孤立特異点とその変形（δ_mの上半連続性）

早大理工研　石井志保子

(Z, z) を解析空間の正規孤立特異点とする。
morphism の芽 $\pi : (X, x) \to (C, 0)$ が次の条件を満たす時に (Z, z) の small defomation であるという。

(1) $(X_0, x) \simeq (Z, z)$

(2) X; 正規，C: 非特異曲線

(3) π : flat

またこのとき π が smooth でない点の集合を $S \subset X$ とし small deformation π の singular locus と呼ぶことにする。
今後、$\tau \in C$ に対し fiber $\pi^{-1}(\tau), (\pi|_S)^{-1}(\tau), \cdots$ を X_τ, $S_\tau \cdots$ 等と表わすことにする。

本稿では次の結果を証明する。

主定理 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し、十分小さな x の近傍 X をとれば
$$\delta_m(X_0, x) \geq \sum_{y \in S_\tau} \delta_m(X_\tau, y)$$
が成立する。

この定理の系として Esnault-Viehweg [1] の次の結果が導びかれる.

系. (X_0, x) が2次元商特異点ならば, X を十分小さくとれば (X_t, y) も商特異点である。

§1. 準備

定義1. X を正規解析空間とする. $f: \tilde{X} \to X$ を X 上の特異点の good resolution とする (i.e. $E = f^{-1}(\text{sing. locus})_{red}$ が simple normal crossings). このとき

$$\Delta_m(X) := \mathcal{O}(mK_X) / f_* \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}} + (m-1)E)$$ とおく.

ここで $\Delta_m(X)$ は X の singular locus 上に support をもつ coherent sheaf で good resolution f のとり方によらない (log-ramification formula [5]).

定義2 (X, x) が正規孤立特異点のとき, その多重種数 δ_m $(m \in \mathbb{N})$ を $\delta_m(X.x) := \dim_{\mathbb{C}} \Delta_m(X)$ と定義する.

定義3 $\pi: (X, x) \to (\mathbb{C}, 0)$ を small deformation とする. このとき proper birational morphism $f: \tilde{X} \to X$ が π の good resolution であるとは, 次の2条件が満た

されるときをいう.

(1) f は analytic space X の good resolution

(2) $f|_{[X_\tau]} : [X_\tau] \to X_\tau$ が good resolution $\tau \in C$

ただし $[X_\tau]$ は X_τ の proper transform を表わす.

ここで f に関する exceptional component は有限個であるから そのうち C の点につぶれてしまう因子も当然有限個である. したがって general な $\tau \in C$ について $[X_\tau] = \widehat{X}_\tau$. 我々は x での芽で考えているのだから $\forall \tau \neq 0$ に対して $[X_\tau] = \widehat{X}_\tau$ と思ってよい.

<u>定義4.</u> X を非特異解析空間, L を X 上の line bundle とする. $D \in |L^m|$ に対し $\varphi' : Y' \to X$ を D によって構成された cyclic m-ple covering とする. 今 Y' の正規化を Y として 合成 $\varphi : Y \to X$ を D に associate した normal cyclic m-ple covering と呼ぶ.

<u>命題5</u> (川又[6]) $\varphi : Y \to X$ を normal cyclic m-ple covering associated to $D \in |L^m|$ とする. いま D_{red} が normal crossings ならば次のことが成立.

(1) Y は高々 rational singularities しかもたない.

