代数幾何学シンポジウム記録
1985年度 pp.39-49

5次曲面の不正則数について

都立大理　梅津 裕美子

§0. 序.

標数0の代数閉体 k 上定義された d 次曲面 X を考える。すなわち X を $\mathbb{P}^3_k$ の d 次超曲面とする。$d \leq 4$ のときには X 上の特異点や X の resolution $\tilde{X}$ の性質についてはかなり詳しい結果が知られている。例えば $\tilde{X}$ として現われる非特異曲面は次のもの(と双有理同値)である。

$d=1,2$　　有理曲面

$d=3$　　有理曲面または楕円線織面

$d=4$　　K3曲面, 有理曲面, 楕円線織面 または 種数3の曲線上の線織面

これに対して $d \geqq 5$ の場合についてはほとんど何も判っていない。本稿では次の定理の証明を目標にする。

__定理.__ X を正規5次曲面, $\tilde{X}$ をその resolution とする。もし $\tilde{X}$ が一般型曲面ならば その不正則数 $q(\tilde{X})$ は 0 である。

ただし、この定理は次の例に見るように $d \geqq 6$ には拡張できない。

<u>例.</u> (Zariski)　$(X_0 : X_1 : X_2 : X_3)$ を $\mathbb{P}^3$ の斉次座標とし、

$$X = \left\{ X_3^6 - \left(F(X_0, X_1, X_2)^2 + G(X_0, X_1, X_2)^3 \right) = 0 \right\}$$

とおく。ここで F, G はそれぞれ3次, 2次の斉次多項式である。このとき X の resolution $\widetilde{X}$ の不正則数は正となる。実際、X を曲面 $S_t : G - tX_3^2 = 0$ で切ると、　$(1-t^3)X_3^6 - F^2 = 0$.
これは X 上では次で定義される2つの曲線の族

$$\sqrt{1-t^3}\, X_3^3 - F = 0$$
$$\sqrt{1-t^3}\, X_3^3 + F = 0$$

に分かれる。よって X 上には楕円曲線 $u^2 = 1 - t^3$ で parametrize される曲線の族が存在することになり、$\widetilde{X}$ は不正則な曲面である。

X の特異点は $C := \left\{ F(X_0, X_1, X_2)^2 + G(X_0, X_1, X_2)^3 = 0 \right\} \subseteq \{ X_3 = 0 \} \cong \mathbb{P}^2$ の特異点と対応しているが, F, G を一般にとると C の特異点は $\{ F(X_0, X_1, X_2) = 0 \} \cap \{ G(X_0, X_1, X_2) = 0 \}$ の6点で、その各点で X の特異点は $z^6 = x^2 + y^3$ で定義される。この特異点は $\widetilde{E}_8$ と呼ばれる特異点で resolution の例外集合は非特異楕円曲線

で自己交点数は -1 である。よって $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ を X の minimal resolution とすると

$$K_{\tilde{X}}^2 = (\pi^* \mathcal{O}_X(2))^2 - 6 = 18$$

よって $\tilde{X}$ は一般型曲面である。

§1. 準備.

この§では、2次元正規特異点の不変量について準備する。

(Y, y) を2次元正規特異点, $\pi : \tilde{Y} \to Y$ を minimal resolution とする。例外集合を $A = \pi^{-1}(y)$ とおく。

<u>定義.</u>

$$p_g(Y, y) = \dim_k (R^1 \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{Y}})_y \quad : (Y, y) \text{ の幾何種数}$$

$$p_a(Y, y) = \sup_{\substack{D \geqq 0 \\ \operatorname{supp} D \subset A}} p_a(D) \quad : (Y, y) \text{ の算術種数}$$

定義より $p_g(Y, y) \geqq p_a(Y, y) \geqq 0$ が成り立つことがわかる。

<u>定理.</u> (Artin [A]) $p_a(Y, y) = 0 \iff p_g(Y, y) = 0$.

