代数幾何学シンポジウム記録
1985年度 pp.184-204

Torsion freeness of higher direct images of canonical bundles

京大、理. 森脇 淳

§0. 序.

Xを非特異射影多様体，Yを射影多様体，$f: X \longrightarrow Y$を全射の射とする。この時，J. Kollar [Ko 1] は，すべての$i \geqq 0$について$R^i f_* \omega_X$が，torsion freeであることを示した。この事実を，Yがlocal analyticの場合に拡張しようというのが，本稿の目的である。つまり目的とする定理は次のとおりである。

<u>定理 1</u>　Xを複素多様体，Yを被約で既約な複素空間，$f: X \to Y$を射影的な射とする。ここでXのすべての連結成分は，fによってY上に全射的に移ると仮定する。このとき$R^i f_* \omega_X$は，すべての$i \geqq 0$についてtorsion freeである。

定理1に於いて，fが射影的であることは，本稿の証明においては，本質的である。しかし，筆者は，fがケーラー的である時も成立するであろうと考えている。もっとも，fがさらに一般的な場合は，定理1は成立しない。実際，中村[Nm]や上野[U]は，スムーズな変形 $\pi: X \to \Delta$ で次を満たすものが構成されている。任意の $t \in \Delta^*$ について
$P_g(\pi^{-1}(0)) > P_g(\pi^{-1}(t))$。ここで $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$，$\Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$ である。定理1は，消滅定理及びホッジ理論と深く関係しており，まず消滅定理より解説していきたいと思う。尚，詳細は，[Mw]にある。

§1．消滅定理

大沢[O]の L^2-method によりまず次の定理が示される。

<u>定理2</u>　Xを連結な複素多様体，YとZを被約で既約な複素空間とする。$f: X \to Y$を全射の射影的な射とし，$g: Y \to Z$を固有な生成的に有限射とする。さらに(E, h)をエルミートベクトル束でその曲率形式が半正定値であるとする。

この時，　$R^i g_*(f_*(\omega_X \otimes E)) = 0$　が任意の $i>0$ について成立する。

定理2をもう少し拡張するために次の定理を引用する。

定理3（中山［Ny2］）　Xを連結な複素多様体，Yを被約で既約な複素空間，$f: X \to Y$ を全射で射影的な射とする。X上の $\mathbb{Q}$－因子 Aが次を満たすとする。

(1)　$f(C)$ が点となる任意のX上のコンパクトな曲線 C について $(A \cdot C) \geq 0$，

(2)　任意の一般ファイバー X_y について，$\kappa(X_y, A_y) = \dim X_y$，

(3)　Aの小数部分は正規交叉の台をもつ。

このとき　すべての $i>0$ について $R^i f_*(\omega_X(\ulcorner A \urcorner)) = 0$ が成立する。ここで $\ulcorner A \urcorner$ は Aの切り上げである。

定理4（竹腰［T］）　Xを連結な複素多様体 Yを被約で既約な複素空間，$f: X \to Y$ を全射の射影的な射とする。このときすべての $i > \dim X - \dim Y$

について $R^i f_* \omega_X = 0$ が成立する。

これらの定理を組み合わせて次の系を得る。

系5 Xを連結な複素多様体, Y, Zを被約で既約な複素空間とする。$f: X \to Y$を全射な射影的な射とし, $g: Y \to Z$を射影的な生成的に有限射とする。このときすべての$j \geq 0$について

$$R^i g_* (R^j f_* \omega_X) = \begin{cases} 0 & i > 0 \\ R^j (g \circ f)_* \omega_X & i = 0 \end{cases}$$

が成立する。

(証明). $\dim X - \dim Y$についての帰納法で示す。定理2と定理4により, $\dim X = \dim Y$の場合はOKである。よって$\dim X > \dim Y$と仮定してよい。Zについてlocalな問題であるのでX上に$g \circ f$-ampleなスムーズな因子HですべてのHの連結成分がfでYに全射的に移るものが存在するとしてよい。明らかにHはf-ampleである。ここで完全列

$$0 \to \omega_X \to \omega_X(H) \to \omega_H \to 0$$

を考えて, 定理3により,

(a) $0 \to f_*\omega_X \to f_*\omega_X(H) \to f_*\omega_H \to R^1 f_*\omega_X \to 0$

