代数幾何学シンポジウム記録
1983年度　pp.29-53

Elliptic Srufaces in Characteristic p.

上野健爾
桂利行

§0 序　　正標数の代数閉体上定義された楕円曲面に関しては，これまでいくつかの興味ある現象が発見されているが，組織的に研究されたことはなかった。ここでは[KU]で得られた結果のいくつかを紹介する．研究の発端は正標数の代数閉体上定義された楕円曲面は標数0にliftできるかという問題にあった。そのために標数0で成立する事実が正標数のときどうなるかという問題が生じる。驚くべきことに楕円曲面に関しては，多くの場合標数0と類似の結果が成立する。現在の所，標数0にliftできない楕円曲面の例は知られていない。

以下特にことわらない限り，代数閉体kを一つ固定し，代数多様体や代数多様体の間の射はすべてk上定義されているとする。体kの標数はしばらくの間任意とする。非特異完備曲面Sから非特異完備曲線Cの射 $f: S \longrightarrow C$ を考える。C上の点 g（以下，点は閉点を意味する）に対して f の g 上のファイバーをS上の因子と考えて $\sum m_i D_i$ と記すとき，$m = g.c.d.(m_i) > 1$ であれば，このファイバーを重複ファイバーと呼び，以下 mD，$D = \sum m_i/m \, D_i$ と記す。整数 m を重複ファイバーの重複度という。

さて $f: S \rightarrow C$ を楕円曲面としよう（即ち，f のある幾何学的ファイバー，従ってほとんどすべての幾何学的ファイバーは非特異楕円曲線）。m_1F_1, m_2F_2, ..., $m_\lambda F_\lambda$ を f の

すべての重複ファイバーとする。このとき，次の標準因子公式が知られている。

(0, 1) $K_S = f^*(K_C - \mathfrak{f}) + \sum_{i=1}^{\lambda} a_i F_i$,

ここで，

$$0 \leq a_i \leq m_i - 1,$$

また，$R^1 f_* \mathcal{O}_S$ の torsion part を $\mathcal{T}$ と記すと，

$$\mathcal{O}_C(\mathfrak{f}) \simeq R^1 f_* \mathcal{O}_S / \mathcal{T}.$$

以下因子と，それに対応する直線束や可逆層をしばしば同一視する。K_S (K_C) は S (C) の標準因子とする。さらに

(0, 2) $-\deg \mathfrak{f} = \chi(S, \mathcal{O}_S) + \text{length}\, \mathcal{T}$

が成立する。

重複ファイバー $m_i F_i$ に対して その normal bundle $[F_i]|_{F_i}$ は $\mathrm{Pic}^0(F_i)$ の元を定める。$[m_i F_i]|_{F_i}$ は trivial であるので，$[F_i]|_{F_i}$ の $\mathrm{Pic}^0(F_i)$ での位数 ν_i は m_i の約数である。char k $= 0$ のときは $\nu_i = m_i$，char $k = p > 0$ のときは

(0, 3) $m_i = p^{\gamma_i} \nu_i$, $\gamma_i \geq 0$

であることが知られている。

$f(F_i) = \mathfrak{g}_i$ とおくと，次の条件は同値である

(0, 4) (i) $\mathcal{T}_{\mathfrak{g}_i} = 0$ (ii) $h^0(\mathcal{O}_{m_i F_i}) = 1$, (iii) $a_i = m_i - 1$

(iv) $\nu_i = m_i$.

この条件が成立するとき，重複ファイバー $m_i F_i$ は tame であるという。tame でない重複ファイバーは wild であるという。wild であることは，次の同値な条件の一つが成立するこ

として特徴づけることができる。

(0.5) i) $\mathcal{T}_{\mathcal{F}_i} \neq 0$,　ii) $h^0(\mathcal{O}_{m_i F_i}) \geqq 2$,　iii) $0 \leq a_i \leq m_i - 2$

iv) $1 \leq \nu_i \leq m_i - 1$　v) (0,3) で $\gamma_i \geqq 1$.

従って標数0ではすべての重複ファイバーは tame である。

§1. Algebraicity of elliptic surfaces.

楕円曲面の pluricanonical mapping を調べるためには、$f: S \longrightarrow \mathbb{P}^1$, $\chi(S, \mathcal{O}_S) = 0$ である楕円曲面の重複ファイバーを調べておく必要がある。$m_1 F_1, \cdots\cdots, m_\lambda F_\lambda$ を f のすべての重複ファイバーとし、$\nu_i = \mathrm{ord}\,[F_i]|_{F_i}$ とおく。このとき、$\chi(S, \mathcal{O}_S) = 0$, $f: S \longrightarrow \mathbb{P}^1$ のタイプは $(m_1, m_2, \cdots, m_\lambda \mid \nu_1, \nu_2, \cdots\cdots, \nu_\lambda)$ であるという。特にすべての重複ファイバーが tame のときは $(m_1, m_2, \cdots, m_\lambda)$ と略記する。

<u>定義 1.1</u>.　$1 \leq i \leq \lambda$ なる i を一つ固定する。

$$\begin{cases} n_i \equiv 1 \pmod{\nu_i} \\ \dfrac{n_1^{(i)}}{m_1} + \dfrac{n_2^{(i)}}{m_2} + \cdots\cdots + \dfrac{n_\lambda^{(i)}}{m_\lambda} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

が成立するような整数 $n_1^{(i)}, n_2^{(i)}, \cdots\cdots, n_\lambda^{(i)}$ が存在するとき、$(m_1, m_2, \cdots, m_\lambda \mid \nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_\lambda)$ は条件 U_i を満足するという。

整数 $n_1, n_2, \cdots, n_\lambda$ は i によって変わってよいことに注意しておく。

<u>定理 1.2</u>.　$f: S \longrightarrow \mathbb{P}^1$, $\chi(S, \mathcal{O}_S) = 0$, はタイプ $(m_1, m_2, \cdots, m_\lambda \mid \nu_1, \nu_2, \cdots\cdots, \nu_\lambda)$ の(代数的)楕円曲面とする。このとき、$(m_1, m_2, \cdots, m_\lambda \mid \nu_1, \nu_2, \cdots\cdots, \nu_\lambda)$ は各 i, $1 \leq i \leq \lambda$ に対して、条件 U_i を満足する。

