrightarrow I_C/I_C^2\longrightarrow\Omega_X^1\otimes\mathcal{O}_C\longrightarrow\Omega_C^1\longrightarrow 0$ は exact。$\therefore a_1+\cdots+a_{n-1}=\deg I_C/I_C^2$ $=\chi(I_C/I_C^2)-\mathrm{rank}(I_C/I_C^2)=\{\chi(\mathcal{O}_C(\Omega_X^1))-\chi(\Omega_{\mathbb{P}^1}^1)\}-(n-1)=\{(K_X\cdot C)_X+n\}-(-1)-(n-1)=(K_X\cdot C)_X+2=1$。また $I_C\supset J\supset I_C^2$ を $I_C/J\cong\mathcal{O}_C(a_{n-1})$ となるようにとって $0\longrightarrow I_C/J\longrightarrow\mathcal{O}_X/J\longrightarrow\mathcal{O}_X/I_C\longrightarrow 0$ (i.e. $0\to\mathcal{O}_C(a_{n-1})\longrightarrow\mathcal{O}_{C'}\longrightarrow\mathcal{O}_C\longrightarrow 0$) より $\chi(\mathcal{O}_{C'}(K_X))=\chi(\mathcal{O}_C(K_X))+\chi(\mathcal{O}_C(a_{n-1})\otimes\mathcal{O}_C(K_X))$ $=\{(K_X\cdot C)+\chi(\mathcal{O}_C)\}+\{(K_X\cdot C)+\chi(\mathcal{O}_C(a_{n-1}))\}=2(K_X\cdot C)+\chi(\mathcal{O}_{C'})=-2+\chi(\mathcal{O}_{C'})$

$\therefore\ 2\leq 2+h^0(\mathcal{O}_{C'}(K_X))=2+\chi(\mathcal{O}_{C'}(K_X))=\chi(\mathcal{O}_{C'})=\chi(\mathcal{O}_C)+\chi(\mathcal{O}_C(a_{n-1}))$ $=1+(1+a_{n-1})=2+a_{n-1}$. $\therefore a_{n-1}\geq 0$. $\therefore a_1=1,\ a_2=a_3=\cdots=a_{n-1}=0$

$\therefore N_{C/X}=(I_C/I_C^2)^\vee=\mathcal{O}_C(-1)\oplus\mathcal{O}_C^{\oplus n-2}$ $\square$

§2−2° ここからは $\dim E<n-1$ と仮定する。このようなことは $n\leq 3$ では起こらないが $n=4$ のとき $E\cong\mathbb{P}^2$ の例が構成されている。($\xrightarrow{\text{see}}$ M. Reid Decomposition of Toric morphism, Example (3.9))

しかし具体的な E の分類に関しては $n=4$ の時ですらまだわかっていない。わかっているのは、$\dim E$, $\dim f(E)$ についての条件くらいである。ところで、$mH+K_X$ という形の divisor はいろいろな意味で大切な役割をはたす。例えば、$|mH+K_X|$ の一般の元 D は既約で $(D\cdot \ell)_X < 0$ となるから、$(D\cdot \ell)_X < 0$ となる既約な divisor D は無限に存在する。$m \gg 0$ のとき $Bs\,|mH+K_X| = E$ である。さらに $|mH+K_X|$ は elementary transformation を定めるであろうと予想されている。

§3. Fiber case.

この Section でも $X, \ell, H, f: X \to Y$ は §2 と同様とする。ただし ℓ は nef と仮定する。すなわち $\dim X > \dim Y$ と仮定する。$K := \dim Y = \kappa(H) = \kappa_{num}(H)$ とおく。

prop 3.1　f の general fiber は Fano $(n-K)$-fold である。ただし Fano 1-fold は $\mathbb{P}^1$, Fano 2-fold は Del Pezzo surface と解釈する。

