代数幾何学シンポジウム記録
1985年度　pp.154-183

Chow群のfiltrationについて

名大・理　　斉藤 博

§0. Introduction.

0.1. 以下、複素数体 $\mathbb{C}$ 上の代数多様体を考え，その上の(代数的) cycle を問題にする。余次元 >1 の cycle については，1930年代の Severi の先駆的な研究を受けて，Mumford は，$p_g>0$ の非特異代数曲面上の 0-cycle のつくる Chow 群が，無限次元であることを示し，Roitman はそれを非特異射影多様体の 0-cycle の場合に一般化した。一方 Bloch は，Chow 群の K 理論的記述に示唆されて上記の逆，即ち $p_g=0$ の代数曲面の Chow 群は有限次元であろうと予想した[2]。更に Bloch[5]の中でこの予想を含む次の様な予想を提出した。

0.2. 非特異代数多様体 V を考え，$CH_0(V)$ でその 0-cycle の Chow 群を表わす。0-cycle に，その次数を対応させる写像の核を $'F^1CH_0(V)$ と記す:

0.2.1. $\quad 'F^1CH_0(V) := \mathrm{Ker}\left(CH_0(V) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}\right).$

(§2 以降に出てくる $F^1CH_0(V)$ と区別する為，一応 $'F^1CH_0(V)$ と書く).

${}^{\prime}F^1CH_0(V)$ から V の Albanese 多様体への標準的写像 $\alpha: {}^{\prime}F^1CH_0(V) \to \mathrm{Alb}(V)$ の核を ${}^{\prime}F^2CH_0(V)$ としよう：

0.2.2. $\quad {}^{\prime}F^2CH_0(V) := \mathrm{Ker}({}^{\prime}F^1CH_0(V) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Alb}\,V)$.

こうして、 $CH_0(V) := {}^{\prime}F^0CH_0(V) \supset {}^{\prime}F^1CH_0(V) \supset {}^{\prime}F^2CH_0(V)$ を得るが、これが更に続いて、

0.2.3. $\quad CH_0(V) = {}^{\prime}F^0CH_0(V) \supset {}^{\prime}F^1CH_0(V) \supset {}^{\prime}F^2CH_0(V) \supset \cdots \supset {}^{\prime}F^{\ell}CH_0(V) \supset {}^{\prime}F^{\ell+1}CH_0(V) \supset \cdots$

という $CH_0(V)$ の filtation があり下記のような性質を持つというのが Bloch の予想である。 $\dim V = n$ とすると恐らく

0.2.4. $\quad {}^{\prime}F^{n+1}CH_0(V) = 0$

であり ${}^{\prime}F^{\cdot}CH_0(V)$ は代数的対応に対して函手的で、従って、曲面 X と、 $z \in CH^2(V \times X)$ (CH^p で余次元 p の cycle のつくる Chow 群を表わす) に対して、

$$[z] : gr_{{}^{\prime}F}\, CH_0(V) \longrightarrow gr_{{}^{\prime}F}\, CH_0(X)$$

を得る。ここで $gr_{{}^{\prime}F}CH_0(V) = \bigoplus_{\ell} gr^{\ell}_{{}^{\prime}F}CH_0(V)$, $gr^{\ell}_{{}^{\prime}F}CH_0(V) = {}^{\prime}F^{\ell}CH_0(V)/{}^{\prime}F^{\ell+1}CH_0(V)$.

<u>予想</u> 0.3 (Bloch [5], 1.1.8)。写像 $[z]$ は、 z の cohomology 類 $\{z\} \in H^4(V \times X, \mathbb{Q})$ にしか依らない。

0.3.1. $\ell \geq 2$ に対して、Abel 多様体、曲線の積に対して以外 ${}^{\prime}F^{\ell}CH_0(V)$ として、何がくるべきか余り感覚を持っていないと Bloch は述べている。Bloch 自身は明示的に言っていないが、V が Abel 多様体の場合には $\gamma_1 * \cdots * \gamma_\ell$ ($\gamma_i \in {}^{\prime}F^1CH_0(V)$; $*$ は

Chow環の Pontrjagin 積), V が曲線の積 $C_1\times\cdots\times C_m$ の場合には, $\gamma_1\times\cdots\times\gamma_m$ ($\gamma_i\in CH_0(C_i)$, γ_i の中 ℓ 個以上が次数 0) で, 夫々生成された $CH_0(V)$ の部分群が念頭にあるものと想像される。この予想に対しては, 実は 0.2.4 の $F^{m+1}CH_0(V)=0$ の部分が本質的であると筆者には思われる (cf. 3.11)。

更に Bloch は次のように予想している.

<u>Metaconjecture</u> 0.4 ([5], I. 1.10). 重さ 2 の偏極可能 Hodge 構造からなるある圏と, $Gr_F^2 CH_0(V)$ からつくられた圏が, 圏同値になる。

<u>例</u> 0.5. この metaconjecture の感じを掴んでいただく為に, 重さ 1 の場合にどうなっていたかを思い出す。先づ $Hdg(\ell)$ で, 重さ ℓ の $\mathbb{Q}$ 上の effective な偏極可能 Hodge 構造全体のつくる (abel) 圏を表わす (Hodge 構造 H が, effective とは, $H^{p,q}_{\mathbb{C}}=0$ for $p<0$ or $q<0$ のこと).

Abel 多様体 (up to isogeny) のつくる圏は $Hdg(1)$ と次のように圏(反)同値になる:

$$(\text{Abelian varieties, up to isogeny})^{\circ} \longrightarrow Hdg(1), \quad A \mapsto H^1(A,\mathbb{Q})。$$

多様体 V に対して $Alb\,V$ は Abel 多様体で, $\alpha: F^1CH_0(V)\to Alb\,V$ は全射故

$$gr_F^1\,CH_0(V) \xrightarrow{\sim} Alb\,V.$$

更に, V' も多様体の時, $z\in CH^m(V'\times V)$ ($m=\dim V$) に対して z が定義

する代数的対応 [Z]: $gr_F^1 CH_0(V') \to gr_F^1 CH_0(V)$ は同一視 $gr_F^1 CH_0(V) \simeq \mathrm{Alb}\,V$ によりAbel多様体の射であり，従って，圏同値

$$(gr_F^1 CH_0(V),\ \text{alg. corresp.} \otimes \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} (\text{abelian varieties, up to isogeny})$$

が得られる。これらをつないで，圏の(反)同値

$$(gr_F^1 CH_0(V),\ \text{alg. corresp.} \otimes \mathbb{Q})^{\circ} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hdg}(1),\quad gr_F^1 CH_0(V) \mapsto H^1(V, \mathbb{Q})$$

がある。上の meta conjecture は，これと類似のことが，重さ2のHodge構造についても成立つということである。

本稿の目的は，このBlochの meta conjecture に "evidence" を与えることである。初めに§1で，必要となるHodge構造がどの様なものであるかを説明する為，coniveau filtration について復習する。§2では adequate な同値関係が二つ与えられると，その積とでも言うべきものが定義できることを説明する。§3では，これを使って，Chow群に filtration (のようなもの：実は filtration ではなくて，少し"穴"があいている，cf. 3.1.1) を導入し，"evidence" を与える。更に関連した問題についても触れる。

なお，定理3.5は，[14]の結果の拡張になっていることに注意しておく。

§1. Coniveau filtration.

