代数幾何学シンポジウム記録
1985年度 pp.80-83

正規曲面の分類

埼玉大理　　酒井　文雄

正規曲面の分類を Q－係数の交点理論を用いて考察する。ここでは正規曲面とは Moishezon 正規複素曲面を意味するものとする。また因子とは Weil 因子のこととする。因子 D について対応する因子層を O（D）で表す。D が Q－因子のときは O（D）＝（［D］）と定める。ここで ［D］は D の整部分。

§1　方法

正規曲面 Y 上の交点理論は Mumford によって１９６１年の論文［１］において導入された。まず Y 上の因子 D について Y の特異点解消 $\pi: X \to Y$ による逆像 $\pi^* D$ を Q－因子として定義する。そこで Y 上の因子 D，D’の交点数 DD’を $(\pi^* D)(\pi^* D')$ で定める。

縮約定理　正規曲面 Y 上の曲線について交点数行列が負定値ということとこの曲線が正規点に縮約可能であることは同値である。

証明　Grauert の縮約定理と上の交点理論の性質による。

この定理を用いることによって因子の逆像を正規曲面間の双有理型射に対しても定義することができる。

射影定理　$f: Y \to Y'$ を正規曲面間の双有理型射、D’を Y’上の因子、Z を f の例外集合とする。このとき次の同型が成り立つ。

$$f_* O(f^* D' + Z) \cong O(D')$$

さて K を Y の標準因子とし、Y の標準環を

$$R(Y) = \bigoplus_{m \geq 0} H^0(Y, O(mK))$$

と定める。R(Y)の超越次元−1を Y の小平次元と呼び $\kappa(Y)$と書く。ただし R(Y)=C のときは $\kappa(Y)=-\infty$ とする。

定義 Y 上の既約曲線 C は KC<0 かつ $C^2<0$ のとき第1種例外曲線と呼ばれる。このような曲線は縮約定理によって正規点に縮約される。このとき射影定理によって R(Y)および $\kappa(Y)$は不変である。従って標準環の考察においては第1種例外曲線を縮約してもよいことになる。第1種例外曲線を含まないときYは極小であるという。

存在定理 任意の正規曲面 Y は極小モデル Y'を持つ。このとき K が擬正であれば極小モデルは一意であり、Y'の標準因子 K'は nef である。

注意 Y 上の因子 D が nef とは Y 上のすべての曲線 C について DC≧0 が成立することとする。また D が擬正とは DP≧0 がすべての nef 因子 P について成立することとする。

§2 分類

以下極小正規曲面 Y を考察する。存在定理によって K について nef ということと擬正ということは同値であった。Y の数値的小平次元 $\nu(Y)$を次のように定める。K が非擬正のとき $\nu(Y)=-\infty$。K が数値的に零のとき $\nu(Y)=0$、K が nef であって $K^2=0$ かつ 数値的に零でないとき $\nu(Y)=1$、また K が nef であって $K^2>0$ のとき $\nu(Y)=2$ とおく。

定理 1 Y を極小正規曲面で $\nu(Y)=-\infty$ とする。このとき次のいずれかが成り立つ。

(i) $\rho(Y)=1$ かつ $-K$ は数値的に豊富、

(ii) Y は P^1 －ファイバー空間 $p: Y \to B$ を持つ。

$\nu(Y)=0, 1$ の場合を記述するために次の操作をする。

$$\begin{tikzcd} & X \supset \Delta \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\ Y & & S \supset D \end{tikzcd}$$

ここで π は Y の極小特異点解消、Δ は π の例外集合上に台をもつ正 Q－因子で $\pi^* K = K(X)+\Delta$ を満たすものとする。ϕ は (-1) 曲線 E で $(K(X)+\Delta)E=0$ となるものを順次縮約したものとし、$D=\phi_*\Delta$ とおく。この (S, D) を Y に付随した簡略非特異ペアーという。

定理 2 Y を極小正規曲面で $\nu(Y)=0$ または 1 とする。このとき、Y に付随した簡略非特異ペアー (S, D) を分類することができる。[3] 参照。

一般に $\nu(Y) \leq \kappa(Y)$ であり、$\nu(Y)=2 \Leftrightarrow \kappa(Y)=2$ である。しかし、非特異な場合と異なり、$\nu(Y) < \kappa(Y)$ となる正規曲面も存在する。

定理 3 Q－Gorenstein 極小正規曲面 Y については等号

$$\nu(Y)=\kappa(Y)$$

が成立する。

$R(Y)$ の有限生成性については Y の標準モデルを見る必要がある。$KC>0$ が Y 上のすべての負の自己交点数を持つ曲線 C について成り立つと

き、Ｙ　は標準的であるという。

定理 ４　Ｙ　を標準的正規曲面で　κ（Ｙ）＝２　とする。このとき次は同値である。

（ａ）　R（Ｙ）　は有限生成、

（ｂ）　Ｙ　は　Ｑ－Gorenstein、

（ｃ）　Ｋ　は豊富。

文献

[１] Mumford,D.:The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity, Publ. Math. IHES 9 (1961),5-22.

[２] Sakai,F.:Weil divisors on normal surfaces, Duke Math. J. 51 (1984),877-887

[３] Sakai,F.:The structure of normal surfaces, Duke Math. J. 52 (1985), 627-648.