上の定理で「代数的」という言葉を入れたのは，$k=\mathbb{C}$ のとき 解析的（非代数的）楕円曲面を除くためである。上の定理より タイプ（2, 3, 7）の代数的楕円曲面は存在しないことが分かる。しかし タイプ（2, 3, 7）の 解析的楕円曲面は存在する。また上の定理は必要条件のみを与えていることを注意しておこう。各 i に対して 条件 U_i を満足しても，タイプ $(m_1, m_2, \cdots m_\lambda | \nu_1, \nu_2, \cdots \nu_\lambda)$ の楕円曲面が存在するとは限らない。$k=\mathbb{C}$ のときは必要十分条件を与えることができる。（[KU] appendix I を参照のこと）。

定理の証明のあらすじを述べよう。まず次の事実に注意する。

<u>補題</u> 1.3. $f: S \to C$ を楕円曲面，$\alpha: S \longrightarrow \mathrm{Alb}(S)$ をアルバネーズ写像とする。また $\varphi: C \longrightarrow J(C)$ を曲線 C からそのヤコビ多様体への標準写像とする。このとき次の条件は同値である。

(i) $\alpha(f^{-1}(\delta))$ が点であるような $\delta \in C$ が存在する。

(ii) $\mathrm{Alb}(S) \simeq J(C)$

一方 (i), (ii) が成立しなければ $\dim \mathrm{Alb}(S) = \dim J(C) + 1$.

我々の場合にこの補題を適用する。$0 = 12\chi(S, \mathcal{O}_S) = c_2(S) = 2 - 2b_1(S) + b_2(S)$，$b_1(S) = 2\dim \mathrm{Alb}(S)$ より，$\dim \mathrm{Alb}(S) \geq 1$，従って $\dim \mathrm{Alb}(S) = 1$，かつ $\alpha: S \to \mathrm{Alb}(S)$ によって f の各ファイバーは $\mathrm{Alb}(S)$ 上に surjective にうつされる。従って重複ファイバー $m_i F_i$ は F_i は非特異楕円曲線であることが分かり，さらに $j: F_i \hookrightarrow S$ を自然な closed immersion とすると

$$\alpha \circ j: \quad F_i \hookrightarrow S \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Alb}(S)$$

は isogeny であることが分かる。dual にうつって

$$j^* \circ \alpha^*: \quad \mathrm{Pic}^0(\mathrm{Alb}(S)) \to \mathrm{Pic}^0(S) \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(F_i)$$

は isogeny，従って $j^*: \mathrm{Pic}^0(S) \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(F_i)$ は全射である。よって

(0.6) $$j^*(\mathcal{O}_S(L)) = \mathcal{O}_S(-F_i)|_{F_i}, \quad \mathcal{O}_S(L) \in \mathrm{Pic}^0(S)$$

を満足する S 上の因子 L が存在する。従って完全列

$$0 \to \mathcal{O}_S(L) \to \mathcal{O}_S(F_i + L) \to \mathcal{O}_{F_i} \to 0$$

ができる。これより 完全列

(0.7) $$0 \to H^0(L) \to H^0(\mathcal{O}_S(F_i+L)) \to H^0(\mathcal{O}_{F_i}) \to$$
$$\to H^1(L) \to H^1(\mathcal{O}_S(F_i+L)) \to H^1(\mathcal{O}_{F_i}) \to$$
$$\to H^2(L) \to H^2(\mathcal{O}_S(F_i+L)) \to$$

を得る。$\mathcal{O}_S(L) \in \mathrm{Pic}^0(S)$ であるので，Riemann-Roch の定理より

(0.8) $$\chi(S, \mathcal{O}_S(F_i+L)) = 0$$

を得る。そこで $H^0(\mathcal{O}_S(F_i+L)) = H^2(\mathcal{O}_S(F_i+L)) = 0$ と仮定しよう。さて (0.8) より $H^1(\mathcal{O}_S(F_i+L)) = 0$。従って (0.7) より，$h^2(L) = h^1(\mathcal{O}_{F_i}) = 1$ を得る。よって $h^0(K_S - L) = 1$ を得，(0.1) より

$$D \sim mE + \sum_{j=1}^{\lambda} a_j F_j - L$$

なる S 上の effective divisor D が存在する。E を f の general fibre とすると，$L \cdot E = 0$ より，$D \cdot E = 0$，即ち，D の support はすべて f のファイバーに含まれ，

$$D \sim nE + \sum_{j=1}^{\lambda} \alpha_j F_j$$

である。従って

(0.9) $$-L \sim (n-m)E + \sum_{j=1}^{\lambda}(\alpha_j - a_j)F_j$$

であり，(0.6) を使うことによって，これより

$$\mathcal{O}_S(F_i)|_{F_i} = \mathcal{O}_S(-L)|_{F_i} \simeq \mathcal{O}_S((\alpha_i - a_i)F_i)|_{F_i}$$

を得る。$[F_i]|_{F_i}$ の位数は ν_i であるので，これより

$$\alpha_i - a_i \equiv 1 \pmod{\nu_i}$$

を得る。また H を S の超平面切断因子とすると，$L \cdot H = 0$ より，(0.9) から

$$0 = (n-m) + \sum_{j=1}^{\lambda} (\alpha_j - a_j)/m_j$$

を得る。よって $n_j = \alpha_j - a_j$ ととればよい。

$H^0(\mathcal{O}_S(F_i+L)) \neq 0$ のときは，$D \sim F_i + L$ なる effective divisor が存在し，$H^2(\mathcal{O}_S(F_i+L)) \neq 0$ のときは duality によって $H^0(\mathcal{O}_S(K_S - F_i - L)) \neq 0$ より $D \sim K_S - F_i - L$ なる effective divisor が存在し，上と同様の論法によって，条件 U_i が成立することが分かる。

定理1.2より応用上重要ないくつかの系が得られる。

<u>系 1.4</u>．$f: S \to \mathbb{P}^1$ はタイプ $(m|\nu)$ の楕円曲面とする。(S は勿論代数的と仮定する。) すると f の唯一つの重複ファイバー mE は wild であり，$m = p^\delta$，$\delta \geq 1$，$p = \operatorname{char} k > 0$，かつ $\nu = \operatorname{ord} [E]|_E = 1$ である。

<u>系 1.5</u>．$f: S \to \mathbb{P}^1$ はタイプ (m_1, m_2, m_3) の代数的楕円曲面とする。S の小平次元 $\kappa(S)$ は 1 であるとすると，

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \leq \frac{5}{6}$$

が成立する。等号は $(m_1, m_2, m_3) = (2, 6, 6)$ の時に限り成立する。

§2 楕円曲面の pluricanonical mapping.