proof　$p \in Y$ を general point とする。Ample divisor $A_1, \cdots, A_K \subset Y$ を $p \in A_1 \cap \cdots \cap A_K$, $\dim A_1 \cap \cdots \cap A_K = 0$ となるようにとる。p は general だから、$F := f^{-1}(p)$ は非特異な $n-K$ 次元多様体としてよい。F は $H_1 \cap \cdots \cap H_K$ の連結成分 ($H_i := f^*A_i$) で、$H_1 \cap \cdots \cap H_K$ は pure $n-K$ 次元としてよい。F は locally complete intersection で、$\mathcal{O}_F(H_i) \cong \mathcal{O}_F$ だから $\omega_F \cong \mathcal{O}_F(K_X)$ となる。F 内の任意の curve は $\mathbb{R}_+[\ell]$ に属するから $-K_X|_F$ は F 上 ample. $\therefore$ ω_F^{-1} は ample となり F は Fano $(n-K)$-fold. □

森[1] では $\dim X = 3$ の時 Y は必ず非特異であったが、一般次元では、$\dim Y = 1$ ならもちろん Y は非特異であるが、それ以外の時は次のことしかわかっていない。しかし次の proposition の f が equidimensional という仮定は 3 次元では自明的に正しいので、$\dim X = 3$ の時の全ての結果は完全に含まれてしまう。

<u>prop 3.2</u> $\dim Y = \dim X - 1$ で $f: X \longrightarrow Y$ が equidimensional ならば、Y は非特異で、f は conic bundle となる。

証明にはまず次の lemma を用いる。

<u>Lemma 3.3</u> X は non singular, C は X 内の irreducible curve で $(K_X \cdot C) < 0$, かつ $(C')_{red} = C$ となる X 内の任意の scheme C' について $\chi(\mathcal{O}_{C'}) \geq 0$ とする。すると $C \cong \mathbb{P}^1$ で

$$N_{C/X} \cong \mathcal{O}_C^{\oplus n-1} \text{ or } \mathcal{O}_C(1) \oplus \mathcal{O}_C(-1)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_C^{\oplus n-4} \text{ or } \mathcal{O}_C(1) \oplus \mathcal{O}_C(-2) \oplus \mathcal{O}_C^{\oplus n-3}$$
$$\text{or } \mathcal{O}_C(-1) \oplus \mathcal{O}_C^{\oplus n-2}$$

となる。さらに、$N_{C/X} \cong \mathcal{O}_C(1) \oplus \mathcal{O}_C(-1)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_C^{\oplus n-4}$ 又は $\mathcal{O}_C(1) \oplus \mathcal{O}_C(-2) \oplus \mathcal{O}_C^{\oplus n-3}$ の時には $I_C \supset J \supset I_C^2$ を $I_C/J \cong \mathcal{O}_C(-1)$ となるような ideal とすると、$J/J^2 \cong (\mathcal{O}_X/J)^{\oplus n-1}$ となる。ここに I_C は X における C の定義 ideal.

<u>proof</u> $C \cong \mathbb{P}^1$ の証明は簡単であるし、あとで必要としないので省略する。$I := I_C$ とおき、$I/I^2 \cong \mathcal{O}_C(p_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_C(p_{n-1})$ (ただし $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_{n-1}$) とおく。$C$ は locally complete intersection だから、$0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow \Omega_X^1 \otimes \mathcal{O}_C \longrightarrow \Omega_C^1 \longrightarrow 0$ は exact. prop 2.3 の証明と同様に $p_1 + \cdots + p_{n-1} = (K_X \cdot C) + 2 \leq 1$. 特に $0 \geq p_{n-2} \geq \cdots \geq p_1$. local には、$I = (x_1, \cdots, x_{n-1})$ と書ける。

Case I. $p_1 = 0$ のとき: $\Sigma p_i \leq 1$ より $(p_1, \cdots, p_{n-1}) = (0, \cdots, 0)$ or $(0, \cdots, 0, 1)$ となりおしまい。

