代数幾何学シンポジウム記録
1985年度 pp.1-5

FINITENESS OF NUMBERS OF CURVES ON A SURFACE

名古屋大学　　浪川　幸彦

問題　Sを複素解析曲面（コンパクト、連結）とする。曲面上の曲線（既約かつ被約な因子）Cに対し、その（算術）種数 $g(C)$ を $C(C+K)/2+1$ （KはSの標準因子）で定義する。$g \geqq 0$ を決めた時、$g = g(C)$ となる曲線はどの位あるか？　より正確には種数gの曲線の代数族はどの位あるか？

注意。　$\varkappa(S) \geqq 0$ なら $g=0$ の時、つまり非特異有理曲線は動かないので、その数そのものを問うことになる。

曲面論の応用として調べてみると、答えは次のようになる。

答（主定理）　Sを極小と仮定する。Sの小平次元を $\varkappa(S)$ 、不正則数を $q(S)$ で表わす。このとき：

$\varkappa=\varkappa(S)$	$q=q(S)$	$g=0$	$g>0$
$\varkappa=2$		有限個	有限個
$\varkappa=1$	$q=0$	?	?
	$q>0$	有限個	?
$\varkappa=0$	$q=0$	Aut(S)を法として有限個	
	$q>0$	なし	同上
$\varkappa=-\infty$		有限個	有限個

面白いのは有限性の成立する理由が各々の場合で全く異なる（ほぼ３種類にまとめられる）ことである。

唯一未解決な $\varkappa=1$ の場合、無限個ある例は作れるが、Aut(S)を法としてもなお無限になる場合があるか否かが分からない。

Sが極小でないと有限性は必ずしも成立しない。（$\varkappa=2$ でどうなるかは不明。）

例。　$\varkappa=-\infty$. $\mathbb{P}^2$ の９点 blow-up Sは無限個の第一種例外曲線（非特異有理曲線）を含むが、そのAut(S)は一般には（９点の位置が一般なら）自明である。

$\varkappa = 0$. K３曲面、Enriques曲面でやはり非特異有理曲線を無限個含むものがある。それらの曲面を一般の位置にある点で一回 blow-upすれば、その曲面の自己同型群は自明になる。

以下で証明のスケッチを与える。曲面論についての基本的事実は断わりなしに用いる（［1］参照）。

Step 1) Ｓが非代数的な場合。a(S)をＳの代数次元とする。

１．１）$a(S) = 0$　Ｓ上には曲線そのものが有限個しかない（小平）。しかも$g(C) \leq 1$でさらに詳しいことも分かる：

$q(S) = 2$	トーラス	曲線を含まない
$q(S) = 1$	VII_0型	→本号での中村氏の講演または［３］
$q(S) = 0$	Ｋ３曲面	たかだか有限個の非特異有理曲線のみ

１．２）$a(S) = 1$　Ｓは楕円曲面で、すべての曲線はそのファイバーの既約成分。よってＳには１個の種数１の族とたかだか有限個の非特異有理曲線とがあるのみ。

Step 2) 問題をコホモロジーの言葉に翻訳する。以下Ｓは代数曲面としてよい。

ＣをS上の曲線とするとき、そのコホモロジー類 $c = (C) \in H^2(S, \mathbb{Z})$. $= H^2(S, \mathbb{Z})$／ねじれ群　を考える。$k = -c_1(S) \in H^2(S, \mathbb{Z})$.をＳの標準因子コホモロジー類とする。$H^2(S, \mathbb{Z})$. は自然な双線形形式を持つ。

さてＳ上種数ｇの曲線の代数族が（Aut(S)を法として）有限個であることは、集合

$$E(g) = \{c \in H^2(S, \mathbb{Z}).; c^2 + kc = 2g-2,\ c = (C)\}$$

が（または E(g)/Aut(S)が）有限集合であることと同値である。

Step 3)（第Ｉ類）　$\varkappa = 2$の場合（宮岡－梅津）

次のより強い定理がある。

<u>定理１</u>（宮岡－梅津［２］）　Ｓを$\varkappa(S) \geq 0$なる曲面とし、非負整数ｇを定める。このときＳとｇのみによって定まる整数Ｎがあって、任意のＳ上の曲線Ｃでその幾何種数がｇのものに対しＣＫ＜Ｎとなる。

この定理は宮岡の不等式の弱い一般化に当たる。宮岡の不等式は、$\varkappa(S) \geq 0$かつＣが非特異なら

$$3c_2(\Omega_S^1(\log C)) \geq c_1^2(\Omega_S^1(\log C))$$

をいうが、これは

$$KC \leq 3c_2(S) - c_1^2(S) + 4(g(C) - 1)$$

と同値である。

宮岡－梅津の定理から有限性はただちに導かれる。すなわち、Ｓが極小ゆえＫは nef でＫＣ≧０。よってＫＣ、従ってC^2 も有界。一方 $k = (K) \in H^2(S, \mathbb{Z})$.を考えるとき、$k^2 > 0$だから、 Hodgeの指数定理により $k^{\perp} \cap H^{1,1}$ は負定値。さて $c = (C)$ を $c = \alpha k + b, \alpha \in \mathbb{Q}, b \in k^{\perp} \otimes \mathbb{Q}$, と分解すると $\alpha = kc/k^2$ ($\geqq 0$)は有界、よって $b^2 = c^2 - \alpha^2 k^2$ も有界で、$k^2 b \in k^{\perp}$ だからその負定値性により、このようなｂは有限個。