(b) $R^i f_*\omega_H \xrightarrow{\sim} R^{i+1} f_*\omega_X \quad \text{for} \quad i \geq 1$

が成立する。定理2と(b)と、帰納法の仮定により

(*) $R^j g_* (R^1 f_*\omega_X) = 0 \quad \text{for} \quad j > 0$

を示せば十分である。

ここで $Q = f_*\omega_X(H) / f_*\omega_X$ とおくと (a)により

(c) $0 \to f_*\omega_X \to f_*\omega_X(H) \to Q \to 0$

(d) $0 \to Q \to f_*\omega_H \to R^1 f_*\omega_X \to 0$

を得る。よって定理2を用いれば(*)を得る。 q.e.d.

§2. 主定理及びその証明のスケッチ.

Xを純次元的な複素多様体, Yを連結な複素多様体 $f: X \to Y$を射影的な射であるとする。ここですべての連結成分はfによってYに全射的に移されるとし, Y上の正規交叉のみをもつ因子Dが存在してfは$Y \setminus D$上スムーズであると仮定する。ここで $\mathcal{H}_0^{d+i} = R^{d+i} f_*(\mathbb{Z})|_{Y \setminus D} \otimes \mathcal{O}_{Y \setminus D}$, $F^p(\mathcal{H}_0^{d+i})$をp番目のホッヂフィルトレーションとする。($d = \dim X - \dim Y$)。さらに $\mathcal{H}_0^{d+i}$ のDのまわりでのローカルモノドロミーはすべて単巾であると仮定する。このとき Schmid [S, nilpotent orbit theorem] によって $\mathcal{H}_0^{d+i}$ の canonical extension $\mathcal{H}_Y^{d+i}$ は部分ベクトル束としてのフィルトレーションの

拡張；

$$\mathcal{H}_Y^{d+i}=F^0(\mathcal{H}_Y^{d+i})\supset F^1(\mathcal{H}_Y^{d+i})\supset\cdots\supset F^d(\mathcal{H}_Y^{d+i})\supset\{0\}$$

をもつ。この章の目的は、次の定理のスケッチを与えることである。これは、J. Kollár [Ko 2] 及び 中山 [Ny 1] 局所解析的な拡張である。これは、本稿の主定理とでもいうべき定理である。

<u>定理 6</u> 上と同じ記号で、同型

$$\phi_i:\quad R^if_*\omega_{X/Y}\ \xrightarrow{\sim}\ F^d(\mathcal{H}_Y^{d+i})$$

がすべての $i\geq 0$ について成立する。ここで $\omega_{X/Y}=\omega_X\otimes f^*(\omega_Y^{-1})$.

Zucker [Z] により、定理6は $\dim Y=1$ のとき正しいことが知られており、この事実を用いれば、定理6の状況で準同型 $\phi_i:\ R^if_*\omega_{X/Y}\longrightarrow F^d(\mathcal{H}_Y^{d+i})$ がすべての $i\geq 0$ について存在し、これは余次元1で同型であることがわかる。さらに 川又 [Ka 1] により、ϕ_0 は同型であることが示されている。次の補題は、後の証明で有用となる。

<u>補題 7</u> （川又 [Ka 2]） $f:X\to Y$ を complex manifold の間の射で C，D を X 及び Y 上の正規交叉のみをもつ因子で $f(X\setminus C)\subset Y\setminus D$ と仮定する。$\mathcal{H}_0$ を

$Y\setminus D$ 上の V.H.S. (Variation of Hodge structure) とする。ここで $\mathcal{H}_0$ の D のまわりの局所モノドロミーは単巾であると仮定する。$\mathcal{H}$ 及び $\mathcal{H}'$ を $\mathcal{H}$ 及び $(f|_{X\setminus C})^*\mathcal{H}$ の canonical extension とするとフィルトレーションと compatible な同型 $f^*\mathcal{H}\simeq\mathcal{H}'$ が存在する。