我々は幾何種数が正の特異点だけが問題になるので、上の定理より算術種数も正の特異点のみを考えればよい。

定義. A上に support をもつ因子で $\tilde{Y}$ 上の標準因子と数値的同値であるものが存在するとき，(Y, y) を数値的 Gorenstein 特異点という。この因子を K' と書くことにする。

補題1. (小山) (Y, y) を数値的 Gorenstein 特異点とすると、
$$p_a(Y, y) \leq -\frac{K'^2}{8} + 1$$
とくに，$K'^2 \geqq -7$ ならば $p_a(Y, y) \leq 1$.

証明. D を A に support をもつ任意の因子とすると、
$$p_a(D) = \frac{D^2 + DK'}{2} + 1 = \frac{(D + \frac{K'}{2})^2}{2} - \frac{K'^2}{8} + 1 .$$
Aの交点行列は負定値だから求める不等式が得られる。

定義. $p_a(Y, y) = 1$ のとき，(Y, y) を楕円特異点という。

楕円特異点に対しては、$p_a(D) = 1$ をみたす A に support をもつ正因子 D のうち最小のものが存在する。これを E と書く。楕円列と呼ばれる正因子の列 $\{Z_1, \cdots, Z_\ell\}$ が次の様に定義される (c.f. S.S.-T. Yau [Y], Tomari [T])： Z_1 としては A の基本サイクルを

とる。 Z_k まで定義されたとする。 $Z_kE<0$ ならば $\{Z_1, \cdots, Z_k\}$ を楕円列と定義する。 $Z_kE=0$ のときは、Aの成分 A_i で $Z_kA_i=0$ となるものの和のEを含む連結成分を B_{k+1} とする。そして B_{k+1} の基本サイクルを Z_{k+1} とおく。 $\mathrm{supp}\, Z_k \subsetneqq \mathrm{supp}\, Z_{k+1}$ なので有限回の操作で楕円列 $\{Z_1, \cdots, Z_\ell\}$ が定まる。これに対して次の結果がある。

<u>定理.</u>（Yau [Y]） (Y, y) を楕円特異点、$\{Z_1, \cdots, Z_\ell\}$ をその楕円列とすると、

(1) $p_g(Y, y) \leq \ell$

(2) (Y, y) が数値的 Gorenstein ならば $K' = -\sum_{i=1}^{\ell} Z_i$.

<u>系 1.</u> (Y, y) を楕円特異点で数値的 Gorenstein とすると、

$p_g(Y, y) \leq -K'^2$.

<u>系 2.</u> (Y, y) 同上とすると、A に support をもつ正因子 E で次をみたすものが存在する。

$p_a(E) = 1$

$p_g(Y, y)E \leq -K'$.

§2. 主定理の証明

記号. $X \subset \mathbb{P}^3$: 正規5次曲面

$\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$; minimal resolution

$q = q(\tilde{X}) = \dim H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$

$p_g = p_g(\tilde{X}) = \dim H^2(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$

$p = \sum_{x \in X} p_g(X, x)$

$H \subset X$; 一般の超平面切断. 種数6の非特異曲線で、$\omega_X \cong \mathcal{O}_X(H)$ となる。

$\tilde{H} = \pi^{-1}(H) \cong H$

$\tilde{D}$: $\tilde{X}$ 上の正因子で $K_{\tilde{X}} = \tilde{H} - \tilde{D}$ をみたすもの。

$\operatorname{supp} \tilde{D} = \bigcup_{p_g(X,x)>0} \pi^{-1}(x)$ となる。

仮定. $\tilde{X}$ は一般型曲面とする。

次の完全列を考える。

$$0 \to H^1(X, \mathcal{O}_X) \to H^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) \to R^1\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}} \to H^2(X, \mathcal{O}_X) \to H^2(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) \to 0$$

これより $\quad p_g = 4 - p + q \qquad (*)$

また $\tilde{X}$ は一般型であるから $\quad 0 < \chi = 1 - q + p_g.$

よって $(*)$ とあわせて $\quad q \leq p \leq 4 \quad$ を得る。

補題2. $q>0$ とすると $0<q<p-1\leq 3$.