(2) $\varphi_* \mathcal{O}_Y = \bigoplus_{k=0}^{m-1} L^{-k}([kD/m])$

(3) $\varphi_* \mathcal{O}_Y(K_Y) = \bigoplus_{k=0}^{m-1} \omega_X \otimes L^k(-[kD/m])$

ここで特に small deformation $\pi : X \to C$ の good resolution $\tilde{X}$ 上に上記の normal cyclic cover を作ってみる. $f : \tilde{X} \to X$ を π の good resolution とし. $E = \sum_{i=1}^{r} E_i$ を $\tilde{X}$ 上の f に関する reduced exceptional divisor とする. form $\theta \in \Gamma(\tilde{X} - E, \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}}))$ に対して. $D_\theta \cup E$ が normal crossings と仮定する. ここで D_θ は. $\theta|_{\tilde{X}-E}$ の零点集合の $\tilde{X}$ での closure である. すると適当な非負整数の組 $\{a_i\}_{i=1,\dots,r}$, $\{n_i\}_{i=1,\dots,r}$ があって. $D_\theta + \sum_{i=1}^{r} n_i E_i \in |m(K_{\tilde{X}} + \sum_{i=1}^{r} a_i E_i)|$ となっている. E_i に対応する valuation を ν_i と書くと θ は同形 $\mathcal{O}_{\tilde{X}} \simeq \mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}} - D_\theta - \sum \nu_i(\theta) E_i)$ を与えるので.

$$\mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}}) \simeq \mathcal{O}(D_\theta + \sum \nu_i(\theta) E_i).$$

これにより各 i に対して. $n_i = ma_i + \nu_i(\theta)$.

さて. $D_\theta + \sum_{i=1}^{r} n_i E_i$ に associate した normal cyclic m-ple cover を $\varphi_\theta : Y_\theta \to \tilde{X}$ と表わす. ここで φ_θ は. a_i n_i のとり方によらないことに注意しておく.

<u>補題6</u> $\varphi_\theta : Y_\theta \to \tilde{X}$ を上記のように θ によって構成されたnormal cyclic m-ple cover とすると.

$\varphi_{\theta *}\mathcal{O}_{Y_\theta}(K_{Y_\theta})$ の $(m-1)$－直和因子（命題5の(3)で $k=m-1$ としたときの因子）は $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}}-\sum_{i=1}^{r}\nu_i'(\theta)E_i)$ である. ただし $\nu_i'(\theta)=\nu_i(\theta)-\ulcorner \nu_i(\theta)/m \urcorner$.

補題7　θ, ν_i, ν_i' は上記の通りとすると次が成立.

(1) $\nu_i(\theta)>0 \Rightarrow 0\leq \nu_i'(\theta)\leq \nu_i(\theta)$

(2) $-m+1\leqq \nu_i(\theta)\leqq 0 \Rightarrow \nu_i'(\theta)=\nu_i(\theta)$

(3) $\nu_i(\theta)\leqq -m \Rightarrow \nu_i(\theta)<\nu_i'(\theta)$

§2. Key Lemma（$L^{2/m}$-拡大可能性）

以後 正規孤立特異点の small deformation $\pi:(X,x)\to(C,0)$ を固定する. singular locus S とすると, $\pi'=\pi|_{X-S}: X-S\to C$ は smooth family であり, 各 fiber の normal bundle が trivial であるから自然な写像 $\Gamma(X-S,\mathcal{O}(mK_X))\xrightarrow{\gamma_\tau}\Gamma(X_\tau-S_\tau,\mathcal{O}(mK_{X_\tau}))$ が得られる.

鍵補題8　$\pi:(X,x)\to(C,0)$ に対し 適当な good resolution $f:\tilde{X}\to X$ をとれば 次が成立している.

(*) $\hat{\theta}\in\Gamma(\tilde{X}-E,\mathcal{O}(mK_{\tilde{X}}))$ に対して

$\gamma_0(\hat{\theta}) \in \Gamma([X_0], \mathcal{O}(mK_{[X_0]}+(m-1)E|_{[X_0]}))$ となっているとき.
ある $\hat{\theta}' \in \Gamma(\hat{X}, \mathcal{O}(mK_{\hat{X}}+(m-1)E))$ があって. $\gamma_0(\hat{\theta})=\gamma_0(\hat{\theta}')$

(注意. $\Gamma(\hat{X}, \mathcal{O}(mK_{\hat{X}}+(m-1)E))$ は log-ramification formula により f のとり方によらないから. 上の(*)は. 任意の resolution について成立することになる.)

