代数幾何学シンポジウム記録
1987年度 pp.231-260

Régulateurs Syntomiques

(Notes préliminaires)

Michel Gros, Université de Paris-Sud, Mathématique-Bât 425,
Unité associée au CNRS n° 752, F-91405 Orsay Cedex, France.

0-Introduction

Soient k un corps parfait de caractéristique $p > 0$ et W les vecteurs de Witt sur k. On sait, depuis les travaux de Fontaine, Messing et Kato ([17], [18]) que la cohomologie "syntomique" est une théorie satisfaisante, *dans certains cas*, pour les W-schémas. Le but de cet article est de construire une théorie des "régulateurs syntomiques" qui unifie, conjecturalement pour l'instant, un certain nombre de constructions précédentes ([4],-[5],[22],[24]).

Le théorème principal est le suivant:

Théorème 0.1. Si X est un W-schéma syntomique (cf. I.1.), il existe pour tout $i < p$ (voir cependant I Rem. 2.2) des flèches fonctorielles

$$(0.2) \quad c_{i,j} : K_j(X) \longrightarrow H^{2i-j}(X_n, s_n(i)_X) \qquad (X_n = X \times_W \mathbb{Z}/p^n)$$

qui, si X est supposé propre et lisse sur W s'insère dans un diagramme commutatif

$$
(0.3)\qquad
\begin{array}{ccc}
K_j(X) & \longrightarrow & H^{2i-j}(X_n, s_n(i)_X) \\
\downarrow & & \downarrow \\
K_j(X_K) & \longrightarrow & H^{2i-j}(X_K, Z/p^n(i))
\end{array}
$$

($X_K = X \times_W K$, $K = \mathrm{Frac}\,(W)$)

(la flèche verticale de droite étant celle construite par Fontaine-Messing dans [11]).
L'une des applications les plus immédiates de ce résultat est d'élucider complètement, à la lumière du travail de Kato([18]), la nature de certaines lois de reciprocité (dont celle de Vostokov pour le symbole "Norme résiduelle de Hilbert" d'une extension cyclotomique de Q_p) et, bien évidemment, de formuler des analogues p-adiques de certaines conjectures de Beilinson.

L'article est organisé de la manière suivante. Au premier chapitre, on rappelle la définition des faisceaux syntomiques $s_n(i)_X$ de Fontaine-Messing([11]) dans la présentation de Kato ([17]). Nous indiquons ensuite brièvement pourquoi la méthode standard de construction des classes de Chern en cohomologie de de Rham ou de Hodge est inopérante ici.

Nous employons donc une autre méthode, basée sur l'obtention de "classes universelles" ; ce qui nécessite le calcul de la cohomologie cristalline de $B.GL_n/W$. C'est l'objet du chapitre II : la démonstration est due à Deligne et, quoique déjà ancienne, semble n'avoir jamais été publiée (elle diffère de celle de [7] dans son principe).

Ces résultats nous permettent, dans le chapitre III, de définir les classes de Chern universelles en cohomologie syntomique et par suite, les flèches (0.2). On en déduit les régulateurs (= caractère de Chern) par la méthode habituelle. A titre d'exemple, on decrit $c_{1,1}$ dans le cas $X = \mathrm{Spec}(R)$, R une W-algèbre locale, ce qui permet de donner une description du cobord $\partial : R^* \longrightarrow H^1(R, Z/p^n(1))$ attaché à la suite exacte de Kummer.

Le dernier chapitre est consacré aux applications. Les flèches (0.2) nous servent tout d'abord à prouver une conjecture de Schneider ([21]) sur l'existence de certaines flèches. Nous signalons ensuite comment utiliser (0.2) pour reformuler certains résultats de Kato ([18]). Dans le troisième paragraphe, nous calculons (cf. à ce sujet la remarque 3.11) la K-théorie à coefficients dans Q_p de degré impair d'un anneau d'entiers O_L de corps p-adique L :

(0.4) $$K_{2m+1}(O_L, Q_p) \simeq L \quad (m \geqslant 1)$$

Les derniers chapitres, enfin, sont consacrés à l'énoncé et à la discussion de conjectures sur les valeurs de fonctions L p-adiques attachées aux corps cyclotomiques ou aux courbes elliptiques qui sont parallèles à celles de Beilinson pour le cas transcendant.

Je tiens tout particulièrement à remercier L. Illusie de qui j'ai appris l'argument de Deligne, indispensable dans ce travail et qui m'a aidé tout au long du travail. Je remercie également J.-L. Colliot-Thélène et C. Soulé pour les discussions que nous avons eu sur le sujet. Je remercie enfin K. Kato de m'avoir communiqué certaines de ses notes, de m'avoir aidé à comprendre le lien avec son travail ; et aussi pour l'indicible gentillesse de son acceuil à l'Université de Tokyo qui a rendu possible la rédaction de ce travail.

Plan

0. Introduction

I. Préliminaires

1. Faisceaux syntomiques
2. Rappel de la méthode de Grothendieck-Remarques

II. Calcul de la cohomologie cristalline de $B.GL_n$

1. Enoncé du théorème
2. Cohomologie des variétés de Stiefel et des grassmaniennes
3. Cohomologie de Hodge de $B.GL_n/W$

III Classes de Chern syntomiques

1. Classes de Chern universelles
2. Classes de Chern d'un O_X-Module localement libre de type fini
3. Classes de Chern supérieures
4. Caractère de Chern - Régulateurs
5. Exemple : calcul de $c_{1,1}$

IV. Applications

1. Régulateurs de P. Schneider
2. Lois de réciprocité
3. K-théorie à coefficient des anneaux d'entiers de corps p-adique
4. Valeurs de fonctions L p-adique des corps cyclotomiques
5. Valeurs de fonctions L p-adique des courbes elliptiques

Bibliographie

Notations : Si k est un corps, $\bar{k}$ désigne sa clôture algébrique.

Q_p désigne le corps des fonctions de l'anneau des entiers p-adiques Z_p. C_p désigne le completé de $\bar{Q}_p$.

Si R est un anneau, R^* désigne le groupe multiplicatif de ses éléments inversibles.

Pour toute extension de corps $k \hookrightarrow k'$ et tout k-schéma X, $X_{k'}$ désigne le schéma $X \times_k k'$.

Si A est un complexe d'une catégorie abélienne, A^r désigne le complexe $(0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A^r \longrightarrow A^{r+1} \longrightarrow \cdots)$

Pour tout k-schéma noetherien X intègre, $k(X)$ désigne son corps de fonctions $K_j(X)$, (resp $K_j^M(X)$) désigne le j-iéme groupe de K-théorie de Quillen (resp. de Milnor).

I. Préliminaires

1. Faisceaux syntomiques.

Soient k un corps parfait de caractéristique $p > 0$ et W l'anneau des vecteurs de Witt de k.