ここで次の条件を考える。

条件(*) X を純次元的な複素多様体, Y を連結な複素多様体, y を Y の点で $\pi: B\to Y$ を y での blowing-up でその例外因子を E とする。$g: X\to B$ を射影的な射で, X のすべての連結成分は g で全射的に B に移るとする。ここで $f=\pi\circ g$, $d=\dim X-\dim Y$ とおく。

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "g"] & \supset T \\ Y & B \arrow[l, "\pi"] & \end{tikzcd}$$

(i) Y 上に正規交叉のみをもつ因子 D が存在して, f は $Y\setminus D$ 上スムーズで $y\in D$ とする。

(ii) X 上にスムーズな因子 T が存在して次を満たす。T のすべての連結成分は f で Y 上に全射的に移り,

$f|_T: T \to Y$ は $Y \setminus D$ 上スムーズであり，$\mathcal{O}_X(T)$ は半正定値の直線束（田中の意味で）しかも，$R^i f_* \omega_X(T) = R^i g_* \omega_X(T) = 0$ がすべての $i > 0$ について成立する。

(iii) $\mathcal{H}_0^{d+i} = R^{d+i} f_*(\mathbb{Z})|_{Y \setminus D} \otimes \mathcal{O}_{Y \setminus D}$

$h_0^{d-1+i} = R^{d-1+i} (f|_T)_*(\mathbb{Z})|_{Y \setminus D} \otimes \mathcal{O}_{Y \setminus D}$

とおくとき，$\mathcal{H}_0^{d+i}$, h_0^{d-1+i} は D のまわりで単巾の局所モノドロミーをもつとする。$\mathcal{H}_Y^{d+i}$, h_Y^{d-1+i} を $\mathcal{H}_0^{d+i}$, h_0^{d-1+i} の canonical extension とし，$\{F^p(\mathcal{H}_Y^{d+i})\}$, $\{F^p(h_Y^{d-1+i})\}$ を Hodge filtration の拡張とする。

(iv) 同型 $R^i f_* \omega_{X/} \simeq F^{d-1}(h_Y^{d-1+i})$ 及び $R^i g_* \omega_{T/B} \simeq \pi^*(F^{d-1}(h_Y^{d-1+i}))$ が存在するとする。

(v) 準同型 $\phi_i : R^i f_* \omega_{X/Y} \longrightarrow F^d(\mathcal{H}_Y^{d+i})$ 及び $\phi_i' : R^i g_* \omega_{X/B} \longrightarrow \pi^*(F^d(\mathcal{H}_Y^{d+i}))$ を考える時，$\mathrm{Supp}(\mathrm{Coker}(\phi_i))$, $\mathrm{Supp}(\mathrm{Ker}(\phi_i)) \subset \{y\}$ で $\mathrm{Supp}(\mathrm{Coker}(\phi_i'))$ と $\mathrm{Supp}(\mathrm{Ker}(\phi_i'))$ は E の有限部分集合とする。

さてここで次の補題を証明する。

<u>補題8</u> 条件(*)のもとで，ϕ_i 及び ϕ_i' は同型である。

(証明). $M^i = F^d(\chi_Y^{d+i})$, $m^i = F^{d-1}(h_Y^{d-1+i})$, $E(a) = \mathcal{O}_B(aE)$, $k = \dim Y$ とおく。完全列

$$0 \to \omega_X \to \omega_X(T) \to \omega_T \to 0$$

より，条件(*)の(ii)より

(a) $0 \to f_*\omega_{X/Y} \to f_*\omega_{X/Y}(T) \to f_*\omega_{T/Y} \to R^1 f_*\omega_{X/Y} \to 0$

(a') $0 \to g_*\omega_{X/B} \to g_*\omega_{X/B}(T) \to g_*\omega_{T/B} \to R^1 g_*\omega_{X/B} \to 0$