[補題8の証明] $H = \mathrm{Im}\,\gamma_0 \cap L^{2/m}(X_0-\{x\})$ とおく. $\gamma_0^{-1}(H) \subset \Gamma(X-S, \mathcal{O}(mK_X))$ の general element $\hat{\theta}$ に対し. $\hat{\theta}|_{X-S}$, $\gamma_0(\hat{\theta})|_{X_0-\{x\}}$ の零点集合は非特異であるとしてよい. そこで適当な good resolution $f: \hat{X} \to X$ をとれば $D_{\hat{\theta}} \cup E \cup [X_0]$ が normal crossings になるようにできる. ここで $D_{\hat{\theta}}$ は $\hat{\theta}$ の $\hat{X}-E$ 上の零点集合の $\hat{X}$ 上での closure である.

E_i に対応する $\hat{X}$ 上の valuation を ν_i, $E_i|_{[X_0]}$ に対応する $[X_0]$ 上の valuation を ν_{0i} とする. ここで $\theta = \gamma_0(\hat{\theta})$ は H の中で各 ν_{0i} の最小値を与えるとして良い(θ の generality).
$\hat{\theta}$ によって normal cyclic m-ple cover $\varphi = \varphi_{\hat{\theta}}: Y_{\hat{\theta}} \to X$ を構成する. ここで restriction $\varphi|_{Y_0}: Y_0 = \varphi^{-1}([X_0]) \to [X_0]$ は. Y_0 の構造層を観察することにより. 命題5の(2)より. θ により構成された $[X_0]$ の normal cyclic m-ple cover

であることがわかる。いま fibres $f^{-1}(X_0)$, $\varphi^{-1}f^{-1}(X_0)$ をそれぞれ $[X_0]+E_\nu$, Y_0+F_ν と分解しておく。次の完全列が得られる。

$$0\to \mathcal{O}(K_{Y_{\theta}}) \xrightarrow{\times t} \mathcal{O}(K_{Y_\theta}-F_\nu)\longrightarrow \mathcal{O}_{Y_0}(K_{Y_0})\longrightarrow 0$$

これにより、$\tilde{X}$ 上の完全列

$$0\to \varphi_*\mathcal{O}(K_{Y_\theta}) \xrightarrow{\times t} \varphi_*\mathcal{O}(K_{Y_\theta}-F_\nu)\to \varphi_*\mathcal{O}_{Y_0}(K_{Y_0})\longrightarrow 0$$

が得られる。(t は C の 0 での local parameter)

ここで Y_θ が高々 rational singularity しかもたないことと中野消滅定理を用いれば、$H^1(Y_\theta, \mathcal{O}(K_{Y_\theta}))=0$ よって $H^1(\tilde{X}, \varphi_*\mathcal{O}(K_{Y_\theta}))=0$。これにより、global sections の全射 $\Gamma(\tilde{X}, \varphi_*\mathcal{O}(K_{Y_\theta}-F_\nu))\twoheadrightarrow \Gamma([X_0], \varphi_*\mathcal{O}(K_{Y_0}))$ --- (1)

が得られる。(1) における 2 つの module の 才 $(m-1)$-直和因子をとることにより、

全射 $\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}}-\sum \nu_i'(\theta)-E_\nu))\twoheadrightarrow \Gamma([X_0], \mathcal{O}(mK_{[X_0]}-\sum \nu_{0i}'(\theta)E_i|_{[X_0]}))$

--- (2)

が得られる。ここで ν_i', ν_{0i}' はそれぞれ $\nu_i-\lceil \nu_i/m\rceil$, $\nu_{0i}-\lceil \nu_{0i}/m\rceil$.