Un W-schéma est dit syntomique (cf. [11], II. 1.1) s'il est plat et d'intersection complète (i.e. il existe localement sur X une immersion fermée réguliere de X dans un W-schéma lisse Z).

Dans toute la suite, nous supposerons que X est quasi-projectif (ou a composantes quasi-projectives lorsqu'il s'agit de schémas simpliciaux) afin d'alléger un peu certaines definitions.

Nous renvoyons à [11], et à [17], Remark 1.8 pour le cas général.

La définition de $s_n(i)_X$, $(i < p)$ est due à Fontaine-Messing ([11]) (il n'est pas nécessaire de supposer X quasi-projectif) et utilise un formalisme cristallin assez important. Nous allons donner la "réalisation" de cette définition grâce à des complexes de formes différentielles comme l'a fait Kato dans [17].

Comme dans [17], I. Def. (1,2), nous dirons qu'un morphisme de W-schémas $f : T \longrightarrow T$ est un frobenius de T si $f \otimes Z/p : T_1 \longrightarrow T_1$ est le frobenius absolu induit par $O_{T_1} \longrightarrow O_{T_1}$; $t \longrightarrow t^p$ et si le diagramme

(1.0)
$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(W) & \xrightarrow{\sigma} & \mathrm{Spec}(W) \end{array}$$

est commutatif. (σ étant induit par le Frobenius de k)

Soit donc X un W-schéma syntomique (quasi-projectif) et $i : X \hookrightarrow Z$ une immersion fermée réguliere dans un W-schéma lisse Z muni d'un frobenius. L'existence de (Z, i, f) se déduit du fait que l'espace projectif a un frobenius. Soit $D = D_X(Z)$ l'envellope à puissances divisées relativement à la structure canonique de puissances divisées de pW W. Soit J l'ideal de O_D définissant X. Notons $J^{[r]}$ sa r-ième puissance divisée $(r \geq 0)$(*). On considère alors le complexe de faisceux étales sur X

$$(1.1) \quad J^{[r]}_{X,Z} : \underset{(\deg 0)}{J^{[r]}} \xrightarrow{d} J^{[r-1]} \otimes_{O_Z} \Omega^1_Z \xrightarrow{d} J^{[r-2]} \otimes_{O_Z} \Omega^2_Z \longrightarrow \cdots$$

On vérifie comme dans [17], I. Lemma (1.3) que pour $0 \leq r < p$,

(*) si $r = 0$, on pose $J^{[0]} = O_D$

on a $f(J^{[r]}_{X,Z}) \subset p^r J^{[0]}_{X,Z}$.

Ceci permet de définir, lorsque, $0 \leqslant r < p$, l'objet suivant dans la catégorie dérivée des Z/p^n-Modules sur $X_n (= X \times_W Z/p^n)$

$$(1.2) \qquad s_n(i)_{X,Z} = \text{Cône}(1 - p^{-r}f : J^{[r]}_{X,Z} \longrightarrow J^{[0]}_{X,Z})) \quad [-1] \otimes^L Z/p^n$$

Cet objet de $D((X_n)_{et}, Z/p^n - \text{Mod})$ est en fait indépendant de Z, comme il résulte de la théorie de la cohomologie cristalline. Nous omettrons donc la lettre Z dans la suite, notant $s_n(i)_X$. Comme expliqué dans [17], chap. I, §2, on a une structure de produit

$$(1.3) \qquad s_n(i)_X \times s_n(j)_X \longrightarrow s_n(i+j)_X \quad \text{pour} \quad i+j < p.$$

<u>Remarque</u> 1.4. On pourrait, sans restriction sur r par rapport à p définir $s_n(i)_X$ en considérant $f-p^r$ plutôt que $1-p^{-r}f$ (la limite projective suivant n des cohomologies de ces deux objets est la même modulo torsion) ; nous ne le ferons pas, car d'une part la cohomologie de l'objet ainsi obtenu ne vérifie apparemment pas le théorème de structure auquel on s'attend pour la cohomologie d'un fibré projectif ; d'autre part, plusieurs résultats ([17], Ch I, 4.3 ; Ch II, 4.3, 4.4) laissent à penser que le type de considération présenté ici n'est satisfaisant que pour $r < p$. Nous travaillerons donc, sauf exception avec la définition 1.2 laissant au lecteur le soin de verifier que la plupart de nos résultats restent vrais avec cette autre definition.

2-Rappel de la méthode de Grothendieck-Remarques

Soient X un W-schéma lisse et E un O_X-Module localement libre *de type fini de rang* $r+1$ $(r \geqslant -1)$. *La* méthode standard due à Grothendieck (cf [14]) pour définir des classes de Chern, par exemple en cohomologie de de Rham, est la suivante. On établit un théorème de structure pour la cohomologie du fibré projectif $g : P = \mathbb{P}(E) \longrightarrow X$ associé à E :

$$(2.1) \quad \mathrm{adj} \circ Rg_* \left(\bigoplus_{i=0}^{r} c_1(O_P(1))^i \right) : \bigoplus_{i=0}^{r} \Omega_{X/W}[-2i] \xrightarrow{\sim} Rg_* \Omega_{P/W}$$

$(c_1 : \mathrm{Pic}\ P \longrightarrow H^2_{DR}(P/W)$ est induit par $\mathrm{dlog}\ O_P^* \longrightarrow \Omega^1_P[1])$

Les classes $c_i(E) \in H^{2i}_{DR}(X/W)$ sont simplement les composantes de $c_1(O_P(1))^{r+1} \in H^{2(r+1)}_{DR}(P/W)$ via l'isomorphisme induit en cohomologie par *(2.1) (cf [14] pour les détails).*

Remarque 2.2 On peut étendre cette construction au cas du schéma simplicial $B.GL_n/W$ comme expliqué par Gillet dans [12], Thm. 2.2 pour les obtenir des classes de Chern universelles $C_i \in H^{2i}_{DR}(B.GL_n/W)$ (resp. $H^{2i}(B.GL_n, \Omega^{i}_{B.GL_n/W})$) (On prendra garde au fait que la définition de c_1 requiert un peu plus de soin que *précédemment : cf. Déf. 2.3 p218 de [12])* : il suffit d'appliquer le formalisme dévellopé par Grothendieck au fibré universel de rang n sur $B.GL_n/W$.

Si l'on essaye ici d'appliquer cette méthode, la difficulté à laquelle on se heurte est que l'on est amené à considérer des objets qui *ne sont pas définis. Lorsque,* $r+1 = p$, on voudrait regarder la décomposition d'un élément se trouvant dans

$H^{2p}(P_n, s_n(p)_p)$, or $s_n(p)_p$ n'est pas défini. On ne gagne, d'autre part, rien en travaillant avec $f-p^r$ au lieu de $1-p^{-r}f$ car on voit rapidement que l'obtention d'un théoremè de structure s'avère improbable.

