代数幾何学シンポジウム記録
1987年度 pp.213-229

高次元の分岐について

東大理　加藤和也

代数幾何と類体論は異質なものであるゆえに，この二つのものがうまくつながる時，代数幾何に全く新しい成果を生むことが可能なのではないか，ということを書きたい．

類体論の考え方から得られる，分岐の激しさをあらわす "swan conductor divisor"，"swan conductor 0-cycle class" を用いて，ℓ 進層の Riemann-Roch という代数幾何の問題を考えることができることを述べる．また ℓ 進層と $\mathcal{D}$ 加群の深い類似を探ることが，類体論的考え方によって可能になることも述べたい．

§1. 類体論

古典的類体論の復習する．体 k に対し，k^{ab} を k の最大アーベル拡大とする．ガロア理論により，k の有限次アーベル拡大は $Gal(k^{ab}/k)$ の開部分群と1対1に対応するので，$Gal(k^{ab}/k)$

を知ることは k のアーベル拡大の様子を知ることになる．特別な体 k については $\mathrm{Gal}(k^{ab}/k)$ が別の群で記述され，k のアーベル拡大の様子がよくわかるというのが，類体論の主内容である．

以下§1では，K を代数体とする．

(1) 局所類体論の主定理．v を K の素点とし，K_v を K の v における局所体とする．この時 ほぼ同型に近い標準準同型

$$K_v^\times \to \mathrm{Gal}(K_v^{ab}/K_v)$$

が存在する．

(2) 大域類体論の主定理．ほぼ同型に近い標準準同型

$$\left(\prod_v K_v^\times\right)/K^\times \to \mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$$

が存在する．ここに v は K のすべての素点を走り，$\left(\prod_v K_v^\times\right)/K^\times$ は K の idele 類群をあらわす．

(1)(2)の関係は，可換図式

$$\begin{array}{ccc} K_v^\times & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(K_v^{ab}/K_v) \\ \downarrow & & \downarrow \text{自然} \\ \left(\prod_v K_v^\times\right)/K^\times & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(K^{ab}/K) \end{array}$$

で与えられる．

§2. 分岐理論の大要．

(1) 代数体における古典的理論 Kを代数体，$\overline{K}$をその代数閉包 ρ : $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to GL_n(\mathbb{C})$ を連続表現とすると，Kの整数環O_Kの各素ideal $\mathfrak{p} \neq (0)$に対し，ρの$\mathfrak{p}$におけるconductorと呼ばれる整数≥ 0が定まり，ρの$\mathfrak{p}$における分岐の激しさをあらわす．そして重要な役割を演ずる．例えば，各$\mathfrak{p}$に対してconductorを$m(\mathfrak{p})$とおくと，$\prod_{\mathfrak{p}} N(\mathfrak{p})^{m(\mathfrak{p})}$ ($N(\mathfrak{p})$は$\mathfrak{p}$のノルム）はρのL函数 $L(s, \rho)$ の函数等式にあらわれる．

conductorにはArtin conductorとSwan conductorと二つある(両者ほとんど似たようなものである)が，以下では主にSwan conductorとその一般化を考えていく．

$n = 1$ つまり $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to \mathbb{C}^\times$ の場合には，conductorは，類体論によってあらわされる．ρは $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)/$(その交換子群の閉包) $= \mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$ を経由するから，各$\mathfrak{p}$に対し（$\mathfrak{p}$をKの素点と考えて）類体論（§1）により

$$K_{\mathfrak{p}}^\times \to \mathrm{Gal}(K^{ab}/K) \xrightarrow{\rho} \mathbb{C}^\times$$