1.1. 初めに V が代数多様体の時，その Betti cohomology $H^m(V, \mathbb{Q})$ は混合Hodge構造を持ち，V が非特異射影的ならば，重さ m の偏極可能純Hodge構造を持つことを思い出そう。

$H^n(V,\mathbb{Q})$ の coniveau filtration は，次の様に定義される：

$$N^pH^n(V,\mathbb{Q}) = \sum_{\substack{F\subset Z:\text{Zariski 閉}\\ \mathrm{codim}\geq p}} \left(\mathrm{Ker}\left(H^n(V,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\text{rest.}} H^n(V\setminus F,\mathbb{Q})\right)\right)$$

1.1.1
$$= \sum_{F\subset Z:\,''} \mathrm{Im}\left(H^n_F(V,\mathbb{Q}) \to H^n(V,\mathbb{Q})\right)$$

$$\underset{(V:\text{非特異射影的})}{=} \sum_{\substack{f:Y\to V:\text{固有射}\\ Y:\text{非特異}\\ \dim V-\dim Y=d\geq p}} \mathrm{Im}\left(H^{n-2d}(Y,\mathbb{Q})(-d) \to H^n(V,\mathbb{Q})\right)$$

（重さ -2 の Tate の Hodge 構造を $\mathbb{Q}(1)=2\pi\sqrt{-1}\,\mathbb{Q}$ で表わし 混合 Hodge 構造 H に対して，$H(n) = H\otimes(\mathbb{Q}(1))^{\otimes n}$．）。

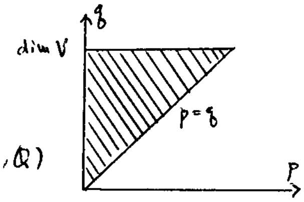
明らかに $N^pH^n(V,\mathbb{Q})\supset N^{p+1}H^n(V,\mathbb{Q})$ であるから $H^n(V,\mathbb{Q})$ は，減少 filtration

$$H^n(V,\mathbb{Q})=N^0H^n(V,\mathbb{Q})\supset N^1H^n(V,\mathbb{Q})\supset \cdots \supset N^pH^n(V,\mathbb{Q})\supset N^{p+1}H^n(V,\mathbb{Q})\supset\cdots$$

を持ち，これを <u>coniveau filtration</u> とよび，その associated graded を $gr^pH^n(V,\mathbb{Q})$ と書く：

$$gr^pH^n(V,\mathbb{Q}) = N^pH^n(V,\mathbb{Q})/N^{p+1}H^n(V,\mathbb{Q}).$$

1.1.1 の第一式で，制限 rest. は混合 Hodge 構造の射だから，$N^pH^n(V,\mathbb{Q})$ は $H^n(V,\mathbb{Q})$ の部分 Hodge 構造であり，従って（V が非特異射影的ならば）$gr^pH^n(V,\mathbb{Q})$ は重さ n の偏極可能 Hodge 構造を持つ。



<u>例</u> 1.2．$N^pH^n(V,\mathbb{Q})=0$ for $2p>n$．又 $gr^pH^n(V,\mathbb{Q})=0$ for $n-p>\dim V$．従って $gr^pH^{p+q}(V,\mathbb{Q})\neq 0$ なる (p,q) は斜線の部分に含まれる。

例1.3. $Z \overset{j}{\hookrightarrow} V$ を余次元 p の部分多様体とする。
$b: \tilde{Z}\to Z$ を Z の特異点の解消とする時, Z の cohomology 類 $\{Z\}$ は $1\in H^0(\tilde{Z},\mathbb{Q})$ の $(j\circ b)_*$ による像として定義される。従って, cohomology 類 $\{Z\}$ は, ($H^{2p}(V,\mathbb{Q})$ の元ではなく) $H^{2p}(V,\mathbb{Q})(p)$ に属する。線型性により V の余次元 p の cycle の cohomology 類は $H^{2p}(V,\mathbb{Q})(p)$ の元となる。そうすると, $N^pH^{2p}(V,\mathbb{Q})(p)$ は $H^{2p}(V,\mathbb{Q})(p)$ の中の代数的 cycle (の $\mathbb{Q}$係数線型結合) 全体の空間と一致する (勿論 vector 空間としては, $N^pH^{2p}(V,\mathbb{Q})(p) \simeq N^pH^{2p}(V,\mathbb{Q})$)。1.2 より, $N^pH^{2p}(V,\mathbb{Q})(p) \xrightarrow{\sim} gr^pH^{2p}(V,\mathbb{Q})(p)$.

例1.4. V の (Griffiths の) p 次の中間次元 Jacobi 多様体を $J^p(V)$ で表わし, その代数的部分を $J_a^p(V)$ と記す (cf. 3.10)。$J_a^p(V)$ は Abel 多様体であり, Hodge 構造の同型

$$H_1(J_a^p(V),\mathbb{Q}) := (H^1(J_a^p(V),\mathbb{Q}))^\vee \xrightarrow{\sim} N^{p-1}H^{2p-1}(V,\mathbb{Q})(p) \subset H^{2p-1}(V,\mathbb{Q})(p)$$

がある。再び 1.2 より $N^{p-1}H^{2p-1}(V,\mathbb{Q})(p) \xrightarrow{\sim} gr^{p-1}H^{2p-1}(V,\mathbb{Q})(p)$.

例1.5. 1.3. により, $N^1H^2(V,\mathbb{Q})$ は, (vector 空間として) Neron-Severi 群 $NS(V)$ に $\mathbb{Q}$ を tensor したものであるから, $gr^0H^2(V,\mathbb{Q}) = H^2(V,\mathbb{Q})/NS(V)_{\mathbb{Q}}$ ($(?)_{\mathbb{Q}} = (?)\otimes\mathbb{Q}$). V が曲面の時, $H^2(V,\mathbb{Z})$ は intersection により lattice となり, その部分 lattice

$$T(V) := \{x\in H^2(V,\mathbb{Z});\ x\perp NS(V)\}/(\text{torsion})$$

は, transcendental lattice と呼ばれる。そうすると標準的に

$$T(V)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} gr^0H^2(V,\mathbb{Q}).$$

例1.6. $gr^0H^n(V,\mathbb{C}) = gr^0H^n(V,\mathbb{Q})\otimes\mathbb{C}$ は, 次の様に解析的に表現で

きる。V上の有理n-形式ωと，Vの素因子Dに対して，ωのDに関するresidue $\mathrm{Res}^V_D\,\omega$ を，

$$\mathrm{Res}^V_D\,\omega = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_\gamma \omega$$

で定義する，ここでγはDの回りを一周する一般の路，$\mathrm{Res}^V_D\,\omega$ はD上の有理$(n-1)$-形式である。$\mathrm{gr}^0H^1(V,\mathbb{C})$は$V$上の第二種微分の空間と同型，即ち，

1.6.1. $\mathrm{gr}^0H^1(V,\mathbb{C})\cong\{$閉有理1-形式$\omega$; $\mathrm{Res}^V_D\,\omega=0,\ {}^\forall D\}/\{$有理完全1-形式$\}$.

更に $\mathrm{gr}^0H^2(V,\mathbb{C})$は，$V$上の次数2の第二種微分の空間と同型，即ち，

1.6.2. $\mathrm{gr}^0H^2(V,\mathbb{C})\cong\{$閉有理2-形式$\omega$; $\mathrm{Res}^V_D\,\omega$は完全$,\ {}^\forall D\}/\{$有理完全2-形式$\}$.

しかし，$\mathrm{gr}^0H^3(V,\mathbb{C})$に対しては，同様のことは一般には正しくない。即ち，$\{$閉有理3-形式ω; $\mathrm{Res}^V_D\,\omega$は完全$,\ {}^\forall D\}/\{$有理完全3-形式$\}$から$\mathrm{gr}^0H^3(V,\mathbb{C})$へ全射があり，その核$=0 \iff$ "Homology同値と代数的同値は（torsionを除き）一致"である[7]。従ってGriffithsの例[9]によりこれらは一般に一致しない。それどころか，$\mathrm{gr}^0H^3(V,\mathbb{C})$は，恒に有限次元であるが，第二種微分の空間は，$\mathbb{C}$上無限次元にもなりうる[8]。

例 1.7. 一般に，$\mathrm{gr}^pH^n(V,\mathbb{Q})$乃至，$N^pH^n(V,\mathbb{Q})$を決定することは難しい。1.1.1.の第二式より

1.7.1. $$N^pH^n(V,\mathbb{Q}) \subset H^n(V,\mathbb{Q})\cap F^pH^n(V,\mathbb{C}),$$

ここで，$F^pH^n(V,\mathbb{C}) = \bigoplus_{i\geq p} H^{i,n-i}(V)\subset H^n(V,\mathbb{C})$はHodge filtrationである。左辺は，既に述べた様に$H^n(V,\mathbb{Q})$の部分Hodge構造である。

左辺が，右辺に含まれる最大の $H^n(V,\mathbb{Q})$ の部分Hodge構造である，というのが，Grothendieckによってmodifyされた一般のHodge予想である。$n=2p$ の場合には，右辺自身が，$H^{2p}(V,\mathbb{Q})$ の部分Hodge構造になり（$H^{2p}(V,\mathbb{Q})\cap F^pH^{2p}(V,\mathbb{C})=H^{2p}(V,\mathbb{C})\cap H^{p,p}(V)$），$\omega\in H^{2p}(V,\mathbb{Q})$ のHodge成分が (p,p) 型ならば ω は代数的である）という普通のHodge予想になる。