II-Calcul de la cohomologie cristalline de $B.GL_n$.

Les arguments de chapitre sont dus à P. Deligne. Nous les avons appris de L. Illusie (cf [15],[16]).

1. Enoncé du théorème.

Soient n un entier, G le schéma en groupes GL_n sur Spec(W) et B. le schéma simplical "classifiant". (cf[7] pour ce formalisme) On note O^n le module libre de rang n sur B.

Théorème 1.1. On a un isomorphisme canonique d'algébres graduées

$$W[x_1, \text{—}, x_n] \xrightarrow{\sim} H^*_{cris}(B./W)$$

$$x_i \longmapsto c_i(O^n \text{ avec action triviale de } GL_n)$$

(x_i étant de poids $2i$)

B. étant à composantes lisses, il suffit de démontrer le

Théorème 1.2. On a un isomorphisme d'algèbres graduées

$$W[x_1, \text{—}, x_n] \xrightarrow{\sim} H^*_{DR}(B./W)$$

(mêmes définition et convention que dans 1.1)

Remarque 1.3. Nous avons calculer $H^*_{cris}(B./W)$. Le lecteur vérifiera que l'on obtient le même type de résultat avec $H^*_{cris}(B./W_m)$ $(m \geqslant 1)$.

2. Cohomologie des varietés de Stiefel et des grassmanniennes.

Soit $N \geqslant n$ un entier arbitraire. On note $V(n, N)$ la varieté de Stiefel des applications injectives de O^n dans O^N. GL_n opère sur $V(n, N)$ et son quotient est la grassmannienne Grass (n, N) des sous-espaces de dimension n de O^N. La cohomologie (de De Rham) de Grass (n, N) peut se calculer comme cohomologie équivariante de $V(n, N)$, c'est à dire comme cohomologie du schéma simplicial

(2.1) $\quad V.(n, N) = (\ldots . \; GL_n \times V(n, N) \rightrightarrows V(n, N))$

(nerf de GL_n agissant sur $V(n, N)$)

i.e.

(2.2) $\quad H^*_{DR}(\mathrm{Grass}(n, N)) \simeq H^*_{DR}(V.(n, N)/W)$

On remarque alors que l'on a un diagramme commutatif

(2.3)
$$\begin{tikzcd}
 & H^*_{DR}(\mathrm{Grass}(n, N)/W) \arrow[r] & H^*_{DR}(V.(n, N)/W) \\
c_i(\text{fibré canonique}) & & \\
x_i \arrow[u, mapsto] & W[x_1, \text{—}, x_n] \arrow[uu] \arrow[r] & H^*_{DR}(B.\, GL_n) \arrow[uu, "\pi^*"']
\end{tikzcd}$$

$\pi : V.\,(n, N) \longrightarrow B.GL_n$ étant la projection canonique.

La structure de la cohomologie d'un fibré projectif implique que la flèche de gauche est un isomorphisme pour $i < N - n$. Il suffit donc de voir que π^* est injective en degré $i < N - n$. Soit $W(n, N)$ la varieté de toutes les applications (injectives ou non) de O^n dans O^N. On a une inclusion $V(n, N) \hookrightarrow W(n, N)$

qui est équivariante pour l'action canonique de GL_n : d'ou un morphisme de schémas simpliciaux

(2.4)
$$\begin{tikzcd} V.(n, N) \arrow[rr] \arrow[dr] & & W.(n, N) \arrow[dl] \\ & B.GL_n & \end{tikzcd}$$

qui induit

(2.5)
$$\begin{tikzcd} H^*_{DR}(V.(n, N)) & & H^*_{DR}(W.(n, N)/W) \arrow[ll, "(*)"'] \\ & H^*_{DR}(B.GL_n/W) \arrow[ul, "\pi^*"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Soit alors U_i le sous schéma ouvert de $W(n, N)$ où la dimension du noyau est $\leqslant i$. On a $U_0 = V(n, N) \subset \ldots \subset U_n = W(n,N)$

Lemme 2.6. $U_i - U_{i-1}$ est de dimension $i(i - n + N)$.

Démonstration. La question est locale au voisinage de $x_0 \in W(n, N)$ tel que $\mathrm{Ker}\, f_{x_0} \otimes k(x_0)$ soit de rang i. On écrit au voisinage de x_0, $O^n = E_1 \oplus E_2$, $O^N = F_1 \oplus F_2$ avec $E_2 \otimes k(x_0) = \mathrm{Ker}\, f \otimes k(x_0)$, $F_1 \otimes k(x_0) = \mathrm{Im}\, f \otimes k(x_0)$ et f donné par une matrice

(2.7)
$$\begin{array}{cccc} & E_1 & E_2 & \\ f = & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} & \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \end{array} \end{array}$$

$a \otimes k(x_0)$ est un isomorphisme donc aussi a au voisinage de x_0 d'où

$$\operatorname{Ker} f = \{u = (u_1, u_2), \mid au_1 + bu_2 = 0, \quad cu_1 + du_2 = 0\}$$
$$\simeq \operatorname{Ker}(d - ca^{-1}b).$$

En d'autres termes, $U_i - U_{i-1}$ est le produit fibré de

(2.9)
$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Hom}(O^n, O^N) \arrow[d] & f \arrow[d, mapsto] \\ \operatorname{Spec} W \arrow[r, "0"'] & \operatorname{Hom}(E_2, F_2) & d-ca^{-1}b \end{tikzcd}$$

d'où la codimension.

Si $i > 0$, $i(i - n + N) \geqslant N - n + 1$ et un argument de profondeur montre que la flèche horizontale de (2.5) est un isomorphisme en degré $i < N - n$. La flèche oblique de droite est injective, cela ce voit en remarquant que l'on dispose de la section nulle $B.GL_n \to W.(n, N)$ qui est équivariante. Finalement π^* est injective en degré $i < N-n$. On fait ensuite tendre N vers l'infini.

Remarque 2.10. On peut montrer que $U_i - U_{i-1}$ est lisse sur W (l'application $f \longmapsto d - ca^{-1}b$ étant tangente à $f \longmapsto d$)

3. Cohomologie de Hodge de $B.GL_n/W$.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier le théorème suivant (même méthode que précédemment)

Théorème 3.1. Les homomorphismes (définis comme dans le théorème 1.1)

(3.2) $$W[x_1, \text{—}, x_n]_{[i]} \longrightarrow H^{2i}(B., \Omega^i_{B./W})$$

et

(3.3) $$W[x_1, \text{—}, x_n]_{[i,\infty[} \longrightarrow H^*(B., \Omega^{\geq i}_{B./W})$$

sont des isomorphismes pour tout $i \geqslant 0$

(x_j est de poids $2j$, $W[x_1, \text{—}, x_n]_{[i,\infty[}$ = groupe additif des polynômes de poids total $\geqslant i$, $W[x_n, \text{—}, x_n]_{[i]}$ = groupe additif des polynômes de poids total i).