いま (2) の右辺 $\Gamma([X_0], \mathcal{O}(mK_{[X_0]}-\sum \nu_{0i}'(\theta)E_i|_{[X_0]}))$ が H と一致することを示そう。

<u>まず $\subset$ の証明</u>。(2) の全射は γ_0 の制限であることに注意して $\Gamma([X_0], \mathcal{O}(mK_{[X_0]}-\sum \nu_{0i}'(\theta)E_i|_{[X_0]})\subset \mathrm{Im}\,\gamma_0$ を得る。各 i に対し、$\nu_{0i}(\theta)\geq -m+1$ であるから 補題 7 の (1)(2) により、$\nu_{0i}'(\theta)\geqq -m+1$ よって $\Gamma([X_0], \mathcal{O}(mK_{[X_0]}-\sum \nu_{0i}'(\theta)E_i|_{[X_0]})\subset H$.

逆に $\nu_{0i}(\theta) \geq -m+1$ より $\nu_{0i}(\theta) \leq \nu_{0i}'(\theta)$ (再び補題7の(1),(2)) より. $\theta \in \Gamma([X_0], mK_{[X_0]} - \sum \nu_{0i}'(\theta) E_i|_{[X_0]})$. 一方 θ は H の元の中で ν_{0i} が最小になるものであるから. H の他の元も すべて $\Gamma([X_0], mK_{[X_0]} - \sum \nu_{0i}(\theta) E_i|_{[X_0]})$ に入る.

よって次の diagram が得られた.

$$\begin{tikzcd}
 & \Gamma(\hat{X} - E, \mathcal{O}(mK_{\hat{X}})) \arrow[r, "\gamma_0"] & \Gamma([X_0] - E, \mathcal{O}(mK_{[X_0]})) \\
\tilde{\theta} \in & \gamma_0^{-1}(H) \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, two heads] & H \arrow[u, phantom, "\cup"] \\
\tilde{\theta}_1 \in & \Gamma(\hat{X}, \mathcal{O}(mK_{\hat{X}} - \sum \nu_i(\theta) E_i - E_v)) \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[ur, "(2)"'] &
\end{tikzcd}$$

左下の module から general element $\tilde{\theta}_1$ をとってくる もし $\nu_i(\tilde{\theta}) \leq -m$ とすると. E_v が effective であることと $\nu_i \to \nu_i'$ の変化 (Lemma 7.(3)) に注意すると. $\nu_i(\tilde{\theta}_1) \gneq \nu_i(\tilde{\theta})$ になっている. もしすべての i に対し $\nu_i(\tilde{\theta}_1) \geq -m+1$ となっていれば証明は終り. そうでないとして証明を続けよう.

今度はこの $\tilde{\theta}_1$ に対し. $D_{\tilde{\theta}_1} \cup E^{(1)} \cup [X_0]^{(1)}$ が normal crossings になるように. $\hat{X}$ の exceptional set Σ に中心をもつ blow up $f_1 : \hat{X}^{(1)} \to \hat{X}$ をとる. ここで $E^{(1)}$ は $f \circ f_1$ に関する $\hat{X}^{(1)}$ 上の exceptional divisor $[X_0]^{(1)}$ は X_0 の $f \circ f_1$ による

proper transform. $\tilde{X}^{(1)}$ と $\tilde{\theta}_1$ によって covering をつくって同様の議論をすれば、

全射 $\Gamma(\tilde{X}^{(1)}, \mathcal{O}_{\tilde{X}^{(1)}}(mK_{\tilde{X}^{(1)}} - \sum a_i^{(1)} E_i^{(1)})) \twoheadrightarrow H$ ---(4)

が得られる。ここでもし $\nu_i(\tilde{\theta}_1) \leq -m$ なら $a_i^{(1)} > \nu_i(\tilde{\theta}_1)$ (補題7の(3)と $E_v^{(1)}$ の effectivity)。

この操作を順次くり返してやることにより、最終的に、good resolution $f \circ g_1 \circ g_2 \cdots \circ g_s : \tilde{X}^{(s)} \longrightarrow X$ と、全射 $\Gamma(\tilde{X}^{(s)}, \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}^{(s)}} - \sum \alpha_i E_i^{(s)})) \twoheadrightarrow H$ が得られる。