Case II. $p_1 \leq -2$ のとき: $I \supset J \supset I^2$ を $I/J \cong \mathcal{O}_C(p_1)$ となるようにとる。$J/I^2 \cong \mathcal{O}_C(p_2) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_C(p_{n-1})$. また local には $J = (x_1^2, x_2, \cdots, x_{n-1})$ と書ける。$C' = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X/J$ とおく。$0 \to \mathcal{O}_C(p_1) \to \mathcal{O}_{C'} \to \mathcal{O}_C \to 0$ は exact だから、$0 \leq \chi(\mathcal{O}_{C'}) = \chi(\mathcal{O}_C) + \chi(\mathcal{O}_C(p_1)) = 1 + (1 + p_1) = 2 + p_1 \leq 0$ $\therefore p_1 = -2$. $0 \to I^2/IJ \to J/IJ \to J/I^2 \to 0$ で $I^2/IJ \cong S^2(I/J) \cong \mathcal{O}_C(2p_1)$ だから $J \supset IJ$ は quotient が $\mathcal{O}_C(2p_1), \mathcal{O}_C(p_2), \cdots, \mathcal{O}_C(p_{n-1})$ となる filtration をもつ。$0 \to IJ/J^2 \to J/J^2 \to J/IJ \to 0$ で $IJ/J^2 \cong J/IJ \otimes I/J$ だから、$J \supset J^2$ は quotient が $\mathcal{O}_C(2p_1), \mathcal{O}_C(p_2), \cdots, \mathcal{O}_C(p_{n-1}), \mathcal{O}_C(3p_1), \mathcal{O}_C(p_1 + p_2), \cdots, \mathcal{O}_C(p_1 + p_{n-1})$ となる filtration をもつ。従って $\chi(J/J^2) = 2(n-1) + (n+1)p_1 + 2(p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1})$ を得る。これより、

$0 \le \chi(\mathcal{O}_X/J^2) = 2n + (n+2)p_1 + 2(p_1+\cdots+p_{n-1}) \le 2n + (n+2)\times(-2) + 2\times 1$
$= -2$ となり矛盾。∴ $p_1 \le -2$ とはなり得ない。

Case Ⅳ. $p_1 = -1$ のとき！ まず次の公式を証明する。

$\chi(\mathcal{O}_X/J^r) = 2\times {}_nH_{r-1} + \left(1+\frac{4(r-1)}{n}\right){}_nH_{r-1}\cdot p_1 + 2\frac{r-1}{n}\cdot {}_nH_{r-1}\cdot(p_2+\cdots+p_{n-1})$

ただし ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$。次に $I \supset H \supset I^2$ を $I/H \cong \mathcal{O}_C(p_1)\oplus\mathcal{O}_C(p_2)$, $H/I^2 \cong \mathcal{O}_C(p_3)\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}_C(p_{n-1})$ となるような ideal とすると、

$\chi(\mathcal{O}_X/H^r) = (3\cdot{}_nH_{r-1} + {}_nH_{r-2}) + \left(6\frac{r-1}{n}\cdot{}_nH_{r-1} + 2\frac{r-2}{n}{}_nH_{r-2} + {}_nH_{r-1} + {}_nH_{r-2}\right)(p_1+p_2) + \left(3\frac{r-1}{n}{}_nH_{r-1} + \frac{r-2}{n}{}_nH_{r-2}\right)(p_3+\cdots+p_{n-1})$

はじめの、$\chi(\mathcal{O}_X/J^r)$ の公式は local には $J=(x_1^2, x_2,\cdots,x_{n-1})$ と書けることで、$\mathcal{O}_X/J$ の間の filtration をよく見ると、$\mathcal{O}_X/J^r$ の間の filtration の quotient は $\mathcal{O}_C(1+r_1p_1+\cdots+r_{n-1}p_{n-1})$ (ただし $\frac{r_1}{2}+r_2+\cdots+r_{n-1}<r$) が各々1回づつ出てくることがわかる。従って

$\chi(\mathcal{O}_X/J^r) = \sum_{\frac{r_1}{2}+r_2+\cdots+r_{n-1}<r}\chi(\mathcal{O}_C(1+r_1p_1+\cdots+r_{n-1}p_{n-1})) = \sum_{\frac{r_1}{2}+r_2+\cdots+r_{n-1}<r}(1+r_1p_1+\cdots+r_{n-1}p_{n-1})$