On a également $H^j(B.,\, \Omega^i_{B./W}) = 0$ si $j \neq 2i$.

III. Classes de Chern syntomiques.

1. Classes de Chern universelles.

Soit $B.$ comme au chapitre II.

Théorème 1.1. On a des suites exactes pour tout $i < p$.

(1.2)

$$0 \longrightarrow H^{2i}(B._m, s_m(i)_{B.}) \longrightarrow H^{2i}(B._m, \Omega^{\geqslant i}_{B._m/W_m}) \xrightarrow[1-p^{-i}f]{} H^{2i}_{DR}(B._m/W_m) \longrightarrow 0$$

Démonstraction : Il suffit d'écrire la suite exacte longue de cohomologie provenant de la dèfinition de $s_n(i)_X$ et de remarquer grâce au théorème 1.1. du chapitre II que $B.$ n'a pas de cohomologie cristalline en degré impair.

Remarque 1.3. On prendra garde au fait dans (1.2) que $1-p^{-i}f$ ne provient pas d'un morphisme $\Omega^{\geqslant i}_{B._m/W_m} \longrightarrow \Omega^{\cdot}_{B._m/W_m}$. Il est utile ici d'avoir le frobenius "canonique" de [11] et d'utiliser le fait que $B.$ est à composantes lisses ($J^{[i]}_{X,Z} \simeq \Omega^{\geqslant i}_X$ pour X lisse). En particulier, les classes de Chern universelles $C_i \in H^{2i}(B._m, \Omega^{\geqslant i}_{B._m/W_m})$ fournissent des classes universelles $C_i \in H^{2i}(B._m, s_m(i)_{B.})$ car $f(C_i) = p^i C_i$ (utiliser le splitting principle pour se ramener au cas $i=1$) et donc $(1 - p^{-i}f)(C_i) = 0$.

2-Classes de Chern d'un O_X-Module localement libre de type fini.

Soient X un W-schéma syntomique et E un O_X-Module localement libre de type fini de rang n. E définit un mophisme $\tau : X \longrightarrow BGL_n$ (espace classifiant de GL_n) tel que E soit l'image inverse par τ du fibré universel de rang n sur BGL_n.

Définition 2.1. Soit $i < p$, $c_i(E) \in H^{2i}(X_m, s_m(i)_X)$ est par définition $\tau^* C_i$ où C_i est la classe universelle du paragraphe précédent.

Théorème 2.2. Il existe une unique théorie de classes de Chern qui a tout O_X-Module localement libre E associe des classes $c_i(E) \in H^{2i}(X_n, s_n(i)_X)$ $(i < p)$ telles que:

(i) Normalisation : si E est inversible, $c_0(E) = 1$ et $c_1(E)$ est la classe définie via la suite exacte de Kummer et l'isomorphisme $Z/p^n(1) \simeq s_n(1)_X$ de [11].

(ii) Fonctorialité : si $g : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de schémas syntomiques sur W et E un O_Y-Module localement libre de type fini, alors $c_i(h^*E) = h^* c_i(E)$ pour tout $i < p$.

(iii) Additivité ; Si $0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$ est une suite exacte de O_X-Modules localement libres de type fini, alors

$$c_i(F) = \sum_{j+\ell=i} c_j(E)c_\ell(G) \qquad (i < p).$$

Démonstration : C'est une conséquence immediate de la construction : les classes universelles vérifiant chacune de ces propritės (cf. [13] pour les détails).

Remarque 2.3. On peut tenir le même raisonnement avec $f-p^i$ dans (1.2) au lieu de $1-p^{-i}f$.

3. Classes de Chern supérieures.

Il suffit de paraphraser Gillet (cf.[12], p221 et suiv.) pour obtenir des morphismes (Y un sous-schéma fermé de X)

$$(3.1) \qquad c_{i,j} : K_j^Y(X) \longrightarrow H_Y^{2i-j}(X_n, s_n(i)_X)$$

puisque la seule chose dont on a besoin est l'existence des classes universelles $c_i \in H^{2i}(B._m, s_m(i)_{B.})$.

Remarque 3.2. Ceci répond à la question posée par Kato dans [17], Remark (3.4).

Rappelons que $c_{i,j}$ est obtenue par composition des morphismes (cf.[12] pour les notations)

$$(3.3) \quad K_j^Y(X) \longrightarrow H_Y^{-j}(X, Z \times Z_\infty B.GL(O_X)) \rightarrow H_Y^{-j}(X, Z_\infty B.\ GL(O_X)) \rightarrow H_Y^{-j}(X_n, Z_\infty \mathcal{K}(2i, s_n(i)_X) \xrightarrow{\simeq} H_Y^{2i-j}(X_n, s_n(i)_X)).$$

D'après Fontaine-Messing, (cf[11]) on peut construire un morphisme

$$(3.4) \qquad H^*(X_n, s_n(i)_X) \longrightarrow H^*_{et}(X_K, Z/p^n(i))$$

pour peu que X soit supposé propre et lisse.

Proposition 3.5. On a un diagramme commutatif ($i < p$)

$$(3.5) \qquad \begin{array}{ccc} K_j(X) & \longrightarrow & H^{2i-j}(X_n, s_n(i)_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_j(X_K) & \longrightarrow & H^{2i-j}(X_K, Z/p^n(i)) \end{array}$$

où la fleche horizontale inférieure est la flèche définie comme dans Gillet (cf.[12]).

Démonstration : Par construction, il suffit de voir la commutativité de

(3.6)
$$\begin{tikzcd} H^{-j}(X, Z_\infty B.GL(O_X)) \arrow[r, "\pi_j(Z_\infty c_i)"'] \arrow[d] & H^{2i-j}(X_n, s_n(i)_X) \arrow[d] \\ H^{-j}(X_K, Z\, B.GL(O_{X_K})) \arrow[r, "\pi_j(Z_\infty c_i)"'] & H^{2i-j}(X_K, Z/p^n(i)) \end{tikzcd}$$

et donc (les flèches horizontales étant induites par les classes universelles C_i) que l'image de $C_i \in H^{2i}(B.GL(O_X)_p, s_n(i))$ par (3.4)* est $C_i \in H^{2i}(B.GL(O_{X_K}), Z/p^n(i))$. C'est à dire (par définition ces classes) que la classe syntomique d'un fibré inversible s'envoie sur sa classe étale. Comme on a des inclusions

(3.8)
$$H^2(B.GL/W_n, s_n(i)) \hookrightarrow H^2(B.GL/W_n, \Omega^{\geqslant 1}_{B.GL/W_n}) \hookrightarrow H^2\ (B.GL/W_n)$$

la coincidence de la classe étale et de l'image de la classe cristalline résulte alors de [11], 6.3.