1.8. $N^pH^n(V,\mathbb{Q})$，或いは，$gr^pH^n(V,\mathbb{Q})$ は，代数的対応に対して函手的である，詳しくいうと，

(i). $f:V\to W$ に対して，引き戻し $f^*:H^n(W,\mathbb{Q})\to H^n(V,\mathbb{Q})$ は，$N^pH^n(W,\mathbb{Q})$ を，$N^pH^n(V,\mathbb{Q})$ の中へ写す；従って

$$f^*: gr^pH^n(W,\mathbb{Q})\longrightarrow gr^pH^n(V,\mathbb{Q})$$

が得られる。

(ii). (固有射) $f:V\to W$ に対して，$d=\dim W-\dim V$ と置くと，Gysin射

$$f_*: H^{n-2d}(V,\mathbb{Q})(-d)\longrightarrow H^n(W,\mathbb{Q})$$

は $N^{p-d}H^{n-2d}(V,\mathbb{Q})(-d)$ を $N^pH^n(W,\mathbb{Q})$ の中へ写し，従って

$$f_*: gr^{p-d}H^{n-2d}(V,\mathbb{Q})(-d)\longrightarrow gr^pH^n(W,\mathbb{Q})$$

を引起こす。

(iii). Cup積 $H^n(V,\mathbb{Q})\times H^{n'}(V,\mathbb{Q})\longrightarrow H^{n+n'}(V,\mathbb{Q})$ は，$N^pH^n(V,\mathbb{Q})\times N^{p'}H^{n'}(V,\mathbb{Q})$ を $N^{p+p'}H^{n+n'}(V,\mathbb{Q})$ の中に写し，

$$\cup : gr^{p}H^{n}(V,\mathbb{Q}) \times gr^{p'}H^{n'}(V,\mathbb{Q}) \longrightarrow gr^{p+p'}H^{n+n'}(V,\mathbb{Q})$$

が得られる。

1.9. 条件

Hypoth $(V;r,l)$: (Vector 空間としての)双線型写像

$$N^{r}H^{2r+l}(V,\mathbb{Q}) \times N^{m-r-l}H^{2m-2r-l}(V,\mathbb{Q}) \subset H^{2r+l}(V,\mathbb{Q}) \times H^{2m-2r-l}(V,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cup} H^{2m}(V,\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$$

$(m=\dim V)$ は　非退化である

を考える。 豊富な因子の cohomology 類 $\ell \in N^1H^2(V,\mathbb{Q})$ は

$$L : N^{r}H^{n}(V,\mathbb{Q}) \longrightarrow N^{r+1}H^{n+2}(V,\mathbb{Q}), \quad x \longmapsto \ell \cup x$$

を引起す。強 Lefschetz 定理により 同型

$$L^{k} : H^{m-k}(V,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^{m+k}(V,\mathbb{Q}) \qquad (k \geq 0)$$

があり，従って

1.9.1. $\dim N^{r}H^{m-k}(V,\mathbb{Q}) = \dim N^{r+k}H^{m+k}(V,\mathbb{Q})$ ならば，

$$L^{k} : N^{r}H^{m-k}(V,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} N^{r+k}H^{m+k}(V,\mathbb{Q}).$$

$H^{m-k}(V,\mathbb{Q})$ の原始部分 (primitive part)

$$H^{m-k}_{pr}(V,\mathbb{Q}) = \mathrm{Ker}(L^{k+1} : H^{m-k}(V,\mathbb{Q}) \to H^{m+k+2}(V,\mathbb{Q}))$$

を $H^{m-k}(V,\mathbb{Q})$ の部分 Hodge 構造と見た時，双線型写像

$$H^{m-k}_{pr}(V,\mathbb{Q}) \times H^{m-k}_{pr}(V,\mathbb{Q}) \longrightarrow H^{2m}(V,\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}(-m+k), \quad (x,y) \longmapsto \pm \ell^{k} \cup x \cup y$$

は，$H^{m-k}_{pr}(V,\mathbb{Q})$ の偏極を与え，$N^{r}H^{m-k}_{pr}(V,\mathbb{Q}) = N^{r}H^{m-k}(V,\mathbb{Q}) \cap H^{m-k}_{pr}(V,\mathbb{Q})$

は，$H^{m-k}_{pr}(V,\mathbb{Q})$ の 部分 Hodge 構造故

$$N^{r}H^{m-k}_{pr}(V,\mathbb{Q}) \times N^{r}H^{m-k}_{pr}(V,\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Q}, \quad (x,y) \longmapsto \ell^{k} \cup x \cup y$$

は，非退化である。原始分解(primitive decomposition)

$$H^{m-k}(V,\mathbb{Q}) = \bigoplus_{j\leq[\frac{m-k}{2}]} L^j\cdot H_{pr}^{m-k-2j}(V,\mathbb{Q})$$

に対応して，

1.9.2. $\dim N^{r-j}H^{m-k-2j}(V,\mathbb{Q}) = \dim N^{r+k+j}H^{m+k+2j}(V,\mathbb{Q})$ $(0\leq j\leq r)$ならば

$$N^rH^{m-k}(V,\mathbb{Q}) = \bigoplus_{j\leq[\frac{m-k}{2}]} L^j N^{r-j}H_{pr}^{m-k-2j}(V,\mathbb{Q})$$

であることが容易に示せる(cf. 1.9.1). $x,y\in N^rH^{m-k}(V,\mathbb{Q})$を

これに従って分解する:

$$x = \sum L^j x_j\ ,\quad y = \sum L^j y_j\ ,\qquad (x_j, y_j\in N^{r-j}H_{pr}^{m-k-2j}(V,\mathbb{Q})).$$

この時， $x\cup L^k y = \sum_j \ell^{k+2j}\cup x_j\cup y_j$ であり，従って

$$N^rH^{m-k}(V,\mathbb{Q})\times N^rH^{m-k}(V,\mathbb{Q}) \xrightarrow{id\times L^k} N^rH^{m-k}(V,\mathbb{Q})\times N^{r+k}H^{m+k}(V,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cup} \mathbb{Q}$$

は非退化である；従って

<u>命題</u> 1.10. $\dim N^{r-j}H^{2r+\ell-2j}(V,\mathbb{Q}) = \dim N^{m-r-\ell+j}H^{2m-2r-\ell+2j}(V,\mathbb{Q})$ $(0\leq j\leq r)$

ならば Hypoth$(V;r,\ell)$ が成立する。特に $r=0$；又は，$r\leq 2$，$|2r+\ell-m|\leq 2$；

又 $r=m-2, \ell=1$ の時，Hypoth$(V:r,\ell)$ は正しい。更に，

$m\leq 3$ の時，Hypoth$(V;r,\ell)$ は全て成立する。

<u>注意</u> 1.11. $L^k: H^{m-k}(V,\mathbb{Q})\to H^{m+k}(V,\mathbb{Q})$ の逆が代数的，即ち，

ある $\Lambda\in N^{m-k}H^{2m-2k}(V\times V,\mathbb{Q})$ の引起す $\{\Lambda\}: H^{m+k}(V,\mathbb{Q})\to H^{m-k}(V,\mathbb{Q})$

が L^k の逆になっているならば，これにより $N^{r+k}H^{m+k}(V,\mathbb{Q})$は

$N^rH^{m-k}(V,\mathbb{Q})$に写され，$\dim N^rH^{m-k}(V,\mathbb{Q}) = \dim N^{r+k}H^{m+k}(V,\mathbb{Q})$ に

なっている。この様なΛが恒に存在するというのが Grothendieck

の Standard 予想(の一部)である。曲線，曲面，Abel多様体，非特異超曲面では（任意の k に対して）このような Λ が存在する。任意の k に対してこの様な Λ の存在する多様体は，直積に関して閉じているので，上記の多様体の積も $\mathrm{Hypoth}(V;?,?)$ を充している（cf. [10]）。

注意 1.12． $\cup : N^{r+j}H^{m-k}(V,\mathbb{Q}) \times N^{r+k+j}H^{m+k}(V,\mathbb{Q}) \to H^{2m}(V,\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ $(j=0,1)$ が，非退化双線型写像になっているとする（cf. 1.11）。

$$Gr^r H^{m-k}(V,\mathbb{Q}) = \{x \in N^r H^{m-k}(V,\mathbb{Q})\ ;\ x \perp N^{r+k+1} H^{m+k}(V,\mathbb{Q})\}$$

$$Gr^{r+k} H^{m+k}(V,\mathbb{Q}) = \{y \in N^{r+k} H^{m+k}(V,\mathbb{Q})\ ;\ y \perp N^{r+1} H^{m-k}(V,\mathbb{Q})\}$$