この節では次の結果を紹介する。

定理 2.1. $f : S \longrightarrow C$ は代数的楕円曲面，かつその小平次元 $k(S)$ は 1 であるとする。このとき，$m \geqq 14$ であれば，$|mK_S|$ は base point free であり（fixed component は持つかもしれないが），かつ $\Phi_{|mK_S|}$ は S の楕円曲面としての唯一つの構造を与える。

この定理は飯高（[I]）の定理の一般標数への拡張である。[I] では $k=\mathbb{C}$ かつ解析曲面で考えていたので，$m \geqq 86$ の時に $\Phi_{|mK_S|}$ は S の楕円曲面としての構造を与えることが示されている。上の定理は $k=\mathbb{C}$ の時でも新しい結果である。また $\mathrm{char}\, k \neq 2, 3$ のときは 14 が best possible であることが分かる。（解析的楕円曲面では 86 が best possible であった。）$\mathrm{char}\, k = 2, 3$ のときは 14 が best possible であるかどうかは不明である。もう少し小さくとれる可能性がある。

証明の方針は本質的には [I] と同じである。ただ wild な重複ファイバーがあるので，wild fibre についての考察が不可欠である。以下証明の荒すじを与えよう。

(0.1) によって

$$|mK_S| = f^*\left(|mK_C - m\,\mathfrak{L}| + \sum_{i=1}^{\lambda}\left[\frac{ma_i}{m_i}\right]\mathfrak{P}_i\right) + \text{fixed component}$$

が成立する。ここで $f(F_i)=\mathfrak{P}_i$，m_iF_i $i=1,\cdots,\lambda$ は重複ファイバー，とおいた。[ ] は Gauss 記号である。そこで

$$\Delta = m(K_C - \mathfrak{L}) + \sum_{i=1}^{\lambda}\left[\frac{ma_i}{m_i}\right]\mathfrak{P}_i, \tag{2.1}$$

$$g = g(C), \quad t = \mathrm{length}\ \mathcal{T}.$$

とおこう。 $\deg\Delta \geqq 2g+1$ であれば，Δ は C 上の very ample divisor である。従って $m \geqq 14$ であれば $\deg\Delta \geqq 2g+1$ を示せば十分である。(0,1) と (0,2) によって $\kappa(S)=1$ であることと

$$(2.2) \qquad 2g-2+\chi(S,\mathcal{O}_S)+t+\sum_{i=1}^{\lambda}\frac{a_i}{m_i} > 0$$

とは同値である。従って証明すべきことは，$m \geqq 14$ であれば

$$(*) \qquad \deg\Delta = m(2g-2+\chi(S,\mathcal{O}_S)+t)+\sum_{i=1}^{\lambda}\left[\frac{ma_i}{m_i}\right] \geqq 2g+1$$

が成立することである。楕円曲面 S では常に $c_2(S) \geqq 0$ であるので，$\chi(S,\mathcal{O}_S)=\frac{1}{12}c_2(S) \geqq 0$ である。そこで次の6個の場合を個別に考察する。

(I) $\chi(S,\mathcal{O}_S)+t \geqq 3$

(II) $\chi(S,\mathcal{O}_S)+t \leqq 2$ かつ $g \geqq 1$

(III) $\chi(S,\mathcal{O}_S)+t = 2$ かつ $g=0$

(IV-1) $\chi(S,\mathcal{O}_S)=1,\ t=0$ かつ $g=0$

(IV-2) $\chi(S,\mathcal{O}_S)=0,\ t=1$ かつ $g=0$

(V) $\chi(S,\mathcal{O}_S)=t=0$ かつ $g=0$

このうち (I) のときは $m \geqq 1$ で，(II) では $m \geqq 6$ で (*) が成立することは容易に分かる。(V) の場合は論文〔I〕の方法がそのまま適用できる。すなわち

$$A = -2+\sum_{i=1}^{\lambda}(m_i-1)/m_i$$

とおくと，$\kappa(S)=1$ であることより $A>0$ である。従って $\lambda \geqq 3$ である。$\lambda \geqq 4$ であれば

$$A \geqq -2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$$

であるが，タイプ (2, 2, 2, 3) は条件 U_4 を満足しない。従って $\lambda \geqq 4$ であれば $A > \frac{1}{6}$ である。一方 $\lambda=3$ であ

れば §1 系1.5より $A \geq \frac{1}{6}$ であり，かつ等号はタイプ (2, 6, 6) の時に限り成立する。さて

$$\sum_{i=1}^{\lambda}[m(1-\frac{1}{m_i})] = \sum_{i=1}^{\lambda} m(1-\frac{1}{m_i}) + \sum_{i=1}^{\lambda}\{[m(1-\frac{1}{m_i})-$$

$$-m(1-\frac{1}{m_i})\} \geq (m-1)\{\sum_{i=1}^{\lambda}(1-\frac{1}{m_i})\} = (m-1)(2+A).$$

従って (*) が成立するためには，$m \geq 14$ であれば $(m-1)(2+A) > 2m$ が言えれば十分。しかし $A \geq \frac{1}{6}$ なのでこれは明らか。また $A = \frac{1}{6}$ であれば $(m-1)(2+A) > 2m$ であるためには $m \geq 14$ でなければならないことも明らかである。

残りの場合で面倒なのは $t \geq 1$ の場合であり，一番問題になるのは (III) で $\chi(S, \mathcal{O}_S) = 0$, $t = 2$, $g = 0$ かつ $f: S \to \mathbb{P}^1$ は唯一つの重複ファイバーしか持たない場合である。$t = 2$ であるので，この重複ファイバーは wild である。重複ファイバーを mD と記し，$\nu = \mathrm{ord}\,[D]|_D$ とおく。このとき

$$h^0(\mathcal{O}_{mD}) = h^1(\mathcal{O}_{mD}) = h^0((R^1f_*\mathcal{O}_S)_\wp) = 1 + t = 3$$

が成立つ。ここで $\wp = f(D)$ とおいた。また (0.1) より，このとき

$$K_S = aD,$$

かつ $\kappa(S) = 1$ より $a \geq 1$ が成立する。よって問題は m と a との関係を見出すことに帰着される。幸いに Raynaud [R] の結果によって，次の補題を示すことができる。

<u>補題 2.2.</u> (i) $h^0(\mathcal{O}_{mD}) = 2$ であれば $a + \nu + 1 = m$
(ii) $h^0(\mathcal{O}_{mD}) = 3$ であれば，$a + \nu + 1 = m$ または $a + \nu + 1 = m$，または $a + (p+1)\nu + 1 = m$ が成立する。