を導く．そして，ρの$\mathfrak{p}$におけるSwan conductor $\mathrm{sw}_{\mathfrak{p}}(\rho)$は，この合成写像が$K_{\mathfrak{p}}^\times$の中の第$(i+1)$単数群を零化するような，最小の整数$i \geq 0$である（$K_{\mathfrak{p}}$は完備離散付値体で，各$i \geq 1$に対しその第$i$単数群が，$\{a \in K_{\mathfrak{p}}^\times ; \mathrm{ord}_{K_{\mathfrak{p}}}(a-1) \geq i\}$と定義される．ここに$\mathrm{ord}_{K_{\mathfrak{p}}}$は$K_{\mathfrak{p}}$の正規加法付値）

(2) conductor divisor．

(1)を一般化して考えれば、一般に X を正規scheme　K をその函数体とし（上の(1)は　，K が代数体，$X = \mathrm{Spec}(O_K)$ の場合である），K^{sep} を K の分離閉包　$\rho : \mathrm{Gal}(K^{sep}/K) \to GL_n(\mathbb{C})$ を連続表現とする時，X の各点 $\mathfrak{p}$ に対して（$\mathfrak{p}$ を高さ1の点に限ってでも）conductorと呼ばれる整数 ≥ 0 が定まり重要な役割を演ずるであろうかという疑問がおこる．現在筆者は，そのようなconductorは一般に存在しないと考える．しかしながら，

<u>主結果</u>1．$\mathfrak{p}$ が高さ1の点，$n=1$（つまり ρ は $\mathrm{Gal}(K^{ab}/K) \to \mathbb{C}^\times$）の時，類体論的な考え方によって良いconductorが定義される．（$\mathfrak{p}$ が高さ1でも $n \geq 2$ では一般にはよいconductorが定義できないと考える．）

これにより，$n=1$ の時，$\mathfrak{p}$ における ρ のconductorを $m(\mathfrak{p})$ とおけば，X 上に "conductor divisor"

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p} \in X \\ \mathfrak{p}:\text{高さ}1}} m(\mathfrak{p}) \cdot \mathfrak{p}$$

が定まることになる．

(3)　$\mathcal{D}$ 加群との類似をたどること．

$\mathcal{D}$ 加群の理論では，variety X 上の $\mathcal{D}$ 加群に対し　そのsingularityの様子をあらわす "characteristic cycle" が，X のcotangent bundleの上に定義される．これの類似として，

<u>主結果</u>2．(2) の X，ρ 但し n=1，に対し 適当な条件のもとで ρ の characteristic cycle が定義される．定義には (2) にのべた ρ の conductor divisor が使われる．

(4) 大域公式．

𝒟 加群の理論では，「characteristic cycle」と「cotangent bundle の 0-section」との intersection は，X 上の重要な 0-cycle class を与える．この 0-cycle class は重要で，その degree は，Dubson-柏原の公式によれば，𝒟 加群の de Rham complex の Euler-Poincaré 標数に一致する．この Dubson-柏原の公式は singularity という local な状況と，Euler-Poincaré 標数という global なものを結びつける公式である．

<u>主結果</u>3．(2) の X，ρ，但し n=1 に対し 適当な条件のもとで，ρ の「characteristic cycle」と「0-section」の intersection として重要な 0-cycle class が定義される．(conductor 0-cycle class と呼ぶ．)

<u>主結果</u>4．conductor 0-cycle class は，分岐という local な状況と，大域的なもの（ℓ 進層の Euler-Poincaré 標数，L 函数の函数等式）を結びつけるいろいろの公式にあらわれる．

§3 大域公式．

§2 の主結果 3 の conductor 0-cycle class はどのような群の

元として定義されるものか今少しくわしく述べてから，§2の主結果4に述べる所の大域公式を2つ与える．

(1)　X を正規 scheme（連結と仮定する），U をその dense open set，K をその函数体とする．

$$E = \{x \in X \,;\, x \notin U.\ \text{剰余体 } \kappa(x) \text{ の標数} \neq 0\}$$

とおく．E は X の閉部分集合であるが，これを reduced scheme と見る．次を仮定する

(∗)　E は，正標数の完全体上の有限型 scheme の disjoint union である．

この仮定は弱い仮定で，たとえば X が $\mathbb{Z}$ や$\underbrace{\ }_{\text{完全}}$体の上に有限型であれば，必ずみたされる．

