代数幾何学シンポジウム記録
1985年度　pp.28-38

一般化されたクンマー曲面とその単有理性

横浜市大・文理　桂　利行

§1. 結果

k を標数 p の代数的閉体，X を k 上の non-singular complete 代数曲面とする。2次元射影空間 $\mathbb{P}^2$ から X への generically surjective 有理写像 φ が存在するとき，X は単有理曲面であるという。さらに，φ として次数 p の purely inseparable 有理写像がとれるとき，X は Zariski 曲面であるという。X の第2 Betti 数を $B_2(X)$，Picard 数を $\rho(X)$ とかく。$B_2(X)=\rho(X)$ であるとき，X は supersingular であるという。X が有理曲面ならば単有理曲面であり，単有理曲面ならば supersingular になる（Shioda [7] 参照）。これらの逆は一般には成立しない (Zariski [10], Shioda [7] 参照)。E を k 上定義された楕円曲線とする。E の p 等分点のなす群を $(E)_p$ とかく。$(E)_p \cong \{0\}$ となるとき E は supersingular 楕円曲線であるという。この条件は $\mathrm{End}^0(E)=\mathrm{End}(E)\otimes\mathbb{Q}$ が $\mathbb{Q}$ 上の四元数環になることと同値である。A を2次元のアーベル多様体（アーベル曲面）とする。A が

supersingular楕円曲線Eの直積 $E\times E$ と isogenousになるとき，Aは supersingularなアーベル曲面であるという。Aが代数曲面として supersingular になること（即ち $B_2(A)=\rho(A)=6$）とAがアーベル曲面として supersingularになることは同値である。$p\neq 2$ とし，ι をAの inversion（$\iota: x\longmapsto -x,\ x\in A$）とする。商曲面 $A/\langle\iota\rangle$ は16個の ordinary double point を持つが，その minimal resolution を $Km(A)$ と書き，これを Kummer 曲面とよぶ。本稿では，次の2つの問題を考える。

問題1（塩田）．$p\geqq 3$ とし，Eを supersingular 楕円曲線とする。このとき，$Km(E\times E)$ は Zariski 曲面になるか。

問題2（Artin-塩田）．$p\neq 0$ とする。K3曲面Xに対し，Xが単有理曲面であることと，Xが supersingular であることは同値であるか。

問題1については，$p=3$ のときには Fermat 曲面に関する結果を用い Shioda [6],[7] から出ることが塩田先生により注意されている。問題1に関する我々の結果は次のとおりである。

定理1．$p\geqq 3$ とし，Eを supersingular楕円曲線とする。

i) $p\not\equiv 1 \pmod{12}$ ならば $Km(E\times E)$ は Zariski 曲面である。

ii) $p\equiv 1 \pmod{12}$ のときには $Km(E\times E)$ の適当な $(p-1)/2$ 次の separable covering をとってやれば Zariski 曲面になる。

問題2については 先にのべたように単有理曲面なら supersingular になることは一般的事実として知られている (Shioda [7] 参照)。逆の成立に関して，次のような2つの興味ある事実が知られている。

定理2 (Rudakov and Shafarevich [5])。$p=2$ とする。このとき，K3 曲面 X が単有理曲面であることと supersingular であることは同値である。

定理3 (Shioda [8])．$p \geqq 3$ とする。Kummer 曲面 $Km(A)$ に対しては，$Km(A)$ が単有理曲面であること，$Km(A)$ が supersingular であること，A が supersingular であることの3つの条件は同値である。

我々はこの定理3を少し一般にする。A をアーベル曲面とし，A の代数曲面としての自己同型群を $Aut(A)$ と書く。G を $Aut(A)$ の有限部分群とする。

定義1．商曲面 A/G の non-singular model で K3 曲面になるものがあるとき，その non-singular minimal model を $Km(A,G)$ と書き 一般化された Kummer 曲面とよぶ。