証明. $0<q\leq p$, $p-1\leq 3$ はよい。$q=p$, $p-1$ として矛盾を導く。

$q=p$ とすると (*) より $p_g=4$ であるから

$$H^0(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}}(K_{\tilde{X}}))=H^0(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}}(\tilde{H}-\tilde{D}))\cong H^0(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}}(\tilde{H})).$$

$|\tilde{H}|$ は固定点をもたないから $\tilde{D}=0$ ゆえに $p=0$.

$q=p-1$ とすると $p_g=3$. よって $p_g(X,x)>0$ となる特異点 $x\in X$ は唯1つで

$$H^0(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}}(K_{\tilde{X}}))\cong\left\{\pi^*f \;\middle|\; f\in H^0(X,\mathcal{O}_X(H)),\ f(x)=0\right\}$$

となるので $|K_{\tilde{X}}|$ は $\pi^{-1}(x)$ の成分以外には固定成分をもたない。よって $\tilde{X}$ 上に第1種例外曲線があればそれは $\pi^{-1}(x)$ に含まれなければならないが, $\pi:\tilde{X}\to X$ は minimal resolution であるので矛盾。つまり $\tilde{X}$ は極小曲面である。ところが

$$2p_g-2=4\geqslant\tilde{H}^2+\tilde{D}^2=K_{\tilde{X}}^2$$

であるから極小曲面ならば $q=0$ となってこれも矛盾である。($2p_g-2>K_{\tilde{X}}^2$ のときは Bombieri [B]. $2p_g-2=K_{\tilde{X}}^2$ のときは一般には Miyanishi-Nakamura [M-N] に依るが、今の場合は次のようにしても言える:
$4=\tilde{H}^2+\tilde{D}^2$ より $\tilde{D}^2=-1$. よって, $K'=-\tilde{D}$ だから

補題1より x は楕円特異点である。系1を適用すると $p = p_g(X, x) = 1$ で $q = p-1 = 0$ となってしまう。)

$\overline{X}$ を $\widetilde{X}$ の極小modelとし，$\mu : \widetilde{X} \longrightarrow \overline{X}$ を blow-down とする。Bombieri [B] より $q>0$ ならば $2\chi \leq K_{\overline{X}}^2$ が成立する。よって補題2より，$q>0$ とすると次のいずれかである。

	q	p	χ	$K_{\overline{X}}^2$
I	2	4	1	2以上
	1	4	1	2以上
II	1	3	2	4以上

補題3.　$(q \geqq 0)$

$$K_{\overline{X}}^2 \geqq 2 \quad [\text{resp.} \geqq 3]$$
$$\widetilde{D}^2 \leqq -4 \quad [\text{resp.} \leqq -3]$$

と仮定すると $\widetilde{X}$ 上の第1種例外曲線は唯1つで，それを E とおくと $\overline{X}$ は E の blow-down として得られる。更に

$$K_{\overline{X}}^2 = 2 \quad [\text{resp. } 3]$$
$$\widetilde{D}^2 = -4 \quad [\text{resp. } -3]$$
$$\widetilde{D}\,\mu^* K_{\overline{X}} = 2 \quad [\text{resp. } 1]$$
$$\widetilde{D}E = 2$$

が成り立つ。

<u>証明.</u> $\widetilde{H}\,\mu^*K_{\overline{X}}=d,\quad \mu^*K_{\overline{X}}{}^2=a$ とおいて $(\widetilde{H},\mu^*K_{\overline{X}})$ の交点行列を考えると，Hodge 指数定理より

$$\begin{vmatrix} 5 & d \\ d & a \end{vmatrix} = 5a-d^2<0.$$

ここで $a\geqslant 2$ だから $d\geqslant 4$ となる。

$$\widetilde{H}-\widetilde{D}=K_{\widetilde{X}}=\mu^*K_{\overline{X}}+E$$

とおくと

$$5=\widetilde{H}K_{\widetilde{X}}=d+\widetilde{H}E,\quad \widetilde{H}E\geqslant 0.$$