と置くと，

$$N^r H^{m-k}(V,\mathbb{Q}) = Gr^r H^{m-k}(V,\mathbb{Q}) \oplus N^{r+1} H^{m-k}(V,\mathbb{Q})$$

$$N^{r+k} H^{m+k}(V,\mathbb{Q}) = Gr^{r+k} H^{m+k}(V,\mathbb{Q}) \oplus N^{r+k+1} H^{m+k}(V,\mathbb{Q})$$

と，"直交分解"し，自然に $Gr^r H^{m-k}(V,\mathbb{Q}) \simeq gr^r H^{m-k}(V,\mathbb{Q})$，$Gr^{r+k} H^{m+k}(V,\mathbb{Q}) \simeq gr^{r+k} H^{m+k}(V,\mathbb{Q})$。更に，$\cup$ の制限

$$Gr^r H^{m-k}(V,\mathbb{Q}) \times Gr^{r+k} H^{m+k}(V,\mathbb{Q}) \subset H^{m-k}(V,\mathbb{Q}) \times H^{m+k}(V,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cup} H^{2m}(V,\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$$

は，仮定から，非退化双線型写像を与えるが 1.8 (iii) で与えた

$$gr^r H^{m-k}(V,\mathbb{Q}) \times gr^{r+k} H^{m+k}(V,\mathbb{Q}) \longrightarrow gr^{2r+k} H^{2m}(V,\mathbb{Q})$$

は，$2r+k \neq m$，即ち $gr^r H^{m-k}(V,\mathbb{Q})$，$gr^{r+k} H^{m+k}(V,\mathbb{Q})$ が，代数的 cycle に対応していない場合，$gr^{2r+k} H^{2m}(V,\mathbb{Q}) = 0$ 故，非退化どころか，零写像になってしまうから，混同しないように注意しなくてはならない。

§2. Adequateな同値関係の積.

2.1. この§では，(代数的)cycleとは，非特異射影多様体上の既約部分多様体の$\mathbb{Z}$-係数の形式和の意味である。その全体$\mathcal{Z}(V)$は，余次元によって次数付けられている：

$$\mathcal{Z}(V) = \bigoplus_p \mathcal{Z}^p(V) = \bigoplus_r \mathcal{Z}_r(V)$$

($\mathcal{Z}^p(V)=\mathcal{Z}_r(V)$ ($p+r=\dim V=m$)はr次元部分多様体の和)。

各Vに対して，$\mathcal{Z}(V)$上のEと記す斉次な同値関係(即ち，$X, Y\in\mathcal{Z}(V)$, $X=X_0+\cdots+X_m$, $Y=Y_0+\cdots+Y_m$, $X_r, Y_r\in\mathcal{Z}_r(V)$の時，

$X\equiv Y \pmod E \iff X_r\equiv Y_r \pmod E$ $(0\le{}^\forall r\le m)$)が与えられていて次の条件を充す時，<u>adequate</u>な同値関係という[15]：

(i). Eは$\mathcal{Z}(V)$の加法と両立する。

(ii). (Moving lemma). V上の有限個の部分多様体$X_1,\cdots,X_k$と，$Y\in\mathcal{Z}(V)$に対して，$Y'\in\mathcal{Z}(V)$で，$Y\equiv Y' \pmod E$；及び$X_i.Y'$は全て定義されている，ものが存在する。

(iii). $X\in\mathcal{Z}(V)$, $Z\in\mathcal{Z}(V\times W)$で，$Z.X\times W$が定義されているならば，$X\equiv 0 \pmod E$の時，$Z(X)≔pr_{W*}(Z.X\times W)\equiv 0 \pmod E$

($pr_W: V\times W\longrightarrow W$ は，射影)。

2.1.1. 有理的同値関係(Oと記す)は，adequateな同値関係であり，adequateな同値関係の中で最も細かい(i.e., $X\equiv Y \pmod E \Rightarrow X\equiv Y \pmod O$, ${}^\forall E$)。そして，

$$CH(V) = \mathfrak{Z}(V)/O$$

は，所謂Chow環であり余次元により次数付けられた可換環となる：

$$CH(V) = \bigoplus_p CH^p(V).$$

$CH^p(V) = CH_\nu(V)$ は 余次元 p（次元 p）の Chow群と呼ばれる。

2.2. $\mathfrak{Z}(V)$ の部分加群 $\{X \in \mathfrak{Z}(V);\ X \equiv 0 \pmod E\}$ の有理同値による商を $ECH(V)$ とかく：

$$ECH(V) = \{X \in \mathfrak{Z}(V);\ X \equiv 0 \pmod E\}/O \subset CH(V).$$

その時 部分加群 $ECH(V)$ は次の性質をもつ：

(i). $ECH(V)$ は，$CH(V)$ の次数付き部分加群である。

(ii) $x \in ECH(V)$，$z \in CH(V \times W) \Longrightarrow z(x) := pr_{W*}(z \cdot x \times 1_W) \in ECH(W)$.

逆に，各 V に対して $CH(V)$ の部分加群 $ECH(V)$ が与えられていて，(i), (ii) を充すと，$X, Y \in \mathfrak{Z}(V)$ に対して

$$X \equiv Y \pmod E \iff (X \bmod O) - (Y \bmod O) \in ECH(V)$$

により adequate な同値関係 E が得られ，adequate な同値関係と，(i), (ii) を充す $ECH(V)$ を与えることは，同値になる。この時，$ECH(V)$ は $CH(V)$ の斉次 ideal である。

E' も adequate な同値関係で，$ECH(V) \subset E'CH(V)$ $(\forall V)$ を充す時，$E \subset E'$ と書くことにする。

例 2.3. $OCH(V) = 0$，又全ての cycle は同値という同値関係は，

adequateであり, I と書く : $ICH(V) = CH(V)$

例.2.4. Adequateな同値関係 E に対して

$$\bar{E}CH(V) := \{x \in CH(V) \,;\, nx \in ECH(V),\ \text{for some } n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\}$$

と置くと, これは, 2.2.(i),(ii) を充し, adequate な同値関係 $\bar{E}$ を得る。これを 擬E-同値関係という。勿論 $E \subset \bar{E}$.

例.2.5. Adequateな同値関係 E, E′ に対して

$$(E+E')CH(V) := ECH(V) + E'CH(V)$$

$$(E \cap E')CH(V) := ECH(V) \cap E'CH(V)$$

と置くと, これらは 夫々 2.2.(i),(ii) を充し, 従って adequate な同値関係である。

例.2.6. 代数的同値は, 次の様に定義された : $X, Y \in \mathfrak{Z}(V)$ が代数的同値とは, (既約非特異完備)曲線 C と, その上の二点 a, b, 及び $Z \in \mathfrak{Z}(C \times V)$ が存在し, $Z(a)$, $Z(b)$ が定義されて, $X = Z(a)$, $Y = Z(b)$ (因みに $C = \mathbb{P}^1$ の時が, 有理同値の定義である)。

$$F CH(V) := \{X \in \mathfrak{Z}(V) \,;\, X \text{は}0\text{と代数的同値}\}/\sim.$$

例.2.7. $X, Y \in \mathfrak{Z}(V)$ に対して, それらの余次元 p の成分の $H^{2p}(V, \mathbb{Z})(p)$ に於ける cohomology類が一致するということによって定義されるadequate な同値関係 H を homology 同値関係と呼んだ :

$$HCH(V) := \{X \in \mathfrak{Z}(V) \,;\, X \text{は}0\text{と homology 同値}\}/\sim.$$

その時,

$$(CH^p(V)/HCH^p(V))_{\mathbb{Q}} \cong (CH^p(V)/\bar{H}CH^p(V))_{\mathbb{Q}} \simeq N^pH^{2p}(V, \mathbb{Q})(p).$$

例 2.8. $X, Y \in \mathcal{Z}(V)$ は、全ての $Z \in \mathcal{Z}(V)$ で、$X.Z$, $Y.Z$ が定義されるものに対して、$X.Z$, $Y.Z$ の 0次元部分の次数が、一致する時、同値、ということにより定義された同値関係 N は adequate であり、数値的同値関係と呼ばれている。これは adequate な同値関係 E で、$E \neq I$ なるものの中で最大（即ち、この時 $E \subset N$ 且つ、$I \neq \overline{N}(=N)$）である。Standard 予想によれば $N = \overline{H}$ (cf. [10])。