(b) $\delta_i : R^{i-1} f_*\omega_{T/Y} \simeq R^i f_*\omega_{X/Y} \quad i \geq 2$

(b') $\delta_i' : R^{i-1} g_*\omega_{T/B} \simeq R^i g_*\omega_{X/B} \quad i \geq 2$

<u>Claim 1.</u> $\phi_i : R^i f_*\omega_{X/Y} \to M^i$, $\phi_i' : R^i g_*\omega_{X/B} \to \pi^*(M^i)$ は $i \neq 1$ で同型である。

ϕ_0, ϕ_0' は同型であるので $i \geq 2$ としてよい。条件(*)の(iv)と(b), (b')より $R^i f_*\omega_{X/Y}$ と $R^i g_*\omega_{X/B}$ は $i \geq 2$ で locally free である。よって ϕ_i と ϕ_i' は同型である。

ここで，自然な準同型

$$h : R^1 g_*\omega_{X/B} \to R^1 g_*\omega_{X/Y}$$

を考える。この時,

<u>Claim 2</u>　$\pi_*(h): \pi_*(R^1 g_* \omega_{X/B}) \longrightarrow \pi_*(R^1 g_* \omega_{X/Y})$

は，全射である.

$R = (g_* \omega_{X/B}(T))/(g_* \omega_{X/B})$ とおく。これと (a') より

$$\text{(c)}\quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & R & \to & g_* \omega_{T/B} & \longrightarrow & R^1 g_* \omega_{X/B} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow h & & \\ 0 & \to & R \otimes E(k-1) & \to & g_* \omega_{T/Y} & \longrightarrow & R^1 g_* \omega_{X/Y} & \to & 0 \end{array}$$

を得る。Rの定義により，

$$0 \to g_* \omega_X \otimes \pi^*(\omega_Y^{-1}) \to g_* \omega_X(T) \otimes \pi^*(\omega_Y^{-1}) \to R \otimes E(k-1) \to 0$$

である。一方 定理2 と 系5 により

$$R^1 \pi_*(g_* \omega_X(T) \otimes \pi^*(\omega_Y^{-1})) = R^2 \pi_*(g_* \omega_X \otimes \pi^*(\omega_Y^{-1})) = 0$$

であるので　$R^1 \pi_*(R \otimes E(k-1)) = 0$ を得る。

ところが 条件(*)の (iv) により $g_* \omega_{T/B} \cong \pi^*(M^0)$ で

$g_* \omega_{T/Y} \cong \pi^*(M^0) \otimes E(k-1)$ であるので (c)の準像

を考えて

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \pi_*(R) & \longrightarrow & M^0 & \longrightarrow & \pi_*(R^1 g_* \omega_{X/B}) & & \\ & & \downarrow & & \| & & \downarrow \pi_*(h) & & \\ 0 & \to & \pi_*(R \otimes E(k-1)) & \longrightarrow & M^0 & \longrightarrow & \pi_*(R^1 g_* \omega_{X/Y}) & \to & 0 \end{array}$$

を得る。よって $\pi_*(h)$ は全射。

<u>claim 3</u> $\quad \mathrm{Ker}(\phi_1') = 0$

まず次の図式を考える。

$$
(d)\qquad
\begin{array}{ccccccc}
0 \to & \mathrm{Ker}(\phi_1') & \longrightarrow & R^1 g_* \omega_{X/B} & \longrightarrow & \pi^*(M^1) \\
 & \alpha\downarrow & & \downarrow h & & \downarrow \\
0 \to & \mathrm{Ker}(\phi_1')\otimes E(k-1) & \to & R^1 g_* \omega_{X/Y} & \longrightarrow & \pi^*(M^1)\otimes E(k-1)
\end{array}
$$

これの準像をとって

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 \to & \pi_*(\mathrm{Ker}(\phi_1')) & \longrightarrow & \pi_*(R^1 g_* \omega_{X/B}) & \to & M^1 \\
 & \pi_*(\alpha)\downarrow & & \downarrow \pi_*(h) & & \| \\
0 \to & \pi_*(\mathrm{Ker}(\phi_1')\otimes E(k-1)) & \to & \pi_*(R^1 g_* \omega_{X/Y}) & \longrightarrow & M^1 \\
 & & & \downarrow & & \\
 & & & 0 & &
\end{array}
$$