この補題の (ii) によって，我々の場合 $m \geq 4$ であれば既に (*) が成立することが分かる。また $t = 1$ の場合は補題の (i) を

使う。いずれにせよ残りの場合は $m_0 \leq 13$ なる整数が存在し，$m \geq m_0$ のとき (*) が成立することが分かる。

次に 14 が best possible である例を作ろう。

例 2.3．char $k \neq 2, 3$ とする．C は

$$y^2 = x^6 - 1$$

で定義された種数 2 の非特異完備曲線とする．C の自己同型 σ, τ を

$$\sigma : (x, y) \longmapsto (x, -y)$$
$$\tau : (x, y) \longmapsto (\varepsilon x, y),$$

で定義する。ここで ε は 1 の原始 6 乗根とする。G を σ, τ より生成される群とする．$G \simeq \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(6)$ である。E を楕円曲線，a, b を E の位数 2，6 の点とする。G は $C \times E$ 上に

$$\sigma : (x, y, z) \longmapsto (x, -y, z + a)$$
$$\tau : (x, y, z) \longmapsto (\varepsilon x, y, z + b)$$

で作用し，固定点を持たない。そこで

$$f : S = C \times E/G \longrightarrow C/G \simeq \mathbb{P}^1$$

を考えると，容易にこれはタイプ (2, 6, 6) の楕円曲面であることが分かる。

$$K_S = f^*(-2g) + F_1 + 5F_2 + 5F_3$$

と書けることより

$$|13K_S| = \phi, \quad \dim |14K_S| = 1$$

であることが分かる。

§3. 楕円曲面の例

この節では $\mathrm{char}\, k = p > 0$ と仮定して，正標数特有の楕円曲面の例を挙げる。

<u>例 3.1</u>. C を

$$x^p - x = t^m, \qquad (m, p) = 1$$

で定義される非特異完備曲線とする。曲面 C は位数 p の自己同型

$$g : (t, x) \longrightarrow (t, x+1)$$

を持つ。a を ordinary elliptic curve E の p 等分点とし，$C \times E$ への g の作用を

$$g : (t, x, \xi) \longmapsto (t, x+1, \xi + a)$$

で定める。g は $C \times E$ 上に固定点を持たず，また C 上の固定点は無限遠点のみである。従って楕円曲面

$$f : S = C \times E/_{\langle g \rangle} \longrightarrow C/_{\langle g \rangle} \cong \mathbb{P}^1$$

は無限遠点でのみ重複ファイバー pE_∞ を持つ。$C \times E \longrightarrow S$ はエタール商写像であるので，$\chi(S, \mathcal{O}_S) = \frac{1}{p}\chi(C\times E, \mathcal{O}_{C\times E}) = 0$，従って系 1.4 が適用できて，$f : S \to \mathbb{P}^1$ はタイプ $(p\,|\,1)$ の楕円曲面である。

$$K_S = f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m-d-2) + (p-\beta-1)E_\infty$$

$$m = dp + \beta, \qquad 1 \leq \beta < p, \quad d \geq 0$$

従って

$$-\deg \underline{f} = m - d$$

であることも簡単な計算から分かる。また

$$p_g(S) = m - d - 1,$$

$$\kappa(S) = \begin{cases} -\infty & , \ m = 1 \\ 0 & , \ m = 2 \text{ かつ } p = 3 \text{ または } m = 3 \text{ かつ } p = 2 \\ 1 & , \ \text{その他} \end{cases}$$

である。

例 3.2. 次にタイプ $(p^2|1)$ の楕円曲面の例を示す。C を次の式で定まる $\mathbb{P}^1$ の p^2 次巡回被覆である非特異完備曲線とする。

$$x^p = x + t^m, \quad (m, p) = 1$$
$$y^p = y - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{(p-i)!\,i!} x^i t^{m(p-i)}.$$

曲面 C は位数 p^2 の自己同型写像 g

$$g : (t, x, y) \longmapsto (t, x+1, y - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{(p-i)!\,i!} x^i)$$

を持つ。g の固定点は C の無限遠点のみである。E を ordinary elliptic curve θ を位数 p^2 の E の k 有理点とする。g の $C \times E$ への作用を

$$g : (t, x, y, \zeta) \longmapsto (t, x+1, y - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{(p-i)!\,i!} x^i, \zeta + \theta)$$

と定義すると、これは固定点を持たない。従って例 3.1 と同様の考察によって、楕円曲面

$$f : S = C \times E/\langle g \rangle \longrightarrow C/\langle g \rangle \cong \mathbb{P}^1$$

は無限遠点上でのみ重複ファイバー $p^2 E_\infty$ を持ち、タイプ $(p^2|1)$ であることが分かる。また

$$-\deg \mathfrak{f} = mp - m + 1 + \left[\frac{mp-(m+1)}{p^2}\right],$$

$$a = mp - (m+1) - \left[\frac{mp-(m+1)}{p^2}\right] p^2,$$

であることも示すことができる。S の構成法より明らかなように S から楕円曲線 $E/\langle\theta\rangle$ への全射があり、従って補題 1.3 より $\dim \mathrm{Alb}(S) = 1$ である。また

$$p_g(S) = mp - m + \left[\frac{mp-(m+1)}{p^2}\right].$$

である。 $\chi(S, \mathcal{O}_S) = 0$ であるので

$$h^1(S, \mathcal{O}_S) = mp - m + 1 + \left[\frac{mp-(m+1)}{p^2}\right]$$

である。また容易に分かるように

$$a \not\equiv -1 \pmod{p}$$

であることが分かる。これはもっと一般的に成立する事実である。

命題 3.3. $mp^\nu F$ を楕円曲面の wild fibre, $\mathrm{ord}[F]|_F = m$, $(m, p) = 1$ と仮定する。さらに F は ordinary elliptic curve またはタイプ I_b（すなわち b 個の有理曲線のなすサイクル）とする。このとき

$$\left[\frac{a}{m}\right] \not\equiv -1 \pmod{p}.$$

証明は次節の wild fibre の tame fibre への還元の理論を使う。F が supersingular elliptic curve のとき、この命題が成立するかどうか不明である。

例 3.4. 次に α_p quotient として得られる楕円曲面の例を挙げる。

C を $\mathbb{P}^2$ 内の方程式

$$\xi_0 \xi_2^{p-1} - \xi_1^p = 0$$

で定義される特異曲線とする。局所群スキーム $\alpha_p = \mathrm{Spec}(k[\varepsilon]/(\varepsilon^p))$ は C 上に、

$$(\xi_0 : \xi_1 : \xi_2) \longrightarrow (\xi_0 : \xi_1 + \varepsilon \xi_0 : \xi_2)$$