(*) Dans cette situation, (3.4) existe grâce au calcul direct des cohomologies (cf. Thm.1.1)

Remarque 3.9: Il est utile de pouvoir disposer de flèches $c_{i,j}$ avec une autre source que $K_j(X)$. Voici comment procéder. On remarque que l'on peut tensoriser la suite exacte (1.2) par $\mathbb{Q}_p$ (resp. $\overline{\mathbb{Q}}_p$, $\mathbb{C}_p$). Ceci permet d'obtenir des classes universelles dans $H^{2i}(B._{\mathbb{Q}_p}, s(i)_{B.} \otimes \mathbb{Q}_p)^*$ (resp. $H^{2i}(B._{\overline{\mathbb{Q}}_p}, s(i)_{B._{\overline{\mathbb{Q}}_p}})$, $H^{2i}(B._{\mathbb{C}_p}, S(i)_{B._{\mathbb{C}_p}})$).

On obtient, par suite, grâce à la construction de Gillet des flèches

(3.10) $\quad c_{i,j} : K_j(X_{\mathbb{Q}_p}) \longrightarrow H^{2i-j}(X, s(i)_X) \otimes \mathbb{Q}_p$,

(3.11) $\quad c_{i,j} : K_j(X_{\overline{\mathbb{Q}}_p}) \longrightarrow H^{2i-j}(X, s(i)_X) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_p$

(3.12) $\quad c_{i,j} : K_j(X_{\mathbb{C}_p}) \longrightarrow H^{2i-j}(X, s(i)_X) \otimes \mathbb{C}_p$

pour $i < p$.

4. Caractère de Chern. Régulateurs.

On suppose toujours $i < p$. On déduit facilement des flèches $c_{i,j}$, par l'utilisation des polynomes de Newton des morphismes $ch_{i,j}$ tels que, si l'on pose $ch = \sum_{i,j} ch_{i,j}$, on ait $ch(xy) = ch(x)ch(y)$.

Ce sont ces flèches $ch_{i,j} : K_j(X) \longrightarrow H^{2i-j}(X_n, s_n(i)_X)$ que nous appelerons régulateurs syntomiques.

---

* On a posé $H^*(X, s(i)_X) = \varprojlim_n H^*(X_n, s_n(i)_X)$

5. Exemple : calcul de $c_{1,1}$.

Proposition 5.1. Soit R une W-algèbre locale. Pour toute surjection $R' \twoheadrightarrow R$ de W-algèbres locales telle que $R'^* \twoheadrightarrow R^*$ et R' muni d'un frobenius, on a un diagramme commutatif

$$(5.2)\quad \begin{array}{ccc} K_1(R')=R'^* & \xrightarrow[c_{1,1}]{} & H^1(R'_n, s_n(1)_{R'}) = \left\{(x, y) \in R'_n \oplus \Omega^1_{R'_n} \;\middle|\; dx - (1-p^{-1}f)(y) = 0\right\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_1(R) = R^* & \xrightarrow[c_{1,1}]{} & H^1(R_n, s_n(1)_R) \end{array}$$

et la flèche horizontale supérieure est donnée par

$$\alpha \longmapsto \left(\frac{1}{p}\log\frac{\alpha^p}{f\alpha}\ ,\ \frac{d\alpha}{\alpha}\right)$$

Démonstration : Supposons $R' = W[T, T^{-1}]$ avec $f(T) = T^p$. Alors, le diagramme commutatif

$$(5.3)\quad \begin{array}{ccc} & & (\mathrm{Ker}\ d : R'_n \longrightarrow \Omega^1_{R'_n}) \\ & & \big\downarrow \\ K_1(R') & \longrightarrow & H^1(R'_n, s_n(1)_{R'}) \\ & \searrow & \big\downarrow \text{proj.can.} \\ & & \mathrm{Ker}(1-p^{-1}f : \Omega^1_{R'_n} \longrightarrow \Omega^1_{R'_n}/dR'_n) \end{array}$$

montre que forcément $c_{1,1}(T) = (\beta, \frac{dT}{T})$ avec $d\beta = 0$ i.e. $\beta \in W$ (la flèche oblique étant, par construction, $\alpha \longmapsto \frac{d\alpha}{\alpha}$, $K_1(R') \longrightarrow \Omega^1_{R'_n}$) D'autre part, $c_{1,1}$ étant fonctorielle, on peut faire subir la transformation $T \longmapsto T^n$ $(n > 0)$ pour voir que $\beta = 0$.

On peut alors, conclure simplement de la manière suivante, comme me l'a fait remarquer Kato. On considère le diagramme commutatif.

$$\begin{tikzcd} & R'[T,T^{-1}] \arrow[d] & W[T,T^{-1}] \arrow[l] \arrow[dl] \\ R' \arrow[ur] \arrow[r] & R & \end{tikzcd} \tag{5.4}$$

$$T \mapsto a, \quad b \mapsto a, \quad T \mapsto a, \quad b \longmapsto a$$

$a \in R^*$, $b \in R'^*$ (les flèches non définis explicitement sont les flèches canoniques).

On a, par définition de la cohomologie syntomique

$H^1(R_n, s_n(1)_{R,R'}) \simeq H^1(R_n, s_n(1)_{R,R'[T,T^{-1}]})$. (On a prolongé l'action de f sur $R'[T,T^{-1}]$ par $f(T) = T^p$).

On remarque alors que

$$(\tfrac{1}{p} \log \tfrac{b^p}{fb}, \tfrac{db}{b}) = (\tfrac{1}{p} \log \tfrac{T^p}{fT}, \tfrac{dT}{T}) = (0, \tfrac{dT}{T}) \text{ dans } H^1(R_n', s_n(1)_{R'}). \tag{5.5}$$

Mais comme cette dernière classe est $c_{1,1}(T)$, la proposition est démontrée puisque $c_{1,1}(a)$ est l'image de $c_{1,1}(T)$.

<u>Corollaire</u> 5.6. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & H^1(R', Z/p^n(1)) \arrow[d, leftrightarrow, "\wr"] \\ R'^* \arrow[ur, "\partial"] \arrow[r] & H^1(R_n', s_n(1)) \end{tikzcd} \tag{5.7}$$

pour toute W-algèbre locale R' muni d'un frobenius. (la·flèche verticale est l'isomorphisme de Fontaine-Messing ([11]), la flèche oblique descendante est donnée par $\alpha \longmapsto (\frac{1}{p}\log\frac{\alpha^p}{f\alpha}, \frac{d\alpha}{\alpha})$, ∂ est le cobord associé à la suite exacte de Kummer.