これより、$\pi_*(\alpha)$ は全射となり、$\mathrm{Supp}(\mathrm{Ker}(\phi_1'))$ は E の有限部分集合ゆえ、NAK により $\mathrm{Ker}\,\phi_1' = 0$

<u>claim 4</u> $\quad \mathrm{Coker}(\phi_1') = 0$

$R^1\pi_*(R^1 g_* \omega_{X/Y}) = 0$ であるので

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & R^1 g_* \omega_{X/B} & \longrightarrow & \pi^*(M^1) & \longrightarrow & \mathrm{Coker}(\phi_1') & \to 0 \\
 & h\downarrow & & \downarrow & & \beta\downarrow & \\
0 \to & R^1 g_* \omega_{X/Y} & \longrightarrow & \pi^*(M^1)\otimes E(k-1) & \to & \mathrm{Coker}(\phi_1')\otimes E(k-1) & \to 0
\end{array}
$$

の準像をとって

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \pi_*(R^1 g_* \omega_{X/B}) & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & \pi_*(\mathrm{Coker}(\phi_1')) & \\
& \downarrow{\scriptstyle \pi_* h} & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \pi_*\beta} & \\
0 \longrightarrow & \pi_*(R^1 g_* \omega_{Y/Y}) & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & \pi_*(\mathrm{Coker}(\phi_1') \otimes E(k-1)) & \rightarrow 0
\end{array}$$

よって $\pi_*\beta$ は全射であるので NAK により $\mathrm{Coker}\,\phi_1' = 0$

claim 3 と claim 4 により容易に $\mathrm{Ker}(\phi_1) = \mathrm{Coker}(\phi_1) = 0$ が分かる。

q.e.d.

この補題により、問題は適当な因子 T を見つけることとなる。このためには、埋め込み $j: X \longrightarrow Y \times \mathbb{P}^N$ が存在するとしてよい。$\mathbb{P}^N$ の一般の hyperplane T' は X 上にスムーズな因子 T を定義するが、ここには、2つの技術的な obstruction が存在する。1番目は、$f|_T$ の branch locus $\{ y \in Y \mid f|_T \text{ は } y \text{ 上 smooth でない} \}$ が正規交叉する因子に含まれるとは限らぬことである。2番目は、$f|_T$ がよい branch locus をもったとしても、$f|_T$ の local monodromy が unipotent とはならないことである。これらの obstruction は、適当な方法で解消することができるが、本稿では、省略する。以上が定理6の

証明のスケッチである。

§3 Upper canonical extension と Lower canonical extension

定理6でモノドロミーの仮定をはずすため V.H.S. の Upper canonical extension と lower canonical extension の概念を Kollár [Ka2] に従って導入する。Yを連結な複素多様体で，DをY上の正規交叉のみをもつ因子とする。Uを$Y \setminus D$とし，$\mathcal{H}$をU上の V.H.S. とする。まず，local に $\mathcal{H}$ の upper canonical extension ${}^{u}\mathcal{H}$，lower canonical extension ${}^{l}\mathcal{H}$ を定義する。$Y = \Delta^k$，$U = (\Delta^*)^l \times \Delta^{k-l}$ とおく。$\{V_1, \ldots, V_n\}$を$\mathcal{H}$の multi-valued flat basis とする。B_j $(j = 1, \ldots, l)$をDのまわりの local monodoromies とする。つまり，C_jをz_j-軸のまわりの反時計方向にまわす作用とすると $V_i(C_j z) = B_j V_i(z)$ である。ここでB_jは quasi-unipotent であるので，固有値の絶対値はすべて1である。よって，${}^{u}\log B_j$を固有値が$\sqrt{-1}[0, 2\pi)$となるように定め，${}^{l}\log B_j$を固有値が$\sqrt{-1}(-2\pi, 0]$とするように定める。そこで ${}^{u}V_i = \exp\left(-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{j=1}^{l} {}^{u}\log B_j \log z_j\right) V_i$，${}^{l}V_i = \exp\left(-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_{j=1}^{l} {}^{l}\log B_j \log z_j\right) V_i$ と定め，${}^{u}\mathcal{H}$，${}^{l}\mathcal{H}$ は