となり前の公式を得る。次に $\chi(\mathcal{O}_X/H^r)$ の公式は local に $H=(x_1^2, x_1x_2, x_2^2, x_3,\cdots,x_{n-1})$ とかけることで $\mathcal{O}_X/H$ の filtration を J の場合と同様に構成すると、結局

$\chi(\mathcal{O}_X/H^r) = \sum_{\frac{r_1}{2}+\frac{r_2}{2}+r_3+\cdots+r_{n-1}<r}\chi(\mathcal{O}_C(1+r_1p_1+\cdots+r_{n-1}p_{n-1}))$ となり、

公式を得る。

さてここで、もし $p_2=-1$ とすると $r\to\infty$ のとき $\chi(\mathcal{O}_X/H^r)\to-\infty$ がでてきて矛盾。∴ $0\le p_2\le\cdots\le p_{n-1}$。次に $p_2+\cdots+p_{n-1}\le 1$ とすると $r\to\infty$ のとき $\chi(\mathcal{O}_X/J^r)\to-\infty$ となりやはり矛盾。従って $p_2+\cdots+p_{n-1}=2$ がわかり、$(p_1,\cdots,p_{n-1}) = (-1,0,\cdots,0,1,1)$ or $(-1,0,\cdots,0,2)$ となり結論を得る。

さらに Case Ⅳの場合に $J/J^2 \cong (\mathcal{O}_X/J)^{\oplus n-1}$ であることを証明する。
$J\otimes\mathcal{O}_C = J/IJ =: \mathcal{O}_C(q_1)\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}_C(q_{n-1})$ ($q_1\le\cdots\le q_{n-1}$) とおく。$0\to I^2/IJ \to J/IJ \to J/I^2 \to 0$ で $I^2/IJ \cong S^2(I/J)\cong\mathcal{O}_C(2p_1)$, $J/I^2 = \mathcal{O}_C(p_2)\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}_C(p_{n-1})$ より $q_1+\cdots+q_{n-1} = \deg J/IJ = \deg I^2/IJ + \deg J/I^2 = 2p_1+p_2+\cdots+p_{n-1} = 0$,

Case Ⅳ-1. $q_1=0$ のとき。$0\to IJ/J^2\to J/J^2\to J/IJ\to 0$ で今 $q_1=q_2=\cdots=q_{n-1}=0$ だから $J/IJ\cong\mathcal{O}_C^{\oplus n-1}$, $IJ/J^2 \cong J/IJ\otimes I/J \cong \mathcal{O}_C(-1)^{\oplus n-1}$.

これより
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_C(-1)^{\oplus n-1} & \longrightarrow & (\mathcal{O}_X/J)^{\oplus n-1} & \longrightarrow & \mathcal{O}_C^{\oplus n-1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & IJ/J^2 & \longrightarrow & J/J^2 & \longrightarrow & J/IJ & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

また $H^0(J/J^2)\cong H^0(J/IJ)\cong k^{n-1}$ であるから この同型により 上の図式の可換性をたもつ写像 $(\mathcal{O}_X/J)^{\oplus n-1}\longrightarrow J/J^2$ が作れ, five lemma により これが同型になる。 ∴ $J/J^2\cong(\mathcal{O}_X/J)^{\oplus n-1}$.

Case IV-2. $q_1\neq 0$ とすると $q_1\le -1$ となる。今 $J\supset L\supset IJ$ を $J/L\cong\mathcal{O}_C(q_1)$, $L/IJ\cong\mathcal{O}_C(q_2)\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}_C(q_{n-1})$ となるようにとる。$I\supset J\supset L$ より $\chi(I/L)=\chi(\mathcal{O}_C(-1))+\chi(\mathcal{O}_C(q_1))=1+q_1\le 0$. さらに $0\to L/IJ\to J/IJ\to J/L\to 0$, $0\to J^2/JL\to IJ/JL\to IJ/J^2\to 0$, $0\to IJ/JL\to L/JL\to L/IJ\to 0$, $0\to JL/L^2\to L/L^2\to L/JL\to 0$, $J^2/JL\cong\mathcal{O}_C(2q_1)$, $IJ/J^2\cong J/IJ\otimes I/J\cong J/IJ\otimes\mathcal{O}_C(-1)$, $JL/L^2\cong L/JL\otimes J/L\cong L/JL\otimes\mathcal{O}_C(q_1)$ を用いると, $\chi(\mathcal{O}_X/L^2)=2nq_1+q_1+2n<0$ を得て矛盾。 □