これに対して，次の定理をうる。

定理4。$p \geqq 7$ とする。一般化された Kummer 曲面 $Km(A,G)$ に対して 次の3条件は同値である。

i) $Km(A,G)$ は単有理曲面である。

ii) $Km(A,G)$ は supersingular である。

iii) A は supersingular アーベル曲面である。

定理4を示すために，一般化された Kummer 曲面が得られるようなアーベル曲面 A と有限部分群 $G \subset Aut_v(A)$ の組 (A,G) の分類をおこなう。

補題5. $p \neq 2, 3, 5$ とする。$K(A,G)$ を一般化された Kummer 曲面とすれば，G の元で fixed point free になるものは A の translation にかぎる。

G の元で fixed point free になるもの全体と単位元からなる集合を N とすれば，容易にわかるように N は G の正規部分群になる。(A, G) のかわりに $(A/N, G/N)$ を考えても

$$Km(A,G) \cong Km(A/N, G/N)$$

となるから，G に次の条件をつけてもよい。

(条件F)　G は fixed point free の元を含まない。

定理6. $p \neq 2, 3, 5$ とする。$Km(A,G)$ を一般化された Kummer 曲面とし，G は(条件F)をみたすとする。しからば，G は次のどれかの群と同型である。

(i) cyclic group $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $(n = 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10$ または $12)$.

(ii) binary dihedral group $\langle 2,2,n \rangle$ $(n = 2, 3, 4, 5$ または $6)$

(iii) binary tetrahedral group $\langle 2,3,3 \rangle$.

(iv) binary octahedral group $\langle 2,3,5 \rangle$.

(v) binary icosahedral group $\langle 2,3,5\rangle$.

系7. $p=0$ とする。$Km(A,G)$ を一般化された Kummer 曲面とすれば，G は次のどれかの群と同型である。

(i) cyclic group $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ($n=2,3,4$. または 6).

(ii) binary dihedral group $\langle 2,2,n\rangle$ ($n=2$ または 3).

(iii) binary tetrahedral group $\langle 2,3,3\rangle$.

注意1. 系7は Fujiki [1] でも得られている。

注意2. 定理6にあらわれている群は 適当な標数 p を選べば その標数において存在する。系7においてあらわれている群は すべて存在する (Fujiki [1], Katsura [2] 参照).

証明の詳細は Katsura [2] にあるので，ここでは結果の announcement にとどめ，次の節では 定理3の新しい証明を与え，その系として 定理1 ii) を示すことにする。

§2. 定理3の証明.

以下，次の定理を自由に用いる。

定理8 (Deligne). E_i ($i=1,2,\cdots,2n$; $n\geqq 2$) を supersingular 楕円曲線とする。このとき，$E_1\times\cdots\times E_n\cong E_{n+1}\times\cdots\times E_{2n}$ となる。

証明は Shioda [9] 参照。

まず，Moret-Bailly による principally polarized supersingular アーベル曲面の族の survey からはじめる。$p\geqq 3$ とする。E を supersingular 楕円曲線，$\alpha_p=\mathrm{Spec}\, k[\varepsilon]/(\varepsilon^p)$ を

rank p の local-local group scheme とする。$A = E \times E$ とおき，T を A の零点における tangent space，$S = \mathbb{P}(T)$ を T から得られる射影直線とする。

$$K_S = \alpha_p \times \alpha_p \times S\ ,\quad A_S = E \times E \times S$$

とおく。S の斉次座標を (X, Y) とし，$K_S = \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_S[\alpha, \beta]/(\alpha^p, \beta^p)$ の $X\alpha - Y\beta = 0$ によって定義される subgroup scheme を H とする。自然な写像 $H \longrightarrow S$ によって これは S 上の group scheme になる。すべての closed fibre は α_p と同型である。α_p に同型な $E \times E$ の subgroup scheme で $\mathbb{P}(T)$ の点 t の方向に対応するものが一意的に存在するが，$H \longrightarrow S$ はそのような $E \times E$ の subgroup scheme を parametrize するものである。$K_S \hookrightarrow A_S$ なる自然な写像によって $\Delta : H \hookrightarrow A_S$ なる injection が induce される。$\mathfrak{X} = A_S/\Delta(H)$ とおく。次のような diagram を得る：