で作用する。E を supersingular elliptic curve とすると、α_p は E の部分群スキームである。従って

$$f : S = C \times E/\alpha_p \longrightarrow C/\alpha_p \simeq \mathbb{P}^1$$

が定義できる。このとき S は非特異曲面であり，$f: S \to \mathbb{P}^1$ は無限遠点上での p 重複ファイバー pE_{10} を持つ楕円曲面であることが分かる。また

$$K_S = f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(p-3)$$

であることも証明できる。従って

$$a = 0,$$

$$-\deg \mathfrak{f} = p-1$$

が成立する。C の非特異モデルは有理曲線であるので，S は uniruled である。また

$$\kappa(S) = \begin{cases} -\infty & , p=2 \\ 0 & , p=3 \\ 1 & , p \geq 5, \end{cases}$$

$$\dim \operatorname{Alb}(S) = 1$$

$$\chi(S, \mathcal{O}_S) = 0$$

であることも分かる。

最後に標数 0 への引上げの例を与える。

<u>例 3.5.</u> ω を 1 の原始 p 乗根とし，$K = \mathbb{Q}(\omega)$，$\mathbb{Z}$ を K の整数環とする。$\mathbb{P}^1(K)$ の自己同型 g

$$g: x \longmapsto \omega x + 1$$

を考える。g は位数 p である。そこで

$$P(x) = \prod_{i=0}^{p-1} g^i(x)$$

とおくと，

$$P(x) \equiv x^p - x \mod (\pi),$$

但し，ここで $\pi = 1-\omega$ とおいた。よく知られているように，$p\mathbb{Z} = (\pi)$ である。$R = \mathbb{Z}_p$ とおく。

さて $\mathbb{P}^2(R)$ の曲線 $\mathcal{C}$

$$\xi_0^p P(\xi_1/\xi_0) - \xi_0 \xi_2^{p-1} = 0$$

を考えると，これは $\mathrm{Spec}(R)$ 上 smooth である。そこで K 上定義された楕円曲線 E で 次の性質を持つものを考える。

1) K 上の有限拡大 L と，E の位数 p の L 有理点 a が存在する。 2) $\widetilde{R}$ を R の L での整閉とすると，E は $\mathrm{Spec}(\widetilde{R})$ 上のアーベルスキーム $\varphi: \mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{Spec}(\widetilde{R})$ に拡張でき，a は φ の位数 p の切断 $\widetilde{a}$ に拡張できる。さて $C \underset{\mathrm{Spec}(\widetilde{R})}{\times} \mathcal{E}$ への g の作用を，

$$g: ((s_0 : s_1 : s_2), \eta) \longmapsto ((s_0 : \omega s_1 + s_0 : s_2), \eta + \widetilde{a})$$

と定義し，$\mathcal{S} = C \underset{\mathrm{Spec}(\widetilde{R})}{\times} \mathcal{E} / \langle g \rangle$, $\psi: \mathcal{S} \longrightarrow \mathrm{Spec}(\widetilde{R})$ を構造射と定義する。さらに $\widetilde{f}: \mathcal{S} \longrightarrow C/\langle g \rangle \simeq \mathbb{P}^1(\widetilde{R})$ なる射がある。ψ は smooth であり，

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, "\widetilde{f}"] & \\ \mathrm{Spec}(\widetilde{R}) & \mathbb{P}^1(\widetilde{R}) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

は可換図式である。$\mathrm{Spec}(\widetilde{R})$ の閉点上 および 生成点上では $\widetilde{f}_0 : S_0 \longrightarrow \mathbb{P}^1$, $\widetilde{f}_\eta : S_\eta \to \mathbb{P}^1$ なる楕円曲面を定める。f_0 は例 3.1 で $m = p-1$ とおいた場合にあたり，従って

$$K_{S_0} = \widetilde{f}_0^{*}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(p-3)$$

$$p_g(S_0) = \begin{cases} 0 & ; \quad p = 2 \\ p-2 & , \quad p \geq 3 \end{cases}$$

である。一方 g は C_K 上で p 個の固定点 $P_i = (1 : 1/1-\omega : a_i)$, $i = 1, 2, \cdots, p-1$, a_i は $y^{p-1} = p(1/1-\omega)$ の解，および無限遠点である。従って $\widetilde{f}_\eta : S_\eta \longrightarrow \mathbb{P}^1$ は p 個の多重ファイバー pE_i, $i=1, \cdots, p$ を有し，従って，次の結果を得る。

$$K_{S_\eta} = \widetilde{f}_\eta^{*}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) + \sum_{i=1}^{p} (p-1)E_i$$

$$p_g(S_\eta) = 0 \text{ ,}$$

§4 Wild fibres の tame fibres への還元.

複素数体上の楕円曲面論では 重複ファイバーは log 変換を行うことによって構成することができる。対数函数自体は解析函数であるので, log 変換は正標数の体上では定義できない。しかしながら log 変換のもとになっている考えは, 重複ファイバーがあるとき, 底曲面の分岐被覆をとってこの曲面を引き戻し, さらにその正規化を行なえば, 重複ファイバーをなくすことができる事実に基づいている。この節では, 正標数の場合にも類似のことが成立することを示す。

$f: S \longrightarrow C$ を標数 p の代数閉体 k 上定義された楕円曲面とし, f は wild fibre mD を持つと仮定する。$f(D) = \delta$, $\nu = \mathrm{ord}\,[D]|_D$, $m = \nu p^r$, $r \geq 1$ とおく。

補題4.1. (i) $f^{-1}(\delta) = mD$ が wild fibre であれば, 自然な写像

$$\rho_D : H^1(S, \mathcal{O}_S) \longrightarrow H^1(D, \mathcal{O}_D)$$

は全射である。

(ii) もし $\deg \underline{f} < 0$ であれば ($f: S \to C$ が wild fibre を持てば, 常に $\deg \underline{f} < 0$ である, (0.2), (0.5) を参照せよ) $f^{-1}(\gamma) = E$ を smooth fibre とすると,

$$\rho_E : H^1(S, \mathcal{O}_S) \longrightarrow H^1(E, \mathcal{O}_E)$$

は零写像である。

証明 (i) 完全列

$$0 \to \mathcal{O}_S(-D) \longrightarrow \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_D \to 0$$

より, 完全列

$$H^1(S, \mathcal{O}_S) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_D) \to H^2(\mathcal{O}_S(-D)) \to H^2(\mathcal{O}_S) \to 0$$