IV-Applications.

1-Régulateurs de P. Schneider.

Soit X un Z_p-schéma projectif et lisse. On va voir comment les constructions précédentes permettent de résoudre une des conjectures de P. Schneider ([21]).
La définition de $s_n(i)_X$ implique que l'on a suite exacte*

$$(1.1)\quad 0 \longrightarrow H_{DR}^{2i-j-1}(X/Z_p)/(p^{-i}f-1)F^i \longrightarrow H^{2i-j}(X,s(i)_X)) \longrightarrow H^{2i-j}(X, \Omega^{\geq i}_{X/Z_p})$$

avec $F^i = \mathrm{Im}(H^{2i-j-1}(X, \Omega^{\geq i}_{X/Z_p}) \longrightarrow H_{DR}^{2i-j-1}(X/Z_p))$

Théorème 1.2. Pour tout $j > 0$, les flèches $c_{i,j}$ induisent des flèches (notées encore $c_{i,j}$) $(i < p)$

$$(1.3)\quad c_{i,j} : K_j(X) \longrightarrow (H_{DR}^{2i-j-1}(X/Z_p)/(p^{-i}f-1)F^i) \otimes Q_p.$$

Démonstration : Il suffit de prouver que $K_j(X) \longrightarrow H^{2i-j}(X, \Omega^{\geq i}_X) \otimes Q_p$ est nulle. Cela va résulter de l'argument classique de Katz et Bloch rappelé dans [13], (p 232). On

---

* Même si X n'est pas muni d'un frobenius, on dispose de $1-p^{-i}f$ sur F^i (cf[11]).

factorise $K_j(X) \longrightarrow H^{2i-j}(X, \Omega_X^{\geq i}) \otimes \mathbb{Q}_p \hookrightarrow H_{DR}^{2i-j}(X/\mathbb{Z}_p) \otimes \mathbb{Q}_p \simeq$ $H_{cris}^{2i-j}(X_1/\mathbb{Z}_p) \otimes \mathbb{Q}_p$ par $K_j(X) \longrightarrow K_j(X_1) \longrightarrow H^{i-j}(X_1, W\Omega^i_{X_1,\log})$ $\otimes \mathbb{Q}_p \hookleftarrow H_{cris}^{2i-j}(X_1/\mathbb{Z}_p) \otimes \mathbb{Q}_p$. Or $H^{i-j}(X_1, W\Omega^i_{X_1,\log})$ est de torsion pour $i-j \neq i, i+1$ (cf. [6]). D'où le résultat

<u>Remarque</u> 1.4. La conjecture de P. Schneider portait sur une flèche analogue à (1.3) mais partant de $K_j(X_{\mathbb{Q}_p})$. On peut formuler le théorème 1.2 avec cette source. (cf. Rem. 3.9 du chapitre III). Pour la restriction $i < p$, peut s'en débarrasser en travaillant avec p^i-f (cf. Rem. 1.4 du chap. I)

2. <u>Lois de réciprocité</u>.

La description de $c_{1,1}$ donnée au chapitre précedent permet d'obtenir très rapidement une loi explicite de réciprocité pour le symbole "norme résiduelle de Hilbert". En effet, l'application que Kato considère (cf. [18]) est bien $c_{1,1}$. On trouve ainsi une explication conceptuelle à la formule de Vostokov (voir aussi Brückner et Henniart). Plus généralement, le travail [18] de Kato peut se formuler en utilisant le classes $c_{i,i}$ restreintes à la K-théorie de Milnor de certains anneaux. Ainsi le théorème 0.4 de [18] se reformule.

<u>Théorème</u> 2.1 (K. Kato). Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ un trait hensélien d'inégale caractéristique $(0,p)$, de corps de fractions K. Le morphisme

$$(2.2) \quad c_{r+2,r+2} : K^M_{r+2}(K)/p^n \longrightarrow H^{r+2}(X_n, s_n(r+2)_X) \quad (r+2 < p)$$

(n = card. p base de R, cf [18])

est un isomorphisme.

(voir [18] pour des résultats plus généraux).

3. K-théorie à coefficient des anneaux d'entiers de corps p-adique.

Soit L un corps p-adique (extension finie de Q_p) et O_L son anneau des entiers.

On peut, en adaptant l'argument de Soulé ([25]), raffiner les constructions pécédentes pour obtenir une factorisation de $c_{m+1,2m+1}$ $(m \geqslant 1)$ en

(3.1) $$c_{m+1,2m+1} : K_{2m+1}(O_L, Z_p) \longrightarrow H^1(O_L, s(m+1)_{O_L})$$

avec $K_*(O_L ; Z_p) = \varprojlim K_*(O_L ; Z/p^n)$.

D'autre part, le même argument que dans le chapitre III(Prop. 3.5) permet de vérifier la commutativité du diagrammme

(3.2)
$$\begin{tikzcd} K_{2m+1}(O_L ; Z_p) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1(O_L, s(m+1)_{O_L}) \arrow[d] \\ K_{2m+1}(O_L ; Z_p) \arrow[r] & H^1(L, Z_p(m+1)) \end{tikzcd}$$

où la flèche horizontale inférieure est surjective de noyau fini d'après [9] (cf. aussi [22]).

D'autre part, le théorème de [20] montre que la flèche verticale de droite est un isomorphisme $(m \geqslant 1)$. La flèche (3.1) est donc surjective et à noyau fini. La proposition 1 de [22] donne la structure de $H^1(O_L, s(m+1)_{O_L}) \simeq H^1(L, Z_p(m+1))$ pour $m \geqslant 1$

comme coinvariants sous $\mathrm{Gal}(L_\infty/L)$ d'un certain groupes d'unités locales, (L_∞ = p-extension cyclotomique maximale de L).
On va voir qu'en fait, modulo torsion, la structure de ces coinvariants est trés simple.

Proposition. 3.3. $H^1(O_L, s(m+1)_{O_L}) \otimes Q_p$ est canoniquement isomorphe à L.

Remarque 3.4. Le théorème de structure pour les convariants de loc. cit. que l'on obtient grâce à 3.3 ne semble pas connu, ni résulter directement de la théorie du corps de classe. Il serait intéressant d'avoir une démonstration directe de ce résultat.