Step 4) $\kappa = 1,\ q > 0,\ g = 0$. $S \to \mathrm{Alb}(S)$を考えれば、非特異有理曲線はそのファイバーにしか入れない。

Step 5) (第Ⅱ類) $\kappa = 0$, Ｓ：Ｋ３曲面(Looijenga-Sterk［５］)

いくつか記号を準備する。

$H = H^2(S, \mathbb{Z})$, $H_{\mathbb{Q}} = H \otimes \mathbb{Q}$ 同様に $H_{\mathbb{R}}$, $H_{\mathbb{C}}$ を定義。 Hodge分解 $H_{\mathbb{C}} = H^{2,0} \oplus H^{1,1} \oplus H^{0,2}$ がある。

$H^{1,1}_{\mathbb{R}} = H^{1,1} \cap H_{\mathbb{R}}$ 上二次形式は符号数（１，１９）。この中で $V = \{x \in H^{1,1}_{\mathbb{R}} ; x^2 > 0\}$ は二つの凸錐 V^+ と V^- の和（豊富な因子を含む方を V^+ とする）。一方 $P = \{(C) \in H$; C はＳ上の非特異有理曲線$\}$ とする ($c^2 = -2$ に注意)。$\delta \in P$ に対し反射 (reflection) $s_{\delta} : x \to x + (x.\delta)\ \delta$ が定まり、これは Hodge分解を保つ。これらが生成する $O(H)$ の部分群をＳのWeyl群と呼ぶ。Wは V^+ 上に離散的に作用し、$K = \{x \in V^+$ ；すべての $\delta \in P$ に対し $(x.\delta) > 0\}$ がその作用の基本領域となる。ＫはまたＳ上のKähler 計量類の全体とも一致するので、ＳのKähler錐と呼ばれる。

Néron-Severi群 $H^{1,1}_{\mathbb{Z}} = H^{1,1} \cap H$ 上二次形式は非退化で符号数（１，ρ－１）（ρ = rank $H^{1,1}_{\mathbb{Z}}$,Ｓのピカール数）を持つ。$T = (H^{1,1}_{\mathbb{Z}})^{\perp}$ （Ｈ内で）とする。

$O(H)$の部分群 $G = \{\sigma \in O(H) ;\ \sigma_{\mathbb{C}}(H^{2,0}) = H^{2,0}\}$ およびその部分群 $G_{\circ} = \{\sigma \in O(H) ;\ \sigma_{\mathbb{C}} | H^{2,0} = id\} = \{\sigma \in O(H) ; \sigma | T = id\}$ を考える。

命題１ (Nikulin)　$G/G_{\circ}$は有限巡回群。

$A = \mathrm{Im}(\mathrm{Aut}(S) \to O(H))$とすれば明らかに $A \subset G$。$A_{\circ} = A \cap G_{\circ}$ とおく。

定理２ (大域的 Torelli定理の系)　i) $G = A \ltimes (W \times \{\pm 1\})$, $G_{\circ} = A_{\circ} \ltimes W$
ii) 自然に $G_{\circ} < O(H^{1,1}_{\mathbb{Z}})$ と見られるが、$G_{\circ}$は $O(H^{1,1}_{\mathbb{Z}})$内で指数有限。

さて主定理の証明に移ろう。

ＣをＳ上の曲線とすれば（Ｋ＝０）だから $c^2 = 2g-2$である。

$g > 1$ つまり $c^2 > 0$ なら $(C) \in \overline{K} \cap V^+$

$g = 1$ つまり $c^2 = 0$ なら $(C) \in \overline{K} \cap (\overline{V}^+ - V^+)$.

証明に使う基本的事実は二次形式論で良く知られた次の定理である。

定理３　Mを lattice（非退化二次形式を持つ有限生成自由アーベル群）とする。整数nに対し、長さnの原始元（$a = kb$, $b \in M$, $k \neq 1 \in \mathbb{N}$ の形に書けないもの）の $O(M)$ を法とする類は有限個である。

明らかに $O(M)$ をその指数有限な部分群で置き換えてもよい。またn≠0なら原始元という制限をはずしてもよい。

$M = H^{1,1}_{\mathbb{Z}}$ および $G.$ に対して上の定理を適用する。Kが群Wの基本領域であることを思い出せば、定理２と合わせて、n＞0のとき、

$$\{(C); C^2 = n,\ C\ \text{既約}\}/\mathrm{Aut}(S)$$

が有限集合であることが知られる。n＝0の場合は次の命題から同様にして分かる。

命題２（Saint-Donat）S上の非特異楕円曲線のコホモロジー類は原始的である。

g＝0の場合はもう少し詳しい、次の幾何的および群論的事実から従う。

命題３　$\delta \in H^{1,1}_{\mathbb{Z}}$, $\delta^2 = -2$, とする。ある非特異有理曲線Cに対し、$\delta = \pm(C)$ となるための必要十分条件は、$H(\delta) = \{x \in H^{1,1}_{\mathbb{R}}\ ;\ x\delta = 0\}$ がKの余次元１の面となることである。