例 2.9. 中間次元 Jacobi 多様体の定義する同値関係 J. p次の Griffiths の中間次元 Jacobi 多様体を $T^p(V)$ で表わす:

$$T^p(V) := H^{2p-1}(V, \mathbb{Z}) \backslash H^{2p-1}(V, \mathbb{C}) / F^p H^{2p-1}(V, \mathbb{C}).$$

積分によって定義される Abel-Jacobi 写像 $HCH^p(V) \longrightarrow T^p(V)$ の核を $JCH^p(V)$ と書き、$JCH(V) = \bigoplus_p JCH^p(V)$ と置く。$T^p(V)$ の函手性により、J は 2.2, (i), (ii) を充し、従って adequate な同値関係である。これらの同値関係の間には、次の包含関係がある：

$$\begin{array}{ccccccccc} & & F^1 & \subset & H & \subset & \overline{H} & \subset & N \subset I \\ & & \cup & & \cup & & & & \\ O & \subset & F^1 \cap J & \subset & J & & & & \end{array}$$

例 2.10. Griffiths [9] により、$F^1 \subsetneqq H$ であるが、これらの間にも沢山の（一見無限個の）adequate な同値関係が Bloch [6] により定義されている。これは本質的に、[14], 1.5.2 で定義された adequate な同値関係と同じものであり、基礎体が複素数体 $\mathbb{C}$ ではなく、代数体の場合、$gr^{\cdot} H^{2p-1}(V, \mathbb{Q}_\ell)$ に付随する L-函数の零点の位数と関連があると期待されている。

定義. 2.11 (Adequateな同値関係の積). Adequateな同値関係 E, E' に対して、 $E*E'CH(V)$ を、 $p_*(x.y)$ の形の元で生成された $CH(V)$ の部分加群として定義する。ここで、 $x \in ECH(T \times V)$, $y \in E'CH(T \times V)$, T は非特異射影多様体, $p: T \times V \to V$ は射影 (x, y, T は可能なもの全てを動く)。

2.11.1. $p_*(x.y)$ を上の様なものとする時 $z \in CH(V \times W)$ に対して,

$$
\begin{aligned}
z(p_*(x.y)) &= pr_{W*}(z.\, p_*(x.y) \times 1_W) \qquad (pr_W : V \times W \to W) \\
&= pr_{W*}((p \times id_W)_*((p \times id_W)^* z) . x \times 1_W . y \times 1_W)) \quad (\text{projection formula}) \\
&= pr'_{W*}(((p \times id_W)^* z . x \times 1_W) . y \times 1_W) \quad (pr'_W : T \times V \times W \to W)
\end{aligned}
$$

であり, $(p \times id_W)^* z . x \times 1_W \in ECH(T \times V \times W)$, $y \times 1_W \in E'CH(T \times V \times W)$ 故, $E*E'$ は, 2.2.(ii) を充す。(i) は明らか故, $E*E'$ は adequateな同値関係となる。

容易に次の関係が解る (E'' も adequateな同値関係):

$$E*E' = E'*E, \quad (E*E')*E'' = E*(E'*E''),$$

$$E*(E'+E'') = E*E' + E*E'', \quad 0*E = 0, \quad 1*E = E,$$

$$E' \subset E'' \Rightarrow E*E' \subset E*E'' \ (\text{特に } E*E' \subset E \cap E').$$

2.12. $x \in ECH(V)$, $y \in E'CH(V) \Rightarrow x.y \in E*E'CH(V)$ であるが, この様な adequateな同値関係の中で最小のものが $E*E'$ である:

E, E', E'' を adequateな同値関係とすると

$$[\forall V\ (\forall x \in ECH(V), \forall y \in E'CH(V) \Rightarrow x.y \in E''CH(V)] \iff E*E' \subset E''.$$

注意 2.13. 上記の操作は可換環 A の ideal $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ に対する和

$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, 交わり $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ 及び積 $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ と類似している。Ideal論では

$$\mathfrak{a}:\mathfrak{b}=\{x\in A;\ \ x\cdot\mathfrak{b}\subset\mathfrak{a}\}$$

なる操作もある。 Adequateな同値関係 E, E' に対しても

$$(E\cdot E')CH(V)=\{x\in CH(V);\ {}^{\forall}W,\ {}^{\forall}z\in E'CH(V\times W):\ z(x)\in ECH(W)\}$$

という操作(及び、これと類似のもの)があるが、今の所、余り応用がない。

2.14. E, E' を adequateな同値関係とする。 $z\in CH(V\times W)$ によって引起された写像

$$CH(V)\longrightarrow CH(W),\quad x\longmapsto z(x)$$

は、 $E'CH(V)$, $E*E'CH(V)$ を、夫々 $E'CH(W)$, $E*E'CH(W)$ に写し、写像

$$[z]:\ E'CH(V)/E*E'CH(V\times W)\longrightarrow E'CH(W)/E*E'CH(V\times W)$$

が得られる。 2.12. により $[z]$ は $CH(V\times W)/ECH(V\times W)$ の中での z の像にしか依存しない。

2.14.1. Adequateな同値関係 E^{*l} を次の様に帰納的に定義する。

$$E^{*0}=I,\qquad E^{*(l+1)}=E*E^{*l}\qquad (l\geqq 0).$$

$$I=E^{*0}\supset E=E^{*1}\supset E^{*2}\supset\cdots\supset E^{*l}\supset E^{*(l+1)}\supset\cdots\cdot$$

であり、

$$gr_E^l CH(V)=E^{*l}CH(V)/E^{*(l+1)}CH(V),\qquad gr_E^{\cdot}CH(V)=\bigoplus_l gr_E^l CH(V)$$

と置くと、 $z\in CH(V\times W)$ に対して、上のように定義された写像

$$[z]:\ gr_E^{\cdot}CH(V)\longrightarrow gr_E^{\cdot}CH(W)$$

は、 $CH(V\times W)/ECH(V\times W)$ に於けるその像にしか依らない, cf. 0.3.

例 2.15. $\mathbb{F}^l = (\mathbb{F}^1)^{*l}$ は，l-cubic equivalence に他ならない，cf [13]，[15]．もっと一般に，E が adequate な同値関係ならば

$$E*\mathbb{F}^l CH(V) = \left\{ z(\gamma) ;\ \begin{array}{l} {}^{\exists} C_1, \cdots, C_l \text{ 曲線}, {}^{\exists} z \in ECH(C_1 \times \cdots \times C_l \times V), \\ \exists\, a_i^{(0)}, a_i^{(1)} \in C_i \text{ s.t. } \gamma = (|a_1^{(0)}| - |a_1^{(1)}|) \times \cdots \times (|a_l^{(0)}| - |a_l^{(1)}|) \end{array} \right\}.$$

例 2.16. E, E' は adequate な同値関係で，任意の V に対して $E'CH(V)$ は可除群 (i.e., $n\times : E'CH(V) \twoheadrightarrow E'CH(V)$: 全射，${}^{\forall} n \in \mathbb{Z}, \neq 0$) ならば $E*E' = \bar{E}*E'$，特に $E*\mathbb{F}^l = \bar{E}*\mathbb{F}^l$ $(l>0)$．

例 2.17. $z \in \overline{H}CH^{p+q}(V' \times V)$ とする。中間次元Jacobi多様体の間の写像 $[z] : T^{\dim V' - q}(V') \to T^p(V)$ は零写像である。$x \in HCH_q(V')$ に対して，$z(x)$ の Abel-Jacobi 写像による $T^p(V)$ に於ける像は，x の Abel-Jacobi 写像による $T^{\dim V' - q}(V')$ の中での像の $[z]$ による像故 $z(x) \in JCH^p(V)$．このことから容易に $H*\overline{H} \subset J$ が解る。

§3 Evidence と問題．

3.1. Metaconjecture 0.4 の $Gr_F^2 CH_0(V)$ の圏に対応する圏を定義しよう。先ず前§によって，次の様な adequate 同値関係の列がある：

3.1.1.
$$\begin{array}{ccccccccccccc} I = \mathbb{F}^0 & \supset & \mathbb{F}^1 & \supset & \mathbb{F}^2 & \supset & \cdots & \supset & \mathbb{F}^l & \supset & \mathbb{F}^{l+1} & \supset & \cdots \\ \cup & \supset & \cup & \supset & \cup & & & & \cup & \supset & \cup & & \\ \overline{H} & \supset & \overline{H}*\mathbb{F}^1 & \supset & \overline{H}*\mathbb{F}^2 & \supset & \cdots & \supset & \overline{H}*\mathbb{F}^l & \supset & \overline{H}*\mathbb{F}^{l+1} & \supset & \cdots . \end{array}$$