<u>prop 3.2 の証明</u> f の fiber F は $\mathbb{P}^2$ の conic に同型であることを示す。すなわち, (i) $F\cong\mathbb{P}^1$ で $N_{F/X}\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus n-1}$, $(-K_X\cdot F)=2$ または (ii) $F=F_1\cup F_2$ で $F_1,F_2\cong\mathbb{P}^1$, $F_1\cap F_2=$一点, $(-K_X\cdot F_1)=(-K_X\cdot F_2)=1$ または (iii) $F=2F_0$ (as 1-cycle) で $F_0\cong\mathbb{P}^1$, $N_{F_0/X}\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus n-3}$ または $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus n-4}$ で $(-K_X\cdot F_0)=1$ かつ F の定義 ideal を $J\subset\mathcal{O}_X$ とすると $J/J^2\cong(\mathcal{O}_X/J)^{\oplus n-1}$, $I/J\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$. ただし I は F_0 の定義 ideal.

さて $F=F_1\cup\cdots\cup F_t$ と既約な curve に分解する。今 F が f の general fiber ならば F は既約で $N_{F/X}\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus n-1}$ だから $(-K_X\cdot F)=2-\deg N_{F/X}=2$. また一般の $F=F_1\cup\cdots\cup F_t$ についても $(-K_X\cdot F)=2$, $(-K_X\cdot F_i)>0$ であるから, $t\le 2$ がわかる。∴ F は (i) 既約・被約 or (ii) $F=F_1\cup F_2$ or (iii) $F=2F_0$.

Case (i) この時結論が成立することは Lemma 3.3 より明らか。

Case (ii) $0\to\mathcal{O}_F\to\mathcal{O}_{F_1}\oplus\mathcal{O}_{F_2}\to\mathcal{O}_{F_1\cap F_2}\to 0$ より $\chi(\mathcal{O}_{F_1\cap F_2})=2-\chi(\mathcal{O}_F)$ ところで, $(-K_X\cdot F_i)=1$ $(i=1,2)$ より $N_{F_i/X}\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus n-2}$ である。今 F は連結だから $\chi(\mathcal{O}_{F_1\cap F_2})\ge 1$. また $H^1(\mathcal{O}_X/I_F)=0$ より $\chi(\mathcal{O}_F)\ge 1$. 従って $\chi(\mathcal{O}_{F_1\cap F_2})=1$. ∴ F_1 と F_2 は一点で交わる。

Case (iii) $I\supset J\supset I^2$ $(I=I_{F_0}, J:=I_F)$ は F_0 上の各点の local ring で見れば すぐわかる。$1=\chi(\mathcal{O}_F)=\chi(\mathcal{O}_{F_0})+\chi(I/J)$ より $0\ge\chi(I/J)=\deg I/J+\mathrm{rank}\, I/J$.

ところが Lemma 3.3 より $\deg I/J \geq -1$. これより $\deg I/J = -1$. rank I/J $=1$, $\chi(I/J)=0$ を得る. ∴ $I/J \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$. Lemma 3.3 より結論を得る。

以上の F の分類により f は flat であることがわかる。従って Y は non singular. □

§4 Appendix.