(2.1)
$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & H \arrow[r, "\Delta"] & A_S \arrow[r, "\pi"] \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \mathfrak{X} \arrow[r] \arrow[d, "\xi"] & 1 \quad (\text{exact}). \\
& A & & S \cong \mathbb{P}^1 &
\end{tikzcd}$$

ここに，π は canonical projection，pr_1，pr_2 は projections，ξ は pr_2 から自然に induce された写像である。ι を A の inversion とする。A 上の invertible sheaf L で次のような条件をみたすものをとる：

(2.2) (i) L は symmetric (即ち, $\iota^* L = L$).

(ii) $K(L) \cong \alpha_p \times \alpha_p$.

ただし, $x \in A$ による translation を T_x とし,

$$\begin{array}{rccc} \varphi_L : & A & \longrightarrow & \mathrm{Pic}^0(A) \\ & \Psi & & \Psi \\ & x & \longmapsto & T_x^* L \otimes L^{-1} \end{array}$$

によって準同型 φ_L を定義するとき, $K(L) = \mathrm{Ker}\,\varphi_L$ である。このような L の存在は Moret-Bailly [3] に示されている。A_S 上の invertible sheaf $pr_1^*(L)$ を考えれば, 条件 (2.2) から Mumford の descent theory が使えて (Moret-Bailly [3], Mumford [4]) $\mathcal{X}$ 上の invertible sheaf M で

$$pr_1^*(L) = \pi^*(M)$$

となるものが存在する。また, 我々の構成法によって

$$\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(D) \cong M \otimes f^* \mathcal{O}_S((p-1)/2)$$

となるような effective な relative divisor D が $\mathcal{X}$ 上に存在することがわかる。Moret-Bailly [3] に示されているように, D は non-singular irreducible 曲面で,

$$f|_D : D \longrightarrow S$$

は (かならずしも irreducible ではない) 種数 2 の曲線の族になる。$\pi^{-1}(D) = D'$ とおけば,

$$\mathcal{O}_{A_S}(D') = pr_1^* L \otimes pr_2^* \mathcal{O}_S((p-1)/2)$$

となり, 従って容易にわかるように

(2.3) $$\deg(pr_1|_{D'}) = (p-1)/2$$

となる。以上の結果について詳しくは Moret-Bailly [3] 参照。

我々はこの構成によって次のような diagram を得る：

(2.4)
$$\begin{tikzcd}
A_S \arrow[rr, "\pi"] \arrow[d, "pr_1"'] & & \mathcal{X} \arrow[rr, "\pi'"] & & A_S \arrow[d, "pr_1"] \\
& D' \arrow[ul, hook] \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "pr_1|_{D'}"] & D \arrow[u, hook] \arrow[urr, "g'"] & & \\
A \arrow[rrrr, "F"'] & & & & A
\end{tikzcd}$$

ここに F は A の Frobenius morphism, $\pi' \circ \pi = F \times id_S$ (id_S は S の恒等写像), g, g' はそれぞれ π, π' によって induce された写像である。g は purely inseparable morphism で次数 p, F は purely inseparable morphism で次数 p^2 であるから, $f' = pr_1 \circ g'$ とおけば, (2.3) (2.4) により,

(2.5) f' の inseparable degree は p で, separable degree は $(p-1)/2$ である。アーベル曲面の inversions と π, π', F, pr_1 は可換で, かつ作り方から D は $\mathcal{X}$ の inversion で不変であるから, $\mathcal{X}$ の inversion $\tilde{\iota}$ は $D \longrightarrow S$ の fibre に種数2の曲線の involution として作用する。よって,

$$\begin{tikzcd}
& D/\langle \tilde{\iota} \rangle \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "f"] & \\
S & & A/\langle \iota \rangle
\end{tikzcd}$$