ここで $\tilde{X}$ の exceptional component の proper transform となっているようなすべての component $E_i^{(s)}$ に対し、$\alpha_i \geq -m+1$。よって $\Gamma(\tilde{X}^{(s)}, \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}^{(s)}} - \sum \alpha_i E_i^{(s)})) \subset \Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}} + (m-1)E))$。これにより確かに、$H$ の元は $\Gamma(\tilde{X}, \mathcal{O}(mK_{\tilde{X}} + (m-1)E))$ の中に逆像をもつことがわかる。

<u>補題9</u> $\Delta_m(X_0)$ の subsheaf より $\Delta_m(X) \underset{\mathcal{O}_C}{\otimes} \mathbb{C}(0)$ へ canonical な全射が存在する。

[証明]. $\mathcal{O}(mK_X) \otimes \mathbb{C}(0) \longrightarrow \mathcal{O}(mK_{X_0}) \twoheadrightarrow \Delta_m(X_0)$ なる合成写像を τ と表わす。$I_0 := \mathrm{Ker}\,\tau$ とすると、

$\mathcal{O}(mK_X) \otimes \mathbb{C}(0) / I_0 \subset \Delta_m(X_0)$

ところで I_0 の元は補題8により $f_*\mathcal{O}(mK_{\tilde{X}}+(m-1)E)$ の像に含まれる。よって全射 $\mathcal{O}(mK_X)\otimes\mathbb{C}(0)/I_0 \twoheadrightarrow \Delta_m(X)\otimes\mathbb{C}(0)$ が存在。

§3. general fibre上での現象.

<u>補題10</u>. (i) canonical map $k_\tau:\mathcal{O}(mK_X)\otimes\mathbb{C}(\tau)\longrightarrow \mathcal{O}(mK_{X_\tau})$ は任意の $\tau\in C$ に対し単射で(Xを十分小さくとれば)$\tau\neq 0$ について全単射となる.

(ii) Xを小さくとりなおせば, $\tau\neq 0$ に対し, k_τ は同型 $\Delta_m(X)\otimes\mathbb{C}(\tau)\simeq\Delta_m(X_\tau)$ を導く.

[証明]. 次の完全列を考えよう.

$$0\longrightarrow \mathcal{O}_X(mK_X)\xrightarrow{(t-\tau)}\mathcal{O}_X(mK_X)\xrightarrow{\gamma_\tau}\mathcal{O}_{X_\tau}(mK_{X_\tau})$$

ここで $\mathcal{O}_X(mK_X)\otimes\mathbb{C}(\tau)=\mathcal{O}_X(mK_X)/(t-\tau)\mathcal{O}_X(mK_X)$ は, γ_τ の像に他ならない. ((i)の第一主張が証明された)

Xを小さくとりなおし, $\pi|_{S-\{x\}}:S-\{x\}\longrightarrow C^*=C-\{0\}$ が finite morphism であって, $E|_{C^*}\longrightarrow C^*$ が projective morphism であるとしてよい. $E'\subset\tilde{X}$ を exceptional divisor 上に support をもつ divisor で $\mathcal{O}(-E')$ が f に関して relatively ample であるようにとる.

$E'|_{C^*}\to C^*$ は projective かつ flat で $\mathcal{O}_{E'}(mK_{\tilde{X}}+rE')$

は flat over C^* だから cohomology 次元の上半連続性により．ある $r_0>0$ があって．任意の $r\geq r_0$ に対し

$$f_*\mathcal{O}_{E'}(mK_{\tilde{X}}+rE')=0 \quad \text{on } C^*$$

$$R^1f_*\mathcal{O}_{E'}(mK_{\tilde{X}}+rE')=\begin{cases} 0 & \text{on } C^* \text{ if } n=\text{rel.dim}\,\pi \geq 3 \\ \text{locally free on } C^* & \text{if } n=2. \end{cases}$$