命題４　$M = H^{1,1}_{\mathbb{Z}}$, $V^+_{\cdot} = V^+ \cap M_{\mathbb{R}}$ とする。$V^+_{\cdot}$ への $O(M)$ の作用の基本領域として余次元１の面が有限個であるものがしかも $K \cap M_{\mathbb{R}}$ 内に取れる。

詳しい証明は読者にまかせる（［５］参照）。

$q = 0$ のもう一つの類 Enriques 曲面でも全く同じ形の証明が（$H^{1,1}_{\mathbb{Z}} = H^2(S, \mathbb{Z}).$ として）成立する（詳しくは［４］Theorem 6.5 参照）。

$q = 2$ 、アーベル曲面のときも同様。$W = \{1\}$ となるだけやさしい。

Step 6)　（第Ⅲ類）　$\varkappa = 0$, $q = 1$. Sは超楕円曲面。

このときは $b_2 = 2$ で、$H^2(S, \mathbb{Z}). = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$（双曲平面）となる。

しかもSは２個の楕円曲線の直積を不分岐被覆として持つことから、$H^2(S, \mathbb{Q})$ の基底として２個の楕円曲線 E_1, E_2 が取れ、それに対する交叉行列は $\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ となる。

したがって任意の曲線（$\neq E_1$, E_2）は

$$C = \alpha E\ + \beta E\ ,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha,\ \beta \text{の分母} \leqq a$$

と書ける。$C^2 = 2\alpha\beta a$ だから、C が有界なら、αもβも有界で、したがってこのようなCは有限個しかない。

Step 7)　$\varkappa = 0$, $q > 0$, $g = 0$

小平の分類論から、$\varkappa = 0$, $q > 0$の曲面Sはすべてその普遍被覆が$\mathbb{C}^2$ であることが分かっている。したがってSは非特異有理曲線を含まない。

Step 8) $\kappa = -\infty$, $q = 0$. $S = \mathbf{P}$.

Hを射影直線とするとき、任意の曲線は $(C) = d(H)$ と書ける。$K = -3(H)$ だから、$C(C + K) = d(d-3)$ で、この値が定まればそれを満たすdはたかだか2個（実はd＞0だから、g＞0なら1個）。

Step 9)（第Ⅲ類） $\kappa = -\infty$, $q = 0$. $S = \Sigma_n$ (Hirzebruch 曲面) $(n \neq 1)$

Fを線織面としてのファイバー、Bを $B^2 = -n$ となる（唯一の）切断とすると、$H^2(S, \mathbb{Z})$ はこれらで生成され、その二次形式は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & n \end{pmatrix}$ となる（$\simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ （n偶数）、$\langle 1\rangle \perp \langle -1\rangle$ （n奇数））。特に $K = -(n+2)F - 2B$ となる。

$H^2(S, \mathbb{Z})$ の基底として、｛F，B｝の双対基底｛F，nF＋B｝をとる。任意の曲線C（≠F、B）は

$$C = \alpha F + \beta(nF + B)$$

と書けるが、定義から $\alpha \geqq 0$，$\beta > 0$ である。しかも $\alpha = 0$ となるのはBの対向切断B' $(B'^2 = n)$ しかないから、$\alpha > 0$ としてよい。さて

$$C(C + K) = n\beta(\beta - 1) + 2(\alpha - 1)(\beta - 1) - 2$$

ゆえ、この数を決めたとき、それを満たす α，β は有限個しかない（α，β についての非負項の和に書けている）。

Step 10)（第Ⅲ類） $\kappa = -\infty$, $q > 0$. Sは不正則線織面。

この場合も $b_2 = 2$ で $H^2(S, \mathbb{Z}) \sim \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$ または $\langle 1\rangle \perp \langle -1\rangle$。Fを線織面のファイバー、Hをある豊富な因子とすれば、$H(S, \mathbb{Q})$ はこれらのコホモロジー類で生成される。任意の曲線C（≠F）は $FC > 0$, $HC > 0$ を満足することから、やや面倒にはなるが Step 9 と本質的に同様の推論によって、同じ $C(C + K)$ を持つCのコホモロジー類は有限個であることが分かる。ここで $K^2 = 8(1-q) \leqq 0$ を用いる。

参考文献

［1］Barth,W., Peters,Ch., van de Ven,A.:Compact complex surfaces, Springer, 1984

［2］Miyaoka,Y., Umezu,Y.:Boundedness of the curves of a fixed genus, preprint

［3］中村郁 :Non-Kähler複素曲面の分類、数学、第36巻、110-124, 1984

［4］Namikawa,Y.:Periods of Enriques surfaces, Math.Ann., Vol.270, 201-222, 1985

［5］Sterk,H.:Finiteness results for algebraic K3 surfaces, Math.Z., Vol.189, 507-513,1985