そこで多少，混しい記号であるが，

3.1.2. $$Gr^l CH(V) := \mathbb{F}^l CH(V) / \overline{H}*\mathbb{F}^l CH(V)$$

と置く。整数 $l \geq 0$ に対して，$Gr^l CH_q(V')$ から $Gr^l CH_r(V)$ への代数幾何的に自然な射は，2.14 で定義された

$$[Z] : Gr^l CH_q(V') \longrightarrow Gr^l CH_r(V)$$

($Z \in CH^{q+m-r}(V' \times V)$, $m = \dim V$) の形の Abel群の準同型写像である。この形の準同型全体は，又 Abel群になっている。そこで擬Abel圏 $\mathcal{C}(l)$ を導入する。先ず

定義 3.1.3. 加法圏 $\mathcal{C}(l)_{\mathbb{Z}}$ を，

対象： $\bigoplus_i Gr^l CH_{r_i}(V_i)$ ，(V_i : 非特異射影多様体；有限和)

射 ： $\mathrm{Hom}\left(\bigoplus_j Gr^l CH_{q_j}(V_j'), \bigoplus_i Gr^l CH_{r_i}(V_i)\right) = \bigoplus_{i,j} \mathrm{Hom}\left(Gr^l CH_{q_j}(V_j'), Gr^l CH_{r_i}(V_i)\right)$,

$\mathrm{Hom}(Gr^l CH_q(V'), Gr^l CH_r(V)) = \{[Z] : Gr^l CH_q(V') \to Gr^l CH_r(V) \,;\, Z \in CH^{q+m-r}(V' \times V)\}$

によって定義する。これから $\mathbb{Q}$-加法圏 $\mathcal{C}(l)$ は，

対象： $\mathcal{C}(l)_{\mathbb{Z}}$ と同じ．

射 ： $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(l)}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(l)_{\mathbb{Z}}}(X, Y) \otimes \mathbb{Q}$ $(X, Y \in \mathrm{ob}\, \mathcal{C}(l))$

によって定義される。

一般に，加法圏 $\mathcal{A}$ が，擬Abel圏とは，$p \in \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(X)$，$p^2 = p$ は核 $\mathrm{Ker}(p)$ を持つものとして定義されたことを思い出そう。

加法圏 $\mathcal{C}$ に対し，その擬Abel包 $(\hat{\mathcal{C}}, i)$ (或いは単に $\hat{\mathcal{C}}$) とは擬Abel圏 $\hat{\mathcal{C}}$ と加法的函手 $i : \mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}}$ で，任意の擬Abel圏 $\mathcal{A}$ 及び加法的函手 $f : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ に対して，一意的に $\varphi \circ i = f$ なる加法的函手 $\varphi : \hat{\mathcal{C}} \to \mathcal{A}$ が存在するものであった。$\hat{\mathcal{C}}$ は $\mathcal{C}$ から圏同値を除き一意的に存在し，$\mathcal{C}$ は $\hat{\mathcal{C}}$ の充満加法部分圏となり，

具体的には，次の様に与えられた:

対象：(X, p)，　$X \in ob\,\mathcal{C}$，$p \in End_{\mathcal{C}}(X)$，$p^2 = p$

射：$Hom_{\tilde{\mathcal{C}}}((X,p),(Y,q)) = \{f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y);\ fp = qf\} / \{f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y);\ fp = qf = 0\}$.

この時 $i: \mathcal{C} \to \tilde{\mathcal{C}}$，$X \mapsto (X, id_X)$ であり，これにより $(X,p) = \mathrm{Im}\, p$.

<u>定義</u> 3.1.4. $\mathcal{C}(\ell)$ の擬Abel包を $\tilde{\mathcal{C}}(\ell)$ と記す。$\tilde{\mathcal{C}}(\ell)$ は $\mathbb{Q}$-擬Abel圏である。

3.2. 本当は，$\tilde{\mathcal{C}}(\ell)$ から Hodge 構造への函手を定義したいのであるが，今の所，それは出来なくて，$\tilde{\mathcal{C}}(\ell)$ を後に述べるように少し小さくしなければならない。函手は本質的に，次にようて与えられる: $z \in CH^{p+q}(T \times V)$ に対し，その cohomology 類 $\{z\} \in H^{2p+2q}(V \times T, \mathbb{Q})(p+q)$ を考える（$\{z\}$ と書いたのは，同型 $T \times V \cong V \times T$ により写したから）。整数 $\ell \geqq 0$ に対して

3.2.1.　$\{z\}: gr^r H^{2r+\ell}(V, \mathbb{Q})(r) \longrightarrow gr^q H^{2q+\ell}(T, \mathbb{Q})(q)$

$(p + r = m = \dim V)$ を，合成

$$gr^r H^{2r+\ell}(V, \mathbb{Q})(r) \longrightarrow gr^r H^{2r+\ell}(V \times T, \mathbb{Q})(r) \xrightarrow{\{z\}\cup} gr^{m+q} H^{2m+2q+\ell}(V \times T)(m+q) \xrightarrow{pr_{T*}} gr^q H^{2q+\ell}(T, \mathbb{Q})(q)$$

によって定義する。これは重さ ℓ の Hodge 構造の射である。

<u>例</u> 3.3.　C を曲線，D を $\mathbb{P}^N \times C$ 上の正の因子とする。一般の $t \in \mathbb{P}^N$ に対して，$D(t) = P_1(t) + \cdots + P_d(t)$ と書く。C 上の第二種微分 ω に対して，P_0 を参照点として，積分路を適当に定めて，

$$F(t) = \int_{P_0}^{P_1(t)} \omega + \cdots + \int_{P_0}^{P_d(t)} \omega$$

と置く。$F(t)$ が $t \in \mathbb{P}^N$ の有理函数になるというのが Abel の定理である（元々の Abel の定理は，ω に第三種微分を許し，その場合には，$F(t)$ は，$\mathbb{P}^N$ 上の有理函数と，$\log Q(t)$ ($Q(t)$: t の有理函数) の和になるというものであった) [1]。$dF(t) = \omega(P_1(t)) + \cdots + \omega(P_d(t))$ である。$T = \mathbb{P}^N$, $V = C$, $\ell = 1$, $r = q = 0$ の場合の

$$\{{}^t D\} : gr^0 H^1(C, \mathbb{Q}) \longrightarrow gr^0 H^1(\mathbb{P}^N, \mathbb{Q})$$

に，$\mathbb{C}$ を tensor したものは，1.6.1 の同一視により，ω を，$\mathbb{P}^N$ 上の第二種微分 $\omega(P_1(t)) + \cdots + \omega(P_d(t))$ に写す。一方 $gr^0 H^1(\mathbb{P}^N, \mathbb{Q}) = 0$ 故ある $\mathbb{P}^N$ 上の有理函数 $R(t)$ により $dR(t) = \omega(P_1(t)) + \cdots + \omega(P_d(t))$, i.e., $dF(t) = dR(t)$. 従って $F(t) = R(t) + \mathrm{const.}$ は有理函数である。

例 3.4. 前例により Abel が写像 3.2.1 を考えていたというのは，少し無理があるかも知れないが，Severi はもう少し明確に，3.2.1 を意識していた(ようである)。曲面 V に対して，$t \in T$ で parametrize された V 上の 0-cycle の代数的族 Z は，$z \in CH^q(T \times V)$ を与える。$\ell = 1$ の時，対応する $\{{}^t z\}$ が零の時，Z は circolazione lineare nulla といい，$\ell = 2$ の時，$\{{}^t z\}$ が零写像であることを Z は circolazione (superficiale) algebrica と呼んで Severi は重視している [16]。

次の定理が $\mathcal{C}(\ell)$(のある部分)から Hodge構造の圏への函手が定義できることを保証する:

<u>定理</u> 3.5. $z \in CH^{p}(T \times V)$ が, 全ての $t \in T$ に対して, $z(t) \in \overline{F}{*}F^{1}(CH^{p}(V))$ ならば, $r = \dim V - p$ とする時,

$$0 = {}^{t}\{z\} : gr^{r} H^{2r+\ell}(V, \mathbb{Q})(r) \longrightarrow gr^{0} H^{\ell}(T, \mathbb{Q}).$$