を得る。mD は wild であるので (0.1) より

$h^0(\mathcal{O}_S(K_S+D)) = h^0(\mathcal{O}_S(K_S))$。従って Serre duality によって ρ_D は全射である。

(iii) $f: S \to C$ よりできる Leray spectral sequence より，完全列

$$0 \to H^1(C, \mathcal{O}_C) \to H^1(S, \mathcal{O}_S) \to H^0(C, R^1f_*\mathcal{O}_S) \to 0$$

を得る。 $\deg \underline{f} < 0$ であれば，

$$H^0(C, R^1f_*\mathcal{O}_S) = H^0(C, \mathcal{T}),$$

$\mathcal{T}$ は $R^1f_*\mathcal{O}_S$ の torsion part。一方 ρ_E は 上の完全列より，

$H^1(S, \mathcal{O}_S) \to H^0(C, R^1f_*\mathcal{O}_S) \to H^1(E, \mathcal{O}_E)$ と分解し，従って零写像である。

Case (I) まず D が ordinary elliptic curve である場合を考える。D の Frobenius 写像は $H^1(D, \mathcal{O}_D)$ に semi-simple に作用している。従って，F_D, F_S をそれぞれ D, S の Frobenius 写像の $H^1(D, \mathcal{O}_D)$, $H^1(S, \mathcal{O}_S)$ への作用とすると，上の補題4.1 (i) より，

(4.2) $\qquad \rho_D(\alpha) \neq 0, \quad F_S(\alpha) = \alpha, \quad F_D(\rho_D(\alpha)) = \rho_D(\alpha)$

なる $H^1(S, \mathcal{O}_S)$ の元 α が存在する。さて S のアフィン開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ をとり，α をチェック コサイクル $\{f_{ij}\}$ で表しておく。 (4.2) より

$$f_{ij}^p = f_{ij} + f_i - f_j, \qquad U_i \cap U_j$$

を満足する

$$f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i}), \quad i \in I$$

が存在する。そこで エタール被覆 $\pi_1: S^{(1)} \longrightarrow S$ を

$$\begin{cases} z_i^p - z_i = f_i, & U_i \text{ 上},\ i \in I \\ z_i = z_j + f_{ij}, & U_i \cap U_j \text{ 上} \end{cases}$$

で定義する。これは次数 p のエタール被覆である。

この被覆を D 上に制限すると $\rho_D(\alpha) \neq 0$ であることより，$\pi_1^{-1}(D) \longrightarrow D$ は non trivial なエタール被覆である。 一方

$\pi_1 : S^{(1)} \longrightarrow S$ を f の smooth fibre E 上に制限すると、補題4.1 (ii) より $c_E(\alpha)=0$ であり、従って $\pi_1^{-1}(E)$ は E の p 個のコピーに分解する。そこで $f\circ\pi_1$ の Stein 分解

$$\begin{array}{ccc} S & \xleftarrow{\pi_1} & S^{(1)} \\ f\downarrow & & \downarrow f_1 \\ C & \xleftarrow{g_1} & C^{(1)} \end{array}$$

をとると、g_1 は点 $g=f(D)$ で完全不分岐であり、$\deg g_1 = p$ である。そこで $g^{(1)} = g_1^{-1}(g)$ とおく。$f_1^{-1}(g^{(1)}) = m^{(1)} D^{(1)}$ とおくと、

$$\pi_1^*[D]|_D = [D^{(1)}]|_{D^{(1)}}$$

$$m^{(1)} = \frac{m}{p}$$

であることが分かる。D は ordinary elliptic curve であり、$\pi_1|_{D^{(1)}} : D^{(1)} \longrightarrow D$ は次数 p のエタール被覆であるので、$\pi_1|_{D^{(1)}}^* : Pic^0(D) \longrightarrow Pic^0(D^{(1)})$ は次数 p の purely inseparable homomorphism である。従って

$$\nu = \mathrm{ord}\,[D]|_D = \mathrm{ord}\;\pi_1|_{D^{(1)}}^*[D]|_D = \mathrm{ord}\,[D^{(1)}]|_{D^{(1)}}.$$

そこで以上の操作を r 回繰返す。

$$\begin{array}{ccccccccc} S & \xleftarrow{\pi_1} & S^{(1)} & \xleftarrow{\pi_2} & S^{(2)} & \longleftarrow & \cdots\cdots & \xleftarrow{\pi_r} & S^{(r)} \\ f\downarrow & & f_1\downarrow & & f_2\downarrow & & & & f_r\downarrow \\ C & \xleftarrow{g_1} & C^{(1)} & \xleftarrow{g_2} & C^{(2)} & \longleftarrow & \cdots\cdots & \xleftarrow{g_r} & C^{(r)} \\ \cup & & \cup & & \cup & & & & \cup \\ g & & g^{(1)} & & g^{(2)} & & & & g^{(r)} \end{array}$$

但し $g_i^{-1}(g^{(i-1)}) = g^{(i)}$ とおいた。g_i は $g^{(i-1)}$ で完全不分岐である。$f_i^{-1}(g^{(i)}) = m^{(i)} D^{(i)}$ とおくと、上と同様の論法によって

$$\mathrm{ord}\,[D^{(i)}]|_{D^{(i)}} = \mathrm{ord}\,[D^{(i-1)}]|_{D^{(i-1)}}$$

$$m^{(i)} = \frac{m^{(i-1)}}{p}$$

が成立する。従って

$$\mathrm{ord}\,[D^{(r)}]|_{D^{(r)}} = \nu = m^{(r)}.$$

すなわち $m^{(r)}D^{(r)}$ は tame である。

<u>注 4.3</u>. (i) コサイクル $\alpha \in H^1(S, \mathcal{O}_S)$ の取り方は一意的ではない。 $\rho_D: H^1(S, \mathcal{O}_S) \longrightarrow H^1(D, \mathcal{O}_D)$ は

$$H^1(S, \mathcal{O}_S) \xrightarrow{\delta} H^0(C, R^1 f_* \mathcal{O}_S) \longrightarrow H^1(D, \mathcal{O}_D)$$

と分解し，従って $\delta^{-1}(\mathrm{Ker}\,(H^0(C, R^1 f_*\mathcal{O}_S) \to H^1(D, \mathcal{O}_D)))$ の元だけの不定性がある。