なる diagram を得る。ただし, f, h はそれぞれ f', $\xi|_D$ から induce された写像である。h の general fibre は $\mathbb{P}^1$ と

なり，$S \cong \mathbb{P}^1$ であるから $D/\langle \tilde{\iota} \rangle$ は有理曲面と birational になる。従って，$A/\langle \iota \rangle$ の minimal resolution である $\mathrm{Km}(A)$ は単有理曲面になる。一般の supersingular アーベル曲面 B に対しては，$A \longrightarrow B$ なる isogeny が存在するから，Shioda [8] のように generically surjective な有理写像 $\mathrm{Km}(A) \longrightarrow \mathrm{Km}(B)$ をうる。従って $\mathrm{Km}(B)$ の単有理性は、$\mathrm{Km}(A)$ の単有理性から従う。逆は Shioda [8] のように，一般のアーベル曲面 A に対して

$$\rho(A) + 16 = \rho(\mathrm{Km}(A))$$

が成立することを用い，

$\mathrm{Km}(A)$ が単有理曲面 $\Rightarrow$ $\mathrm{Km}(A)$ が supersingular (Shioda [6])
$\Rightarrow \rho(\mathrm{Km}(A)) = 22$
$\Rightarrow \rho(A) = 6$
$\Rightarrow A$ は supersingular アーベル曲面

となる。または，次の一般的な補題を用いてもよい。

補題 9．$p \geq 7$ とする。A をアーベル曲面，G を $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(A)$ の有限部分群で $\mathrm{Km}(A, G)$ が一般化された Kummer 曲面になるようなものとする。そのとき，A が supersingular になることと $\mathrm{Km}(A, G)$ が supersingular になることは同値である。

証明には formal Brauer 群の理論を用いる。詳細は

ここでは省略する（Katsura [2] 参照）。

また，(2.5) から

f の inseparable degree p, separable degree $(p-1)/2$

となる。よって $Km(A)$ の函数体 $k(Km(A))$ の函数体 $k(D/\langle\iota\rangle)$ における separable closure を函数体にもつような代数曲面を Y とすれば，Y は $Km(A)$ 上 separable で，その次数は $(p-1)/2$ かつ Y は Zariski 曲面になる。これで定理1 ii) は示された。とくに $p=3$ のときには $(p-1)/2=1$ であるから $Km(A)$ 自身が Zariski 曲面になり，このときには定理1 i) も示されたことになる。

References

[1] A. Fujiki, On finite automorphism groups of complex tori of dimension 2, to appear.

[2] T. Katsura, Generalized Kummer surfaces and their unirationality in characteristic p, in preparation.

[3] L. Moret-Bailly, Familles de courbes et de variétés abéliennes sur $\mathbb{P}^1$, Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux (L. Szpiro, ed.) Soc. Math. France, Astérisque, 86 (1981), Exp. 7, 109-124 and Exp. 8, 125-140.

[4] D. Mumford, Abelian varieties, Interscience-Wiley, New York, 1959.

[5] A. N. Rudakov and I. R. Shafarevich, Supersingular K3

surfaces over fields of characteristic 2, Math. USSR-Izv., 13 (1979),147-165.

[6] T. Shioda, Algebraic cycles on certain K3 surfaces in characteristic p, Proc. Int. Conf. on Manifolds (Tokyo, 1973), (1975), 357-364.

[7] T. Shioda, An example of unirational surfaces in characteristic p, Math. Ann., 211 (1974), 233-236.

[8] T. Shioda, Some results on unirationality of algebraic surfaces, Math. Ann., 230 (1977), 153-168.

[9] T. Shioda, Supersingular K3 surfaces, in Algebraic Geometry, Proc. Copenhagen 1978 (K. Lønsted, ed.), Lecture Notes in Math. 732, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag (1979), 564-591.

[10] O. Zariski, On Castelnuovo's criterion of rationality $p_a = P_2 = 0$ of an algebraic surface, Illinois J. Math., 2 (1958), 303-315.