証明の方針は, [14], 3.2 とほぼ同様である。

3.6. 次の条件を考える:

$(*: V, \ell, r)$:有限個の曲線の積 $T_1, \cdots, T_n$ と, $z_i \in CH^{m-r}(T_i \times V)$ が存在し, 写像

3.6.1. $$({}^{t}\{z_i\}) : gr^{r} H^{2r+\ell}(V, \mathbb{Q})(r) \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} gr^{0} H^{\ell}(T_i, \mathbb{Q}),\ \omega \mapsto ({}^{t}\{z_i\}(\omega))_i$$

が単射になる。

$(*:$ 曲線の積$, \ell, 0)$ は勿論, 恒に正しい。容易に,

(i) $(*: V \times V', \ell, r) \Longrightarrow (*: V, \ell, r)$;

(ii) $(*: V', \ell, r)$ が成立し, V' から V への有限射があれば $(*: V, \ell, r)$;

(iii) $(*: V', \ell, 0)$ が成立ち, V' から V への支配的有理写像が存在すれば, $(*: V, \ell, 0)$. 特に $(*: V, \ell, 0)$ は V について双有理不変な性質である。従って, Abel多様体, Fermat超曲面については, $(*: V, \ell, 0)$ が成立する。

$\ell = 1$ に関しては, Hypoth$(V; r, 1)$ から $(*: V, 1, r)$ が従う, 特に, 曲線, 曲面, Abel多様体, 非特異超曲面の積に対しては

$(\ast : V, 1, r)$ が任意の r に対して正しい。

なお, $gr^r H^{2r+l}(V,\mathbb{Q})=0$ ならば, $(\ast : V, l, r)$ が成立つことを注意しておく。

系 3.7. $(\ast : V', l, q)$ が正しいと仮定する。$z \in CH^{p+q}(V' \times V)$ に対して,

$$0 = [z] : Gr^l CH_q(V') \longrightarrow Gr^l CH_r(V)$$

ならば

$$0 = \{{}^t z\} : gr^r H^{2r+l}(V,\mathbb{Q})(r) \longrightarrow gr^q H^{2q+l}(V',\mathbb{Q})(q)$$

である。

3.8. $\mathcal{C}(l)$ の中で, $(\ast : V, l, r)$ が成立する V に対する $Gr^l CH_r(V)$ によって生成される擬Abel部分圏を $\mathcal{C}(l)'$ と書く。もっと精確にいうと, この様な $Gr^l CH_r(V)$ の和を対象とする $\mathcal{C}(l)$ の $\mathbb{Q}$-加法的部分圏の擬Abel包は $\mathcal{C}(l)$ の充満部分圏となり, これを $\mathcal{C}(l)'$ と記す。

系3.7は, $z, z' \in CH^p(V' \times V)$ に対して $[z]=[z'] \Rightarrow \{{}^t z\} = \{{}^t z'\}$ と書けるから,

系 3.8.1. 加法的反変函手

$$\eta : \mathcal{C}(l)'^{\circ} \longrightarrow Hdg(l), \quad Gr^l CH_r(V) \mapsto gr^r H^{2r+l}(V,\mathbb{Q})(r)$$

は, well-definedである。

函手 $\eta : \mathcal{C}(l)' \to Hdg(l)$ によって, どの程度 $\mathcal{C}(l)'$ の性質は, Hodge 構造の性質に精確に反映されるかということが問題になる。

$\mathrm{Hypoth}(V : r, l)$: $N^r H^{2r+l}(V,\mathbb{Q}) \times N^{m-r-l} H^{2m-2r-l}(V,\mathbb{Q}) \longrightarrow H^{2m}(V,\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$

は, 非退化。

であったことを思い出そう。

定理3.9. $\ell \leq 2$ とし, Hypoth$(V:r,\ell)$を仮定する。$z \in CH^{m-r+q}(V' \times V)$ に対して, z が引起す

$$\text{徴}(z): gr^r H^{2r+\ell}(V,\mathbb{Q})(r) \longrightarrow gr^q H^{2q+\ell}(V',\mathbb{Q})(q)$$

が零ならば

$$0 = [z]: Gr^\ell CH_q(V') \longrightarrow Gr^\ell CH_r(V).$$

2.14で触れた様に $z \in HCH^{m-r+q}(V' \times V)$ ならば, $[z]=0$ である。そこで証明は, 本質的には, 徴$(z)=0$ ならば z が $HCH^{m-r+q}(V' \times V)$ の元に "近い" ことを示すことにより行なわれる。

3.10. Abel-Jacobi 写像により自然に $F^1CH^p(V) \subset HCH^p(V) \to T^p(V)$ が定義され, その像 $J_a^p(V)$ $(=J_r^q(V))$ は, 複素torus $T^p(V)$ の Abel部分多様体になる: $F^1CH^p(V) \twoheadrightarrow J_a^p(V)$。さて

$$\bar{H} * F^1 CH^p(V) \subset \bar{H} * HCH^p(V) \subset JCH^p(V) = \mathrm{Ker}(HCH^p(V) \to T^p(V))$$

(cf. 2.17) 故, $Gr^1 CH^p(V) \twoheadrightarrow J_a^p(V)$ が引起される。これについて

系3.10.1. Hypoth$(V:r,1)$ が成立するならば,

$$\bar{H} * F^1 CH_r(V)_{\mathbb{Q}} = ((F^1 \cap H * \bar{H}) CH_r(V))_{\mathbb{Q}} = ((F^1 \cap J) CH_r(V))_{\mathbb{Q}},$$

従って
$$Gr^1 CH_r(V)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} J_r^q(V)_{\mathbb{Q}}.$$

更に Abel-Jacobi 写像が引起す $F^1 CH_r(V)_{tors} \to J_r^q(V)_{tors}$ ($(?)_{tors} = ?$ の torsion部分) が同型ならば,

$$\bar{H}*F^1CH_r(V) = (F^1\cap H*\bar{H})CH_r(V) = (F^1\cap J)\,CH_r(V)$$

であり, $Gr^1CH_r(V) \Rightarrow J_r^a(V)$. 特に, $r=0,\ m,\ m-1,\ m-2$ の時, こうなっている。

注意 3.11. 従って $H*\bar{H}CH_0(V) = \mathrm{Ker}(HCH_0(V)\to \mathrm{Alb}\,V)$ である。2.14によって, 0-cycle に対して

$$I \supset H \supset H*\bar{H} \supset H*\bar{H}^{*2} \supset \cdots \supset H*\bar{H}^{*\ell} \supset H*\bar{H}^{*(\ell+1)} \supset \cdots$$

は, ($H*\bar{H}^{*m}CH_0(V)=0$ を除いて) 予想0.3を充している。この filtration は, torsion を除いて filtration $\bar{H}^{*\ell}CH_0(V)\subset CH_0(V)$ と一致する。

3.12. さて定理3.9を函手ηの言葉で言い表わす為に, 次の様な圏 $\mathscr{C}(\ell)'' \subset \mathscr{C}(\ell)'$ を導入する: $\mathscr{C}(\ell)''$ は, ((*: V, ℓ, r) と Hypoth($V; r, \ell$) を充す V に対する $Gr^\ell CH_r(V)$ で生成された $\mathscr{C}(\ell)'$ の擬Abel部分圏とする (精確には, $\mathscr{C}(\ell)'$ を構成した時と同様に $\mathscr{C}''(\ell)$ を構成する)。(*: $V, \ell, 0$) を充す時, $Gr^\ell CH_0(V)\in ob\,\mathscr{C}(V)''$ である。

系 3.13. $\ell\le 2$ に対して, 加法的反変函手 $\eta: \mathscr{C}(\ell)''^{\circ} \to Hdg(\ell)$ は, 忠実である。

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}(\ell) \arrow[drr, dashed, "\exists ?"] & & \\
\mathscr{C}(\ell)' \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] \arrow[rr, "\eta"] & & Hdg(\ell) \\
\mathscr{C}(\ell)'' \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] \arrow[urr, "\text{忠実}"'] & &
\end{tikzcd}$$

3.14. 一般に Hodge予想を仮定する（V, V' に対するだけでない）と、定理3.9は、$\ell>2$ に対しても言える。この場合 Hypoth(V: r,ℓ) が恒に成立し、従って $\tilde{\mathcal{C}}(\ell)'=\tilde{\mathcal{C}}(\ell)''$。そして

$$\begin{aligned} gr^g H^{2g+\ell}(V',\mathbb{Q})(g) &\xleftarrow{\sim} G^g H^{2g+\ell}(V',\mathbb{Q})(g) \subset H^{2g+\ell}(V',\mathbb{Q})(g) \\ gr^r H^{2r+\ell}(V,\mathbb{Q})(r) &\xleftarrow{\sim} G^r H^{2r+\ell}(V,\mathbb{Q})(r) \subset H^{2r+\ell}(V,\mathbb{Q})(r) \end{aligned} \qquad (\text{cf. } 1.12)$$