$d=5$ とすると $\widetilde{H}E=0$，これは $E=0$ すなわち $\widetilde{X}=\overline{X}$ を意味する。ところが仮定より

$$2\ [\text{resp. } 3]\ \leq K_{\overline{X}}{}^2$$

$$K_{\widetilde{X}}{}^2=5+\widetilde{D}^2\ \leq 1\ [\text{resp. } 2]$$

であるから矛盾である。よって $d=4$．$\widetilde{H}E=1$ より E は既約かつ被約な第1種例外曲線で、E の contraction が $\overline{X}$ である。$K_{\widetilde{X}}{}^2=K_{\overline{X}}{}^2-1$ より，仮定の不等式が全て等式になることが導かれる。また

$$-1=K_{\widetilde{X}}E=\widetilde{H}E-\widetilde{D}E \text{ より } \widetilde{D}E=2,$$

$$4\,[\text{resp. } 3]=K_{\widetilde{X}}\widetilde{D}=\mu^*K_{\overline{X}}.\widetilde{D}+\widetilde{D}E \text{ より } \mu^*K_{\overline{X}}.\widetilde{D}$$

$=2\ [\text{resp. } 1]$ を得る。

主定理の証明. II の場合: $\widetilde{D}^2 \geqq -2$ とすると補題1, 系1より $p \leqq 2$ となって矛盾, $\widetilde{D}^2 \leqq -3$ とすると補題3より $K_{\overline{X}}{}^2 = 3$ となって矛盾する。

I の場合: $\widetilde{D}^2 \geqq -3$ とすると補題1, 系1より $p \leqq 3$ で矛盾となるので $\widetilde{D}^2 \leqq 4$。補題3を適用すると、$\widetilde{X}$ 上に第1種例外曲線 E が存在して $\mu : \widetilde{X} \to \overline{X}$ は E の contraction, $\widetilde{D}^2 = -4$ である。補題1より X の特異点は全て算術種数が1以下となるので系2より $\widetilde{X}$ 上の正因子 $E_1, \cdots, E_4$ で

(1) $p_a(E_i) = 1 \ (\forall i)$ (2) $\sum_{i=1}^{4} E_i \leqq \widetilde{D}$

をみたすものが存在する。(1)より $0 > E_i{}^2 = E_i \widetilde{D}$, (2)より $\sum_{i=1}^{4} E_i \widetilde{D} \geqq \widetilde{D}^2 = -4$ であるから, $E_i \widetilde{D} = -1$ $(\forall i)$. よって

$$1 = -E_i \widetilde{D} = E_i K_{\widetilde{X}} = E_i \mu^* K_{\overline{X}} + E_i E.$$

一方補題3より $\widetilde{D} \mu^* K_{\overline{X}} = 2$, $\widetilde{D} E = 2$ であるから $E_i E = 1$, $E_i \mu^* K_{\overline{X}} = 0$ となる i が存在する。この i に対して

$$(E_i + E)^2 = 0, \ (E_i + E) \mu^* K_{\overline{X}} = 0, \ \mu^* K_{\overline{X}}{}^2 = 2$$

となり, Hodge 指数定理に反する。これで定理は証明された。

参考文献

[A] M. Artin, On isolated rational singularities of surfaces, Amer. J. Math. 88 (1966), 129–136.

[B] E. Bombieri, Canonical models of surfaces of general type, I.H.E.S. 42 (1973), 447–495.

[M-N] N. Miyanishi and K. Nakamura: On the structure of minimal surfaces of general type with $2p_g = (K^2) + 2$, J. Math. Kyoto Univ. 18 (1978), 137–171.

[T] M. Tomari, A p_g-formula and elliptic singularities, RIMS 1983.

[Y] S. S.-T. Yau, On maximally elliptic singularities, Trans. Amer. Math. Soc. 257 (1980), 269–329.