よって．$n\geq 3$ のときも $n=2$ のときも．次が exact になる．

$$0\to R^1f_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}}+rE')\to R^1f_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}}+(r+1)E')$$
$$\to R^1f_*\mathcal{O}_{E'}(mK_{\tilde{X}}+(r+1)E')\longrightarrow 0, \quad \text{for } r\geq r_0.$$

よって．$R^1f_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}}+rE')$ がある点で torsion free であることと．$R^1f_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}}+r_0E')$ が$\overset{\text{その点で}}{}$ torsion free であることとは同値．だから．C を十分小さくとりなおしてやれば C^* 上で $R^1f_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}}+rE')$ は任意の $r\geq r_0$ について torsion free である．

この上で次の exact sequence を考える．$(r\geq r_0)$

$$0\longrightarrow f_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}}+rE')\xrightarrow{\times(t-\tau)} f_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}}+rE')$$
$$\longrightarrow f_*\mathcal{O}_{\tilde{X}_\tau}(mK_{\tilde{X}_\tau}+rE')\to R^1f_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}}+rE')\xrightarrow{\Psi_\tau} R^1f_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}}+rE')$$

ここで Ψ_τ は．$(t-\tau)$ をかける写像であるが $R^1f_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}}+rE')$ は torsion free on C^* だから．Ψ_τ は injective

よって $f_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}}+rE')\otimes\mathbb{C}(\tau)\simeq f_*\mathcal{O}_{\tilde{X}_\tau}(mK_{\tilde{X}_\tau}+rE')$ $(r\geq r_0)$

ここで r を十分大きくとると、

$$\mathcal{O}_X(mK_X)\otimes\mathbb{C}(\tau)=f_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(mK_{\tilde{X}}+rE')\otimes\mathbb{C}(\tau)$$
$$\mathcal{O}_{X_\tau}(mK_{X_\tau})\quad=f_*\mathcal{O}_{\tilde{X}_\tau}(mK_{\tilde{X}_\tau}+rE'|_{\tilde{X}_\tau})$$

であったから、上の同型により(ii)の才之主張が示された。

(iii) については補題 9 の diagram

$$\Delta_m(X_\tau)\overset{j_\tau}{\rightleftarrows}\mathcal{O}(mK_X)\otimes\mathbb{C}(\tau)/I_\tau\xrightarrow{i_\tau}\Delta_m(X)\otimes\mathbb{C}(\tau)$$

を思い出す。(i)より j_τ は全射。さらに $\widehat{X}_\tau=[X_\tau]$ だから I_τ は $f_*\mathcal{O}(mK_{\tilde{X}}+(m-1)E)$ の像に他ならない。よって上の diagram は両端が一致。

§4. 主定理と系の証明

<u>主定理の証明</u>

補題 9.10 を用いれば

$$\delta_m(X_0,x)=\dim_{\mathbb{C}}\Delta_m(X_0)\geq\dim_{\mathbb{C}}\Delta_m(X)\underset{\mathcal{O}_c}{\otimes}\mathbb{C}(0)$$
$$\Sigma\delta_m(X_\tau,y)=\dim_{\mathbb{C}}\Delta_m(X_\tau)=\dim_{\mathbb{C}}\Delta_m(X)\underset{\mathcal{O}_c}{\otimes}\mathbb{C}(\tau)$$

X を十分小さい Stein space にすると、中山の補題より coherent sheaf $\Delta_m(X)$ は $\dim_{\mathbb{C}}\Delta_m(X)\otimes\mathbb{C}(0)$ 個の generator で生成されているとしてよい。よって

$$\dim\Delta_m(X)\otimes\mathbb{C}(0)\geq\dim\Delta_m(X)\underset{\mathcal{O}_c}{\otimes}\mathbb{C}(\tau)\qquad\text{[QED]}$$