Demonstration : Elle utilise le résultat suivant de Kato. Si X est un Z_p-schéma syntomique propre, supposé seulement régulier, on a un isomorphisme canonique

$$(3.5)\quad H^*(O_{X,cris}/J^{[r]}) \otimes Q_p \simeq (H^*_{DR}(X/Z_p)/\mathrm{Fil}^r) \otimes Q_p$$

(Fil^r designe la filtration induite par les tronqués $\Omega_X^{\geq r}$)
(J designe l'idéal défini comme au chapitre I)
Par suite

$$(3.6)\qquad H^0(O_{O_L,cris}/J^{[m+1]}) \otimes Q_p \simeq L$$

Considērons alors le diagramme

$$(3.7)\qquad \begin{array}{ccc} J^{[m+1]} \otimes Q_p & \hookrightarrow & O_{O_L,cris} \otimes Q_p \\ \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle 1-p^{-(m+1)}f} \\ J^{[m+1]} \otimes Q_p & \xrightarrow[1-p^{-(m+1)}f]{} & O_{O_L,cris} \otimes Q_p \end{array}$$

Il induit une suite exacte

$$(3.8)\quad H^{\circ}(\mathcal{O}_{\mathcal{O}_L,\mathrm{cris}} \otimes \mathbb{Q}_p \xrightarrow{1-p^{-(m+1)}f} \mathcal{O}_{\mathcal{O}_L,\mathrm{cris}} \otimes \mathbb{Q}_p) \longrightarrow H^{\circ}((\mathcal{O}_{\mathcal{O}_L,\mathrm{cris}} / J^{[m+1]}) \otimes \mathbb{Q}_p) \longrightarrow H^{1}(\mathcal{O}_L, s(m+1)_{\mathcal{O}_L}) \otimes \mathbb{Q}_p$$

On voit alors que $H^{\circ}(\mathcal{O}_{\mathcal{O}_L,\mathrm{cris}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{O}_L,\mathrm{cris}}) \otimes \mathbb{Q}_p = 0$ de la manière suivante. On écrit $\mathcal{O}_L \simeq W[y]$ pour $y \in L$. On doit calculer la cohomologie du complexe simple associe au bicomplexe ($\Sigma = W[y] \otimes \mathbb{Q}_p$) (cf [10])

$$(3.9)\qquad \begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\quad d \quad} & \Omega^1_{\Sigma} \\ \Big\downarrow {\scriptstyle 1-p^{-(m+1)}f} & & \Big\downarrow {\scriptstyle 1-p^{-(m+1)}f} \\ \Sigma & \xrightarrow[\quad d \quad]{} & \Omega^1_{\Sigma} \end{array}$$

Comme $\operatorname{Ker} d = \mathbb{Q}_p$, on en déduit la nullité voulue.

Comme $\mathrm{rg}(H^1(\mathcal{O}_L, s(m+1)_{\mathcal{O}_L}) \otimes \mathbb{Q}_p) = \mathrm{rg}(H^1(L, \mathbb{Z}_p(m+1)) \otimes \mathbb{Q}_p)$ $= [L : \mathbb{Q}_p]$ d'après [20] et [22], on obtient l'isomorphisme cherché. On dispose donc d'un morphisme

$$(3.10)\qquad K_{2m+1}(\mathcal{O}_L\ ;\ \mathbb{Z}_p) \longrightarrow L \qquad m \geqslant 1$$

qui est un isomorphisme modulo torsion.

<u>Remarque</u> 3.11. Ce résultat figure de manière pas très explicite dans [21] et un résultat un peu plus fin (que nous pouvons aussi obtenir) de manière tout à fait explicite dans [26]. La construction est trés différente et s'apparente plutôt aux techniques

de Borel. Il serait intéressant de comparer le deux constructions via un argument de déformation des classes de Chern (cf [1]).

4. Valeurs de fonctions L p-adique des corps cyclotomiques.

Ce paragraphe a été inspiré par le travail de Coleman (cf [4]). Soient F le corps des racines m-ièmes de l'unité sur Q, $F = Q(\mu_m)$ et $G = \mathrm{Gal}(F/Q)$ son groupe de Galois. Posons $Y = Z[\mathrm{Hom}(F, C_p)]$, c'est un Aut(F)-Module. D'après Borel, on a un isomorphisme de $Q[G]$-Modules (* désignant le Z-dual)

$$(4.1) \quad \mathcal{K} : (Y^* \otimes Q)^{(i-1)} \xrightarrow{\sim} K_{2i-1}(A) \otimes Q \simeq K_{2i-1}(F) \otimes Q$$

où A désigne l'anneau des entiers de F. (l'exposant $(i-1)$ désigne le sous-espace de $Y^* \otimes Q$ où la conjugaison complexe opère par $(-1)^{i-1}$.

On définit (cf [4] pour le cas $i = 2$) un morphisme

$$(4.2) \qquad \lambda_p : K_{2i-1}(F) \otimes C_p \longrightarrow Y^* \otimes C_p$$

$$\text{par} \quad \alpha \otimes \beta \longmapsto (\sum_{\varphi} a_\phi \, \phi \longrightarrow \beta \sum a_\phi R_p \; (\phi_{\#}(\alpha))$$

avec $\phi_{\#} : K_{2i-1}(F) \longmapsto K_{2i-1}(C_p)$ induit par ϕ et R_p construit comme suit : on considère $K_{2i-1}(C_p) \longrightarrow H^1(X, s(i)_X) \otimes C_p$ avec $X = \mathrm{Spec}\, Z_p$ (cf Rem.3.9 du chapitre précédent). On a vu au paragraphe précédent que $H^1(X, s(i)_X) \otimes Q_p \simeq Q_p$, d'où $R_p : K_{2i-1}(C_p) \longrightarrow C_p$ défini comme $ch_{i,2i-1}$ (caractère de Chern associé) ; c'est un $C_p[G]$-morphisme.

Soit χ un caractère de Dirichlet de conducteur m, vu comme caractère de G. Posons $W = (Y^* \otimes C_p)^{(i-1)}$ et soit W_χ le sous-espace propre pour χ de W. Notons enfin ω le caractère de Teichmüller sur Z_p^*.

<u>Conjecture</u> 4.3. Soit $i \in N^*$, $L_p(i, \chi \otimes \omega^{1-i}) = d_p(\chi, k)$ $\mathrm{Dèt}(\lambda_p(\mathcal{K} \otimes 1) | W_\chi)$ où $d_p(\chi, k) \in F(\chi)$ = extension dans C_p de F par les valeurs de χ. De plus, pour chaque racine primitive m-iéme de l'unité $\xi \in C_p$, on peut choisir un isomorphisme $\mathcal{K}$ comme dans (4.1) tel que $d_p(\chi, \mathcal{K}) = g(\chi, \xi)$

où $g(\chi, \xi) = \sum_{m=1}^{d} \chi(n)\xi^{-n}$

<u>Remarque</u> 4.4. Cette conjecture est une variante p-adique un peu plus explicite que son analogue non p-adique (cf. 4.1 de [23]) (qui est en fait un théorème d'après Beilinson, le cas $i=2$ avait été traité par Bloch, Gross et Wigner). La conjecture 4.3 serait prouvé pour $i=2$ si nous savions comparer R_p avec le morphisme D_p^* de [4].