(ii). $R = \mathcal{O}_{C,\wp}$, $\hat{R}$ を R の完備化とし，$f: S \to C$ を $\mathrm{Spec}(\hat{R})$ 上に引戻したものを $\hat{f}: \hat{S} \longrightarrow \mathrm{Spec}(\hat{R})$ と記す。 $\hat{f}$ の closed fibre は mD であり，D は (ordinary) elliptic curve であるので，mD の基本群はアーベル群。$\hat{R} \cong k[[x]]$，k は代数閉体と仮定しているので，mD と $\hat{S}$ の代数的基本群は同型である。従って $\pi_1 \circ \pi_2 \circ \cdots \circ \pi_r$ は $\hat{S}$ 上に制限すれば $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ 巡回被覆であることが分かる。しかし大域的には巡回被覆にとれるかどうかは今の所不明である。

(Case II). D が I_b 型のとき。$\mathrm{Pic}^0(D) = \mathbb{G}_m$ であるので，Frobenius 写像 F_D は $H^1(D, \mathcal{O}_D)$ 上に semi-simple に作用する。従って Case I) と同様の論法が成立し，wild fibre を tame fibre に還元することができる。

(Case III) D が supersingular elliptic curve のとき。Frobenius 写像 F_D は nilpotent に作用し，従って F_D は零写像であ

る。 従って

(4.4) $\qquad e(\alpha)\neq 0,\quad F_S^{n-1}(\alpha)\neq 0,\quad F_S^{n}(\alpha)=0,\quad F_D(\rho_D(\alpha))=0$

なる $\alpha\in H^1(S,\mathcal{O}_S)$ と正整数 n が存在する。

そこで上と同様 S のアフィン開被覆 $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ をとり、α をチェック コサイクル $\{f_{ij}\}$ で表す。(4.4) より

$$f_{ij}^{p^n} = f_i - f_j, \qquad U_i\cap U_j \text{ 上},$$

なる $f_i\in H^0(\mathcal{U}_i,\mathcal{O}_{\mathcal{U}_i})$, $i\in I$ が存在する。そこで次数 p^n の flat cover $\pi_1: S^{(1)}\longrightarrow S$ を

$$\begin{cases} z_i^{p^n} = f_i, & U_i \text{ 上},\ i\in I \\ z_i = z_j + f_{ij}, & U_i\cap U_j \text{ 上}, \end{cases}$$

で定義する。$\mu_1: \tilde{S}^{(1)}\longrightarrow S^{(1)}$ を $S^{(1)}$ の正規化、$\mu_2: \hat{S}^{(1)}\longrightarrow \tilde{S}^{(1)}$ を $\tilde{S}^{(1)}$ の minimal resolution とし、$\mu=\mu_1\circ\mu_2$ とおき、$\pi_1\circ\mu$ の Stein 分解

$$\begin{tikzcd} S \arrow[d, "f"'] & S^{(1)} \arrow[l, "\pi_1"'] & \hat{S}^{(1)} \arrow[l, "\mu"'] \arrow[ll, bend left, "\tilde{\pi}_1"] \arrow[d, "f_1"] \\ C & & C^{(1)} \arrow[ll, "g_1"'] \end{tikzcd}$$

$C\ni\gamma$, $\quad C^{(1)}\ni\gamma^{(1)}$, $\qquad g_1(\gamma^{(1)})=\gamma$,

をとる。補題 4.1 (iii) より、g_1 は次数 p^n の purely inseparable morphism である。D は楕円曲線であるので、$\mu_1^{-1}(D)$ の近傍で $\hat{S}^{(1)}$ は non-singular である。

さて $f_1^{-1}(\gamma^{(1)}) = m^{(1)}D^{(1)}$ とおくと、(4.4) より

$$m^{(1)} = \frac{m}{p^j}, \qquad 1\leq j\leq n$$

なる正整数 j が存在することが分かる。また $\tilde{\pi}_1|_{D^{(1)}}: D^{(1)}\longrightarrow D$ の dual $\tilde{\pi}_1^*|_{D^{(1)}}: \mathrm{Pic}^0(D)\longrightarrow \mathrm{Pic}^0(D^{(1)})$ は purely inseparable morphism であり、従って

$$\nu = \operatorname{ord}[D]|_D = \operatorname{ord} \tilde{\pi}_1^*|_{D^{(1)}}[D]|_D$$
$$= \operatorname{ord}[p^{n-\nu}D^{(1)}]|_{D^{(1)}} = \operatorname{ord}[D^{(1)}]|_{D^{(1)}}$$

が成立する。(D は supersingular elliptic curve なので, $(\nu, p) = 1$, $(\operatorname{ord}[D^{(1)}]|_{D^{(1)}}, p) = 1$ であることに注意)。
従って上の操作を有限回繰返すことによって tame fibre に還元することができる。

注 4. (4, 4) で $m = 1$ ととれるかどうか今の所分からない。知られている例では，すべて $n = 1$ ととれている。

§5 Tame fibres の non multiple fibres への還元

§4 の case I), II), III) の場合に tame fibres を multiple fibres へ還元することを考える。

Case I) mD, D ordinary elliptic curve, $m = p^\delta m'$, $(m', p) = 1$, $\delta \geq 0$ とする。S の D の近傍 U を十分小さくとると，$[p^\delta D]$ は位数 m' である。但し U は C の点 $g = f(D)$ の近傍とする。$\{U_i\}_{i \in I}$ を $f^{-1}(U)$ のアフィン開被覆とし，$f_i = 0$ を $p^\delta D$ の U_i での局所方程式とすると，$[p^\delta D]$ は $f^{-1}(U)$ で変換函数

$$f_{ij} = f_i / f_j , \qquad U_i \cap U_j \text{ 上}$$

で定義される。点 g での局所パラメータ t を $f^{-1}(\mathcal{U})$ に引き上げて考えると，$\mathcal{U}_i$ 上で

$$t = u_i f_i^{m'}, \qquad u_i \in \Gamma(\mathcal{U}_i, \mathcal{O}_S^*)$$

と書くことができ，従って

$$u_j = f_{ij}^{m'} u_i$$

が成立する。そこでエタール被覆 $\pi_1 : V^{(1)} \longrightarrow f^{-1}(U)$ を

$$\begin{cases} z_i^{m'} = u_i , & U_i \text{ 上} \\ z_j = f_{ij} z_i , & U_i \cap U_j \text{ 上} \end{cases}$$

によって定義する。f の smooth fibre $E \subset f^{-1}(U)$ に対して、$\pi_1^{-1}(E)$ は E の m' 個のコピーよりなり、一方 $[p^{\delta} D]_{|D}$ は位数 m' であるので、$\pi_1^{-1}(D) \longrightarrow D$ は次数 m' の non-trivial エタール被覆である。$f \circ \pi_1$ の Stein 分解