は、夫々 Hodge構造の直和因子になっているから、Hodge構造の射

$$\varphi : gr^r H^{2r+\ell}(V,\mathbb{Q})(r) \longrightarrow gr^g H^{2g+\ell}(V',\mathbb{Q})(g)$$

は Hodge構造の射 $H^{2r+\ell}(V,\mathbb{Q})(r) \to H^{2g+\ell}(V',\mathbb{Q})(g)$ に拡張される。Hodge予想によれば、このHodge構造の射は、代数的 cycle $\mathfrak{z} \in gr^{p+g} H^{2p+2g}(V\times V',\mathbb{Q})(p+g)$ によって引起されるから

$$[\mathfrak{z}] : Gr^{\ell} CH_g(V') \longrightarrow Gr^{\ell} CH_r(V)$$

の函手 η による像が φ となる。従って Hodge予想の系として

"予想" 3.14.1、加法的反変函手 $\eta : \tilde{\mathcal{C}}(\ell)'^{0} \to Hdg(\ell)$ は忠実充満である。

η の本質的像が何になるかについては殆んど何も解らない。一般の Hodge予想1.7 によれば、$H = gr^r H^{2r+\ell}(V,\mathbb{Q})(r)$ は性質 "$H(1)$ には effectiveな部分Hodge構造 $\neq 0$ が存在しない" を持つことが言え $\eta(Gr^2 CH_0(V)) = gr^0 H^2(V,\mathbb{Q})$ は、Lefschetz により実際この性質を持っている。

更に想像を逞しくすれば、

Hope 3.14.2. $\exists\ \tilde{\jmath}:\ \tilde{\mathcal{C}}(l)^0 \xrightarrow{\sim}$ (niveau l の motive/$\mathbb{C}$ の圏)：圏(反)同値

があり

$$\begin{tikzcd} \tilde{\mathcal{C}}(l)^0 \arrow[r, "\tilde{\jmath}"] & (\text{niveau } l \text{ の motive}/\mathbb{C} \text{ の圏}) \arrow[d, "H_B"] \\ \mathcal{C}(l)'^0 \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "\jmath"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & Hdg(l) \end{tikzcd}$$

，

ここで，H_Bは 値をHodge構造の圏と見做した時のmotiveのBetti実現を表わす（niveau l の motive については，cf [12]）。

注意 3.14.3 次の同値が言える：

$$\mathrm{Hom}(Gr^2CH_0(V'),\ Gr^2CH_0(V)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{Hdg(2)}(gr^0H^2(V,\mathbb{Q}),\ gr^0H^2(V',\mathbb{Q}))\text{：同型}$$

$\Longleftrightarrow$ [$H^2(V',\mathbb{Q})\otimes H^{2m-2}(V,\mathbb{Q})(m)$ $(\subset H^{2m}(V'\times V,\mathbb{Q})(m))$ の中で Hodge type $(0,0)$ の元は，$N^mH^{2m}(V'\times V,\mathbb{Q})(m)$ に含まれる，即ち代数的。

3.15. $gr^0H^2(V,\mathbb{Q})=0$ であれば（$(*;V,2,0)$, Hypoth$(V;0,2)$ が成立し），$Gr^2CH_0(V)\in ob\,\tilde{\mathcal{C}}(l)''$ は零対象，従って $Gr^2CH_0(V)=0$

（$H*F^1CH_0(V)(\supset F^2CH_0(V))$ は Roitman[11] により $\mathbb{Q}$-vector空間）.

$$gr^0H^2(V,\mathbb{Q})=0 \Longleftrightarrow NS(V)_{\mathbb{Q}}(=H^2(V,\mathbb{Q})\cap H^{1,1}(V))=H^2(V,\mathbb{Q})$$
$$\Longleftrightarrow H^{2,0}(V)=0$$

に注意すると 曲面Sに対する Blochの予想[2]

$$p_g(S)=0 \overset{?}{\Longleftrightarrow} \mathrm{Ker}(F^1CH_0(V)\to \mathrm{Alb}\,V)=0$$

は，一般の曲面Vに対して $F^2CH_0(V)=\bar{H}*F^1CH_0(V)$, $\bar{H}*F^2CH_0(V)=0$ という"二つの主張に分解"される。 さて，Chow群に入れた我々の"filtration" 3.1.1 を見れば，gap $\bar{H}*F^l\supset F^{l+1}$ がある。$l=0$ と時には，これは $\bar{H}\supset F^1$ となり 一般に一致しない。

そこで

問題 3.15.1. $\ell>0$ を与えた時，適当な多様体と余次元 p に対して，$\bar{H}*F^{\ell}CH^{p}(V) \neq F^{\ell+1}CH^{p}(V)$ か？

一方，$r=0$ の時を考えると V が曲線の積，Abel多様体或いは，Fermat超曲面の時，$F^2CH_0(V)=\bar{H}*F^1CH_0(V)$ である。又，3.11を考慮すれば，

問題 3.15.2. 一般に $\bar{H}^{*(\ell+1)}CH(V) = \bar{H}*F^{\ell}CH(V)$ $(\ell \geq 1)$

$\bar{H}*F^{\ell}CH_0(V) = F^{\ell+1}CH_0(V)$ か？

上の $\bar{H}*F^2CH_0(V)=0$ の部分を考えれば，任意の多様体 V に対して，Picard多様体の理論より $\bar{H}*F^1CH^1(V)=0$ である。又 Bloch[4]は，K理論的考察から，曲面 V について $F^3CH_0(V)=0$ を予想している。更に [3] を見れば，

問題 3.15.3. 一般に $\bar{H}*F^{r}CH^{r}(V)=0$ か？

—— : —— : ——

REFERENCES

[1] Abel, N.:Demonstration d'une propriete generale d'une certaine classe de fonctions transcendantes, J. reine Angew Math. 4(1829), 200-201.

[2] Bloch, S.: K_2 of artinian $\mathbb{Q}$-algebra, with application to algebraic cycles, Communications in Algebra, 3(5), 405-428 (1975).

[3] ——— : Some elementary theorems about algebraic cycles on an abelian variety, Inv. Math., 37(1975), 215-228.

[4] ——— : An Example in the Theory of Algebraic Cycles, Lecture Notes in Math., 551, Springer.

[5] ——— : Lectures on algebraic cycles, Duke Univ. Math. Series, IV, 1980.

[6] ——— : Algebraic cycles and values of L-functions II, Duke Math. J. 52(2), 379-397,(1985).

[7] ——— and Ogus, A.: Gersten's conjecture and the homology of schemes, Ann. Scient. ENS, 74(1974), 181-202.

[8] Clemens, H.: Homological equivalence modulo algebraic equivalence is not finitely generated, Publ. Math., IHES, N° 58(1983), 19-38.

[9] Griffiths, P. A.: On the periods of certain rational integrals I,II, Ann. of Math., 90(1969), 460-495,496-541.

[10] Kleiman, S.: Algebraic cycles and the Weil conjecture, in Dix exposes sur la cohomologie des schemas, North-Holland, 1968.

[11] Roitman, A.: The torsion of the group of 0-cycles modulo rational equivalence , Ann. of Math., 111(1980), 553-569.

[12] Saavedra, N.: Categories Tannakiennes, Lecture Notes in Math. 265, Springer.

[13] Saito, H.: The Hodge cohomology and cubic equivalences, Nagoya Math. J. 94(1984), 1-41.

[14] ——— : A note on cubic equivalences, to appear in Nagoya Math. J. 101(1986), 1-26.

[15] Samuel, P.: Relations d'equivalence en geometrie algebrique, Proc. Internl Congress Math., 1958.

[16] Severi, F.: Ulteriori sviluppi della teoria delle serie di equivalenza

sulle superficie algebriche, Commentationes della Pontificia Accad. delle Scienza(30, Nov. 1941) = Appendice I a Geometria dei sistemi algebrici sopra una superficie e sopra una varieta algebrica, vol. 3, Edizione Cremonese, Rome, 1959. (This is a summury of his study on algebraic cycles in 1930's.).