<u>Remarque</u> 4.5. Dans le cas d'une extension abélienne totalement réelle F', Soulé a donné dans [22] (Thm. 3) un résultat sur $L_p(i, \omega'^{1-i})$ pour ω' un caractére particulier de $\mathrm{Gal}(F'(\mu_p)/Q)$ en utilisant un morphisme régulateur $\rho_i : K_{2i-1}(F'_p ; Z_p) \longmapsto Z_p^d$ ($d = [F : Q]$). La construction de cette flèche peut s'interpréter de maniere syntomique et conduit à une flèche qui permet probablement (nous n'avons pas vérifie les détails) en utilisant [19] d'éliminer la factorielle $(i-1)!$ dans l'écriture de la constante C de [22].

5. Valeurs de fonctions L p-adiques des courbes elliptiques.

Si E est une courbe elliptique définie sur Q telle qu'il existe une théorie de fonction L p-adique attachée à E ,(par exemple, E comme ci-dessous), on peut risquer des conjectures sur les valeurs de ces fonctions analogues a celles de Beilinson ([1]). Cela nécessite des conjectures préliminaires, sur le "prolongement" de ces fonctions L p-adique, bornons nous donc au cas qui semble le plus accessible.

Soit donc, comme dans [5], E une courbe elliptique définie sur Q avec bonne réduction ordinaire en $p > 3$ et multiplication complexe par l'anneau des entiers d'un corps quadratique imaginaire k'. Sous cette hypothèse, Coleman et de Shalit ont montré (cf [5]) que la valeur en 0 de la dérivée de la fonction L p-adique (de Katz ou de Manin-Vishik) de E était liée à la valeur prise par un régulaleur

$$(5.1) \qquad r_p : K_2(K(E)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H^0(E, \Omega^1_E), K), \; K = \overline{Q}_p$$

en un élément $\{f,g\} \in K_2(K(E))$.

(voir [5] pour un énoncé précis)

Plus géneralement, on peut faire la conjecture suivante. Soient $\mathcal{C}$ une courbe lisse propre sur l'anneau des entiers O_k, d'un corps p-adique k'. Notons $C = \mathcal{C} \otimes_{O_{k'}} k'$

<u>Conjecture</u> 5.2. Le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc}
K_2(C) & \longrightarrow & K_2(\overline{k}'(C)) & \xrightarrow[r_C]{} & \mathrm{Hom}(H^0(C, \Omega^1_{C/\overline{k}'}), \overline{k}') \\
\downarrow & & & & \uparrow \\
K_2(C) & \xrightarrow[ch_{2,2}]{} & H^2(\mathcal{C}, s(2)_{\mathcal{C}}) \otimes \overline{k}' & \simeq & H^1_{DR}(C/\overline{k}')
\end{array}$$

(l'isomorphisme résultant de la définition de $s(2)_{\mathcal{E}}$).
(r_C désigne l'application (38) de [5]).
Une réponse affirmative à cette conjecture permettrait de donner un résultat sur $L_p'(E,0)$ et de prouver une autre conjecture de Schneider (cf [21]) en liaison avec le Théorème p37 de [5].

Remarque 5.3. Dans [24], Soulé construit un régulateur r_i : $K_{2i-2}(E_j Z_p) \longrightarrow Z_p^2$ pour E une courbe elliptique comme ci-dessus et donne un résultat (Thm. 4.6) sur des valeurs de la fonction L p-adique attachée à E. Il est apparament moins difficile (nous n'avons cependant pas vérifié les détails) de prouver que r_i est relié aux régulateurs que nous avons construit que de résoudre la conjecture 5.2. Nous espérons revenir sur ces points dans un prochain travail.

Bibliographie

[1] Beilinson, A.A. : Higher regulators and values of L-functions J. Soviet Math. 30 (1985) 2036-2070.

[2] Bloch, S. : Lectures on algebraic cycles, Duke University Math. Series IV (1980).

[3] Bloch, S. : Tamagawa numbers and the Deligne conjectures: a program, Preprint (1986).

[4] Coleman, R.F. : Dilogarithms, Regulators and p-adic L-functions, Invent. Math. 69 (1982) 171-208.

[5] Coleman, R.F., de Shalit, E. : p-adic regulators on curves and special values of p-adic L-functions, Preprint MSRI (1987).

[6] Colliot-Thélène, J.L.; Sansuc, J.J.; Soulé, C. : Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux, Duke Math. Journ. Vol 50, n°3 (1983) 763-801.

[7] Deligne, P. : Théorie de Hodge III, Publ. Math. de l'IHES n° 44 (1974) 5-77.

[8] Denninger, C.; Wingberg, K. : On the Beilinson conjectures for elliptic curves with complex multiplication, Preprint.

[9] Dwyer, W.; Friedlander, E. : Algebraic and étale K-theory, A paraître dans Trans. Amer. Math. Soc.

[10] Fontaine, J.M. : Cohomologie de De Rham, cohomologie cristalline et representations p-adiques. LN 1016.

[11] Fontaine, J.N.; Messing, W. : p-adic periods and p-adic etale cohomology, Contemporary Mathematics vol. 67, 179-207.

[12] Gillet, H. : Riemann-Roch theorems for higher algebraic K-theory, Advances in Math. 40 (1981) 203-289.

[13] Gillet, H. : On the K-theory of surfaces with multiple curves and a conjecture of Bloch, Duke Math. Journ. vol. 51 n° 1 (1984) 195-233.

[14] Grothendieck, A. : La théorie des classes de Chern, Bull. Soc. Math. France 86 (1958) 137-154.

[15] Illusie, L. : Lettre à C. Soulé.

[16] Illusie, L. : Cohomologie cristalline de $B.GL_n$, d'aprés Deligne, Papiers secrets.

[17] Kato, K. : On p-adic vanishing cycles (Application of ideas of Fontaine-Messing), Advanced Studies in Pure Math. 10 (1987) 207-251.

[18] Kato, K. : The explicit reciprocity law and the cohomology of Fontaine-Messing, Preprint (1986).

[19] Kato, K. : Papiers secrets.

[20] Kurihara, M. : A note on p-adic etale cohomology, Proc. Japan, Acad., 63, Serie A (1987) 275-278.

[21] Schneider, P. : p-adic regulator maps on higher K-theory, Expose MSRI.

[22] Soulé, C. : On higher p-adic regulators, LN 854, 372-401.

[23] Soulé, C. : Régulateurs, Séminaire Bourbaki n° 644 (1985).

[24] Soulé, C. : p-adic K-theory of elliptic curves, Duke Math. Journ. vol 54 n° 1 (1987) 249-269.

[25] Wagoner, J. : Analytic and p-adic regulators, Preprint.

[26] Wagoner, J. : Continuous cohomology and p-adic K-theory. LN 551, p241-248.