次に述べる proposition は Shokurov によって川又の結果が一般化される以前のものである。

<u>prop. 4.1</u> X は non singular, H は nef and big な Cartier divisor で $aH-K_X$ が ample なもの ($\exists a>0$) とすると十分大なる全 m について $Bs|mH|=\phi$ となる。

<u>proof.</u> $a=1$ としてよい。$Bs|mH|\neq\phi$ とする。$f: Y \longrightarrow X$ を $Bs|mH|$ の resolution で以下の条件をみたすものとする。

(0) ΣF_j は SNC (simple normal crossing)

(i) $K_Y = f^*H + \Sigma a_j F_j$, $a_j \geq 0$. そして $a_j>0$ は F_j が exceptional な時に限る.

(ii) $mf^*H \sim L + \Sigma r_j F_j$. $|L|$ は free で $r_j \geq 0$. そしてある r_j は真に正.

(iii) $f^*H - \Sigma p_j F_j$ は $\mathbb{Q}$-ample, $0 \leq p_j \ll 1$.

(iv) ある index 0 について $-cr_0+a_0-p_0=-1$, $j\neq 0$ については

$-cr_j+a_j-p_j>-1$, $c>0$. すなわち $\sum_j \ulcorner -cr_j+a_j-p_j \urcorner F_j = A - B$.

ここに $B=F_0$, $\ulcorner\ \urcorner$ は切り上げをあらわす.

以上が可能なのは例えば Reid [4] の証明と同様である。

$t\in\mathbb{Z}$ について, $N_t := tf^*H + \Sigma(-cr_j+a_j-p_j)F_j - K_Y \equiv cL + f^*((t-cm)H-K_X)$ $-\Sigma p_j F_j$. $M_t := N_t + f^*K_X \equiv cL + f^*((t-cm)H) - \Sigma p_j F_j$ と $\mathbb{Q}$-divisor N_t, M_t を定義する. $t>cm+2$ の時 N_t, M_t は nef + ample の形に書けるから $\mathbb{Q}$-ample となる. また N_t, M_t の小数部分は SNC. 川又 Vanishing により $H^1(Y, tf^*H+A-B) = H^1(Y, \ulcorner N_t \urcorner + K_Y) = 0$, $H^i(B, tf^*H+A) = H^i(B, \ulcorner N_t \urcorner + K_B) = 0$ $(i>0)$, $H^i(B, f^*(tH+K_X)+A) = H^i(B, \ulcorner M_t \urcorner + K_B) = 0$ $(i>0)$ がわかる. もし $H^0(B, tf^*H+A) \neq 0$ $(t\gg 0)$ がわかれば, $H^0(Y, tf^*H)$ $= H^0(Y, tf^*H+A) \twoheadrightarrow H^0(B, tf^*H+A) \neq 0$ であるから $f(B) \not\subset Bs|tH|$

がわかる。以下 Noetherian induction で $t \gg 0$ について $Bs|tH| = \phi$ が得られる。そこで以下 $H^0(B, tf^*H + A) \neq 0\ (t \gg 0)$ を証明する。

以下 $\square'$ によって $\square|_B$, $f^*\square|_B$ をあらわす。例えば $K_X' := f^*K_X|_B$.

Case I. $H' \equiv 0$ on B のとき：このときは ${}^\forall t \in \mathbb{Z}$ に対し N_t' は ample だから $H^i(B, tH' + A') = 0\ (i > 0)$. $\therefore h^0(B, tH' + A') = \chi(\mathcal{O}_B(tH' + A')) = \chi(\mathcal{O}_B(A')) = h^0(B, A') > 0$ となり主張が言える。

Case II. $H' \not\equiv 0$ on B のとき：$t > cm + 2$ に対して
$h^0(B, tH' + A') = \chi(\mathcal{O}_B(tH' + A')) = \frac{1}{6}t^3H'^3 + \frac{1}{4}t^2H'^2(2A' - K_B) + \frac{1}{12}ct + const.$
(ただし $c := \{6H'A'(A' - K_B) + H'(K_B^2 + c_2(B))\}$) となる。そこで、

Case II-1. $(H'^3)_B \neq 0$ のとき：この時 $t \to \infty$ で, $h^0(B, tH' + A') \to \infty$ となり主張は正しい。