系の証明　2次元の場合．商特異点 $\Leftrightarrow \delta_m = 0$ $(\forall m \in \mathbb{N})$
に注意する．(X_0, x) は rational singularity だから．
X_t は高々 rational singularity しかもたない．
よって．$\mathbb{Q}$-Gorenstein singularity である．general な
$t \in C$ に対し．configuration E_t は同じであるから．
general な $t \in C$ に対し 共通の $s > 0$ が存在し．
$\mathcal{O}(sK_{X_t})$ が invertible になる．

一般に n 次元 index r の $\mathbb{Q}$-Gorenstein singularity
(Z, z) は．次のいずれかであった．([8])

(1) $\delta_m(Z, z) = 0$　$\forall m \in \mathbb{N}$

(2) $\delta_m(Z, z) = 1$　for $m \equiv 0 \pmod r$

(3) $\delta_{rm}(Z, z)$ は order n で増大．

ところで．同じ (Z, z) の条件の下で．(1) は次と同値である．
"$\mathcal{O}_Z(sK_Z)$ invertible となるようなある s に対し．$\delta_s(Z, z) = 0$"
ここで我々の場合 $m = s$ に対し δ_m の上半連続性
定理を適用すれば．$\delta_s(X_t, y) = 0$ が出るので．(X_t, y)
は商特異点．

§5. Du Bois 特異点の変形

Steenbrink は [7] で．Du Bois 特異点の small deformati

はまた Du Bois 特異にはなるか？という問題を提起した。
これは isolated Gorenstein の条件をつければ正しい。

命題11 $\pi:(X,x)\longrightarrow(\mathbb{C},0)$ を isolated Gorenstein Du Bois singularity (X_0,x) の small deformation とする。と X を十分小さくとれば、X_τ $(\tau\neq 0)$ は isolated Gorenstein Du Bois singularity のみをもつ。

[証明] 十分小さい X が Gorenstein になることはよく知られており、したがって X_τ も Gorenstein になる。
補題9より $\dim \Delta_m(X)\otimes\mathbb{C}(0)\leq \dim \Delta_m(X_0)$
ところで (X_0,x) は Gorenstein Du Bois であるからその特徴づけ([2]) により右辺 $\leqq 1$ が任意の m について成立。よって中山の補題により X を小さくとれば $\Delta_m(X)$ は高々1個の元で生成されている。よって X は Gorenstein であることを考慮すると $K_{\tilde{X}}=f^*K_X+\sum m_iE_i$ $(m_i\geq -1)$ が得られる。$\tau\neq 0$ とすると $f^{-1}(X_\tau)=\tilde{X}_\tau\longrightarrow X_\tau$ が good resolution を与えるから $K_{\tilde{X}_\tau}=f^*K_{X_\tau}+\sum m_iE_i|_{\tilde{X}_\tau}$ $(m_i\geq -1)$ より X_τ は Du Bois singularity のみをもつ。(QED)

しかしここで Gorenstein の条件をはずすと上は成立しない([4])。

References.

[1]. Esnault, H., Viehweg, E.: Two dimensional quotient singularities deform to quotient singularities. Math. Ann. 271, 439–449 (1985)

[2]. Ishii, S.: On isolated Gorenstein singularities Math. Ann. 270, 541–554 (1985)

[3] —— : Du Bois singularity on a normal surface. to appear in Advanced Studies in Pure Math. 8. 1986. complex analytic singularities.

[4] —— : Small deformation of normal singularities, preprint

[5] Kawamata, Y.: The cone of curves of algebraic varieties Annals. Math. 119, 603–633. (1984).

[6] —— : Minimal model and Kodaira dimension of algebraic fiber spaces. preprint.

[7] Steenbrink. J.: Mixed Hodge structures associated

with isolated singularities. Proc. Sym. in Pure Math, 40 Part 2. 513-536 (1983)

[8] Watanabe, K.: On pluri-genera of normal isolated singularities I. Math. Ann. 250. 65-94 (1980)