それぞれ，$\{{}^u v_1, \ldots, {}^u v_n\}$，$\{{}^\ell v_1, \ldots, {}^\ell v_n\}$ で生成される free sheaf とする。${}^u\mathcal{H}$, ${}^\ell\mathcal{H}$ は軸 z_j や basis $\{v_i\}$ のとり方に依らないのでこれは global に定義される。

$\{F^p\}$ を $\mathcal{H}$ の filtration とする時 ${}^u\mathcal{H}$, ${}^\ell\mathcal{H}$ の filtration を次で定める。

$$F^p({}^u\mathcal{H}) = {}^u\mathcal{H} \cap j_*(F^p(\mathcal{H}))$$
$$F^p({}^\ell\mathcal{H}) = {}^\ell\mathcal{H} \cap j_*(F^p(\mathcal{H}))$$

ここで $j : U \to X$ は inclusion map である。

さらに，filtation $\{F^p\}$ をもった Y 上の coherent sheaf A に対して A の dual $A^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(A, \mathcal{O}_Y)$ の filtration は次で定める。

$$F^p(A^\vee) = \left(A / F^{1-p}(A) \right)^\vee .$$

この時，次の命題が成立する。

命題 9

(i) $F^p({}^u\mathcal{H})$, $F^p({}^\ell\mathcal{H})$ は ${}^u\mathcal{H}$ 及び ${}^\ell\mathcal{H}$ の部分ベクトル束である。

(ii) filtation と compatible な同型 $({}^u\mathcal{H})^\vee \xrightarrow{\sim} {}^\ell(\mathcal{H}^\vee)$
$({}^\ell\mathcal{H})^\vee \xrightarrow{\sim} {}^u(\mathcal{H}^\vee)$.

次に幾何学的な場合を考える。$f : X \to Y$ を連結な複素多様体の間の射影的な surjective な morphism

とする。DをY上の正規交叉のみをもつ因子でfはY\D上smoothとする。ここで

$$\mathcal{H}^j = R^j f_*(\mathbb{Z})|_{Y\setminus D} \otimes \mathcal{O}_{Y\setminus D}$$

とおく。この時 Serre duality により $(\mathcal{H}^{d-i})^\vee \otimes T(-d)$ と $\mathcal{H}^{d+i}$ は filtration をこめて同型である。ここで $d = \dim X - \dim Y$, $T(1)$ は Tate の Hodge 構造である。

L を X 上の f-ample な line bundle とする。

$$P^j = \begin{cases} \mathrm{Ker}(\wedge L^{d-j+1} : \mathcal{H}^j \longrightarrow \mathcal{H}^{2d-j+2}) & j \leq d \\ 0 & j > d \end{cases}$$

$$Q^j = (P^{2d-j})^\vee \otimes T(-d)$$

とおく。この時 次の定理が成立する。

<u>定理 10</u> 上と同じ状況で 次の同型が存在する。

$$R^i f_* \omega_{X/Y} \simeq F^d({}^u\mathcal{H}^{d+i}) \simeq F^d({}^uQ^{d+i})$$

$$R^i f_* \mathcal{O}_X \simeq Gr_F^0({}^l\mathcal{H}^i) \simeq Gr_F^0({}^lP^i)$$

(証明) L による multiplication は type (1, 1) の Hodge morphism であるので、明らかに $Gr_F^0({}^lP^i) \simeq Gr_F^0({}^l\mathcal{H}^i)$ である。一方 命題9により $({}^l\mathcal{H}^{d-i})^\vee \otimes T(-d) \simeq {}^u\mathcal{H}^{d+i}$