Case II-2. $(H'^3)_B = 0$, $H'^2 \not\equiv 0$ のとき：このときは $H'^2(2A' - K_B) = H'^2(A' + (\nu H' + A' - K_Y' - B')) = H'^2A' + H'^2N_\nu' + H'^2(\ulcorner N_\nu' \urcorner - N_\nu')$ (ただし $\nu \gg 0$). 今 H' は nef, A', $(\ulcorner N_\nu' \urcorner - N_\nu')$ は effective, N_ν' は ample だから $H'^2(2A' - K_B) \geqq H'^2N_\nu' > 0$. ∴ 2次の係数が正だから, $t \to \infty$ のとき $h^0(B, tH' + A') \to \infty$.

Case II-3. $H'^2 \equiv 0$, $c \neq 0$ のとき：このときは $h^0(B, tH' + A')$ で, t について3次と2次の項がなく, 1次の係数は正となり, $t \to \infty$ のとき $h^0(B, tH' + A') \to \infty$ がいえる。

Case II-4. $H'^2 \equiv 0$, $c = 0$ のとき：$h^0(B, tH' + K_X' + A') = \chi(\mathcal{O}_B(tH' + K_X' + A')) = \frac{t}{12}\{6H'(K_X' + A')(K_X' + A' - K_B) + H'(K_B^2 + c_2(B))\} + const.$ となる。今この式で t の係数は正だから,
$0 \leqq \{6H'(K_X' + A')(K_X' + A' - K_B) + H'(K_B^2 + c_2(B))\} - c = 6H'K_X'(K_X' + 2A' - K_B)$
$= -6H'(H' - K_X')((\nu H' + K_X' + A' - K_Y' - B') + A') = -6H'(H' - K_X')(M_\nu' + (\ulcorner M_\nu' \urcorner - M_\nu') + A')$ (ただし $\nu \gg 0$). ここで, $H' - K_X'$, H' は nef, A', $(\ulcorner M_\nu' \urcorner - M_\nu')$ は effective, M_ν' は ample だから上式の最後の辺は0以下。すなわち $H'(H' - K_X')(M_\nu' + (\ulcorner M_\nu' \urcorner - M_\nu') + A') = 0$. 特に $H'(H' - K_X')M_\nu' = 0$. さて $f_B = f|_B : B \to f(B)$ を考える。$H' \not\equiv 0$ だから $1 \leqq \dim f(B) \leqq 3$ である。

Case II-4-i　$\dim f(B)=1$ のとき：$\deg_{f(B)} H > 0$ であるから，$h^0(f(B), tH) > 0$ $(t \gg 0)$．$\therefore H^0(B, tH'+A') \neq 0$．

Case II-4-ii　$\dim f(D)=2$ のとき：$H(H-K_X)|_{f(B)}$ は positive degree の 0-cycle（$\because$ $H-K_X$ は ample，$H|_{f(B)} \not\equiv 0$）．$\therefore$ $H'(H'-K_X')$ も positive な B 上の 1-cycle．$\therefore$ $H'(H'-K_X')M_\nu' > 0$ となり矛盾。

Case II-4-iii　$\dim f(B)=3$ のとき：このときも上と同様にして $H'(H'-K_X')M_\nu' > 0$ が導かれ矛盾を生じる。 $\square$

文献

[1] S. Mori, Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective, Ann. of Math., 116 (1982), 133-176.

[2] Y. Kawamata, Cone of curves of algebraic varieties, Preprint.

[3] V.V. Shokurov, Non-vanishing theorem (Теорема о необращении в нуль), to appear in Известия Академии Наук СССР.

[4] M. Reid, Projective morphisms according to Kawamata, Preprint.

[5] T. Fujita, Classification of projective varieties of Δ-genus one, Proc. Japan Acad., 58 (1982), 113-116.

[6] V.A. Iskovskih, Fano 3-fold I, II Math. USSR-Izv. 11(1977) 485-527, 12(1978), 469-506

[7] S. Nakano, On the inverse of monoidal transformations, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 6(1971), 483-502.