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U) & \xleftarrow{\pi_1} & V^{(1)} \\ f \downarrow & & \downarrow f_1 \\ U & \xleftarrow{g_1} & U^{(1)} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \wp & & \wp^{(1)} \end{array}$$

をとると、g_1 は次数 m' の射で、点 $\wp$ で完全分岐している。さらに $f_1^{-1}(\wp^{(1)}) = m^{(1)} D^{(1)}$ とおくと、

$$m^{(1)} = p^{\delta}$$

$$\operatorname{ord} [D^{(1)}]_{|D^{(1)}} = p^{\delta}$$

であることが容易に分かる。

次に $\wp^{(1)}$ の $U^{(1)}$ での小近傍 V と、点 $\wp^{(1)}$ での局所パラメータ s をとる。$[D^{(1)}]_{|f_1^{-1}(V)}$ は位数 p^{δ} と仮定してよい。$\{V_i\}_{i \in I}$ を $f_1^{-1}(V)$ のアフィン開被覆とし $g_i = 0$ は $D^{(1)}$ の V_i での局所方程式とする。$[D^{(1)}]$ は $f_1^{-1}(V)$ 上では、変換函数

$$g_{ij} = g_i / g_j , \qquad V_i \cap V_j \text{ 上}$$

で定義されている。V_i 上で s は

$$s = v_i \, g_i^{p^{\delta}} , \qquad v_i \in \Gamma(V_i, \mathcal{O}_{V_i}^{*})$$

と書くことができる。従って

$$v_j = g_{ij}^{p^\delta} v_i \qquad , \quad V_i \cap V_j \text{ 上}$$

が成立する。次数 p^δ の flat cover $\pi_2 : V^{(2)} \longrightarrow f^{-1}(V)$ を

$$(5,1) \qquad \begin{cases} w_i^{p^\delta} = v_i, & V_i \text{ 上} \\ w_i = g_{ij} w_j, & V_i \cap V_j \text{ 上} \end{cases}$$

で定義し，$f_1 \cdot \pi_2$ の Stein 分解

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(V) & \xleftarrow{\ \pi_2\ } & V^{(2)} \\ \downarrow & & \downarrow f_2 \\ V & \xleftarrow{\ g_2\ } & U^{(2)} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \mathfrak{g}^{(1)} & & \mathfrak{g}^{(2)} \end{array} \quad , \qquad g_2(\mathfrak{g}^{(2)}) = \mathfrak{g}^{(1)}$$

をとる。すると $U^{(2)}$ は non-singular，g_2 は次数 p^δ の purely inseparable morphism である。$V^{(2)}$ が $f_2^{-1}(\mathfrak{g}^{(2)})$ の近傍で non-singular であることは，次の補題より示すことができる。

補題5.2　E は ordinary elliptic curve，$\{U_i\}_{i\in I}$ は E の アフィン開被覆，L は E 上の位数 p^δ の直線束とする。さらに L は変換函数 $\{f_{ij}\}$，$f_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}^*_{U_i\cap U_j})$ で定義されており，従って

$$f_{ij}^{p^\delta} = f_i / f_j, \qquad f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}^*_{U_i})$$

が成立しているとする。このとき df_i/f_i，$i \in I$ は E 上の大域的な正則一次型式 $\omega \neq 0$ を定める。

証明

$$\frac{df_i}{f_i} = \frac{df_j}{f_j}, \qquad U_i \cap U_j \text{ 上}$$

であることは明らか。従って ω が定義できる。もし $\omega \equiv 0$ であれば $df_i = 0$，従って $f_i = g_i^p$，$g_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$，$i \in I$ と書けるが，これは直線束 L の位数が $p^{\delta-1}$ であることを意味し仮定に矛盾する。

さて (5.1) より $V^{(2)}$ の特異点は $\pi_2^{-1}(V_i)$, $i\in I$ 上では dv_i の零点に含まれることが分かる。$v_i' = v_i|_{V_i\cap D^{(1)}}$ とおくと，上の補題より dv_i'/v_i' は $D^{(1)}$ 上の大域的な正則一次型式 $\omega \neq 0$ を定める。従って dv_i は $V_i\cap D^{(1)}$ の近傍で零点を持たない。さらにこのことより，$f_2^{-1}(g^{(2)})$ が smooth fibre であることも容易に分かる。

Case II), III) このときは $\mathrm{Pic}^0(D)$ は p 等分点を持たないので，$(m, p)=1$ である。従って Case I) の最初の操作がそのまま適用できる。

注意 5.3 §4, §5 を通じて 正標数でのみ存在する 重複ファイバー mD, $\mathrm{Pic}^0(D)=\mathbb{G}_a$ に関しては何も主張していない。§4, §5 の方法では この除外された場合を取扱うのには不十分である。除外された場合の例はわずかしか知られていない。([K1] を参照のこと。)

§6 その他

序で少し述べたように，我々の研究の一つの出発点は楕円曲面の標数 0 への lifting の可否を考えることにあった。すべて §3 例 3.5 で見たように lifting に際して $h^1(S,\mathcal{O}_S)$, $h^0(S,\Omega_S^1)$, $b_1(S)$ などは不変ではない。しかしながら次の定理を示すことができる。

定理 6.1. R を discrete valuation ring, $\varphi: X \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$ は $\mathrm{Spec}(R)$ 上固有，分離的，有限型の代数空間で，さらに φ は smooth, かつファイバーは曲面であると仮定する。X_0 を φ の closed fibre, X_1 を φ の generic geometric fibre とすると

$$\kappa(X_0)=\kappa(X_1)$$

が成立する。

証明は曲面の分類理論を最大限用いるので，高次元には適用できない。証明については [KU] §9 を参照されたい。この定理によって $\kappa=1$ の楕円曲面はもし lift されれば再び $\kappa=1$ の楕円曲面であることが分かる。

References

[I]. Iitaka, S., Deformations of compact complex surfaces, II, J. Math. Soc. Japan, 22 (1970), 247–261.

[K1] Katsura, T., On Kummer surfaces in characteristic 2, Proc. Intern. Symp. Algebraic Geometry, Kyoto 1977, (M. Nagata, ed.), Kinokuniya, Tokyo, 1978, 525–542

[K2] Kodaira, K., On compact analytic surfaces, II, III, Ann. of Math. 77 (1963), 563–626, ibid. 78 (1963), 1–40.

[KU] Katsura, T. & K. Ueno, On elliptic surfaces in characteristic p, preprint.