に注意すると

$$
\begin{aligned}
F^d({}^u Q^{d+i}) &\simeq F^0({}^u((P^{d-i})^\vee)) \\
&\simeq F^0(({}^\ell P^{d-i})^\vee) \\
&\simeq Gr_F{}^0({}^\ell P^{d-i})^\vee \\
&\simeq Gr_F{}^0({}^\ell \mathcal{H}^{d-i})^\vee \\
&= F^d(({}^\ell \mathcal{H}^{d-i})^\vee \otimes T(-d)) \\
&\simeq F^d({}^u \mathcal{H}^{d+i})
\end{aligned}
$$

また $R^i f_* \omega_{X/Y} \simeq F^d({}^u \mathcal{H}^{d+i})$ がいえるとそのdualをとって $R^i f_* \mathcal{O}_X$ についての同型が得る。よって同型 $R^i f_* \omega_{X/Y} \simeq F^d({}^u \mathcal{H}^{d+i})$ を言えば十分である。

ここで $f^*(D)_{red}$ は正規交叉のみをもつと仮定してよい。まずlocalに同型が存在することを示す。そこで $Y = \Delta_z^k = \{(z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k \mid |z_i| < 1\}$ とおく。さらに $D = \{(z_1, \dots, z_k) \mid z_1 \cdots z_\ell = 0\}$ とおく。このとき ℓ コの正の整数 $m_1, \dots, m_\ell$ が存在して covering $\pi : \Delta_w^k \longrightarrow \Delta_z^k$ を $\pi(w_1, \dots, w_k) = (w_1^{m_1}, \dots, w_\ell^{m_\ell}, w_{\ell+1}, \dots, w_k)$ で定めると $\pi^* \mathcal{H}^{d+i}$ は local monodoromy は単巾であるようにできる。X_1 を $X \times_{\Delta_z^k} \Delta_w^k$ の Main connected component の normalization とし、X' をその desingularization とする。

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] & X_1 \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[d, "f_1"'] & X' \arrow[l, "\lambda"'] \arrow[d, "f'"] \\
\Delta_z^k & \Delta_w^k \arrow[l, "\pi"] & \Delta_w^k \arrow[l, equal]
\end{tikzcd}
$$

$\pi' = \pi_1 \circ d$ とおくと、 $\pi'_* \omega_{X'}$ の direct summand として ω_X があることが容易に確められる。よって $\pi_*(R^i f'_* \omega_{X'})$ の direct summand として $R^i f_* \omega_X$ がある。また direct な計算により

$$^u\mathcal{H}^{d+i} \otimes \omega_{\Delta_z^k} = \pi_* \left(^u(\pi^* \mathcal{H}^{d+i}) \otimes \omega_{\Delta_w^k} \right)^G$$

ここで G は π の covering group である。また定理 6 より

$$\pi_*(R^i f'_* \omega_{X'}) \xrightarrow{\sim} \pi_* \left(F^d (^u(\pi^* \mathcal{H}^{d+i})) \otimes \omega_{\Delta_w^k} \right)$$

であるので、これにより同型 $R^i f_* \omega_{X/Y} \simeq F^d (^u\mathcal{H}^{d+i})$ を得る。次に global な場合は、 $j : Y \setminus D \longrightarrow Y$ を inclusion map とするとき、 $G^i := j_* j^* (R^i f_* \omega_{X/Y}) \simeq j_* j^* (F^d (^u\mathcal{H}^{d+i}))$ とおく。さらに F^i を $R^i f_* \omega_{X/Y}$ と $F^d (^u\mathcal{H}^{d+i})$ で生成される coherent sheaf とすると、

$$R^i f_* \omega_{X/Y} \longrightarrow F^i \quad と \quad F^d (^u\mathcal{H}^{d+i}) \longrightarrow F^i$$

の 2 つの準同型が得られるが、これらは local な議論により同型である。 q. e. d.

__注意__ P^j と Q^j は自然に polarization をもっているので、川又 [Ka 2, Theorem 2] により、 f が単巾のモノドロミーのみをもち、 D が simple normal crossing のみをもつならば、 $R^i f_* \omega_{X/Y}$ は semi-positive で

$R^i f_* \mathcal{O}_X$ は semi-negative である。ここで Y 上の vector bundle F が semi-positive (resp. semi-negative) とは、任意の compact curve C と任意の morphism $\varphi: C \to Y$ と、$\varphi^* F$ の任意の quotient line bundle E (resp. sub-line bundle G) に対して $\deg_C(E) \geqq 0$ (resp. $\deg_C G \leqq 0$) となるときにいう。

§4. 定理1の証明.

定理1の証明する。Xを連結であると仮定してよい。ここで次の図式を構成する。

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\mu'} & X' \\ f\downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \xleftarrow{\mu} & Y' \end{array}$$

(1) X'とY'は連結な複素多様体。

(2) μ, μ' を projective で bimeromorphic な morphism とする。

(3) f'は surjective で projective morphism である

(4) Y'上に正規交叉のみをもつ因子D'が存在して f'は $Y' \setminus D'$ 上 smooth である。

このとき $R^0 \mu'_* \omega_{X'} = \omega_X$ であるので

$$R^i(\mu \circ f')_* \omega_{X'} = R^i(f\circ\mu')_* \omega_{X'}$$

$$= R^i f_* \omega_X$$

一方 系5により

$$R^i(\mu \circ f')_* \omega_{X'} = \mu_*(R^i f'_* \omega_{X'})$$

であるので

$$R^i f_* \omega_X = \mu_*(R^i f'_* \omega_{X'})$$

ここで 定理10により $R^i f'_* \omega_{X'}$ は locally free である。よって $R^i f_* \omega_X$ は torsion free である。

X と Y を 複素空間とし，$f: X \to Y$ を固有写像とする。f が Moishezon morphism とは，Y の各点 y に対して y の近傍 U と compact Moishezon space V が存在して，閉埋入 $j: f^{-1}(U) \hookrightarrow U \times V$ があって $p \circ j = f$ を満たすときにいう。ここで p は自然な projection $p: U \times V \to U$ である。このとき，定理1は容易な議論で次のように拡張される。

<u>定理11</u> X を複素多様体，Y を被約で既約な複素空間，$f: X \to Y$ を Moishezon morphism とする。ここで X のすべての連結成分は f で Y に surjective に移ると仮定する。このとき $R^i f_* \omega_X$ は torsion free である。

Reference

[Ka 1] Kawamata, Y. : Kodaira dimension of algebraic fibre space over curves, Invent. Math. 66, (1982), 57-71.

[Ka 2] Kawamata, Y. : Kodaira dimension of certain algebraic spaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, IA-30, (1983), 1-24.

[Ko 1] Kollár, J. : Higher direct images of dualizing sheaves, preprint, (1984).

[Ko 2] Kollár, J. : Higher direct images of dualizing sheaves II, preprint (1985).

[Nm] Nakamura, I. : On classification of parallelisable manifolds and small deformations, J. Diff. Geometry, 10, (1975), 85-112.

[Ny 1] Nakayama, N. : Hodge filtrations and higher direct images of canonical sheaves, preprint, (1985).

[Ny 2] Nakayama, N. : On the lower semi-continuity of the plurigenera, preprint, (1985).

[O] Ohsawa, T. : Vanishing theorems on complete Kähler manifolds, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 20 (1984), 21–38

[S] Schmid, W. : Variation of Hodge structure, Invent. Math. 22, (1973), 211–319.

[T] Takegoshi, K. : Relative vanishing theorems in analytic spaces, Duke Math. J. 52, (1985), 273–279.

[U] Ueno, K. : On three-dimensional compact complex manifolds with non-negative Kodaira dimension, Proc. Japan Acad., 56, Ser. A, (1980), 479–483.

[Z] Zucker, S : Degeneration of Hodge bundles, in Topopics in trancendental algebraic geometry, Ann. of Math. Studies 106, Priceton Univ. Press, (1984), 121–141.

[Mw] Moriwaki, A : Torsion freeness of higher direct images of canonical bundles, Preprint (1985)