§2主結果3にいう conductor 0-cycle class（$c_{X,U,\mathcal{F}}$ と書く）は $CH_0(E)$ の元として定義されるべきものである．（CH_0 は 0-cycle の Chow 群）実際には筆者は $\dim(X) \leqq 2$ の時のみ $c_{X,U,\mathcal{F}}$ を定義した．（もっと高次元でも，定義の plan は全く同じように存在するのだが，そして定義のできる場合もあるのだが，plan の中に一般にはまだ実行できない所が $\dim \geqq 3$ では存在する．）

古典的な場合にはどうなるかというと，K：代数体，

$X = \mathrm{Spec}(O_K)$,　$U = X - \{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_r\}$　（$\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_r$ は $\underbrace{O_K}_{\text{相異なる}}$ の素 ideal $\neq (0)$）の時には，$E = \{\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_r\}$,

$$CH_0(E) = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{r\text{コ}}$$

であり，この場合 $c_{X,U,\mathcal{F}}$ の $\mathfrak{p}_i$ 成分 $\in \mathbb{Z}$ は，

$$-(\mathcal{F}\text{ の }\mathfrak{p}_i\text{ での swan conductor})$$

になる．

このように conductor 0-cycle class は，X の上の $\mathcal{F}$ が分岐する部分の中の，正標数の部分に，住んでいるものである．

(2)　ℓ 進層の Riemann-Roch

k を代数閉体，X を k 上の smooth proper variety，U を X の dense open set，ℓ を k の標数と異なる素数とし，$\mathcal{F}$ を U 上の smooth $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-sheaf　（$\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ は $\mathbb{Q}_\ell$ の代数閉包）とする．etale cohomology の次元の交代和

$$\chi(U, \mathcal{F}) \underset{\mathrm{def}}{=} \sum_i (-1)^i \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} H^i(U_{et}, \mathcal{F})$$

を $\mathcal{F}$ の Euler-Poincaré 標数と呼ぶ．$\mathcal{F} = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ の時，これは U 自身の Euler-Poincaré 標数と呼ばれ $\chi(U)$ と書かれる．

例．k の標数 $= 0$ ならば

$$\chi(U, \mathcal{F}) = \mathrm{rank}(\mathcal{F}) \cdot \chi(U).$$

問題は k の標数が $p > 0$ の場合であって，

$$\chi(U, \mathcal{F}) = \mathrm{rank}(\mathcal{F}) \cdot \chi(U) + (?)$$

と書くと (?) の所は，$\mathcal{F}$ の wild な分岐（"k の標数 p でわりきれるような$\underbrace{\text{分岐}}_{\text{order の}}$"）に関係すると考えられる．この (?) をあら

わす公式は，$\dim(X)=1$ なら Grothendieck-Ogg-Shafarevich の公式 [ ] が知られており，$\dim(X)=2$ でも，或る条件のもとで Laumon [3]（構想は Deligne），斎藤 [4] に公式が与えられているが，一般には予想公式さえ与えられておらない．公式が予想され証明されたならばそれは ℓ 進層の Riemann-Roch と呼ばれるべきものである．予想を作る困難は，高次元の scheme 上に生ずる分岐が難解なることである．昔からの連接層の Riemann-Roch 公式のように，$\chi(U,\mathcal{F})$ を $\mathcal{F}$ の "Chern class" のようなもので書こうとしても，まずその第 1 Chern class さえ定義できない．第 1 Chern class は $\mathcal{F}$ の "conductor divisor" がそれにあたるはずであるが "conductor divisor" は一般に定義できないと思われるのである．すなわち，K を X の函数体とすると，$\mathcal{F}$ は

$$\rho : \mathrm{Gal}(K^{sep}/K) \longrightarrow GL_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

で U 上不分岐なものと対応する（$n=\mathrm{rank}(\mathcal{F})$）が，$\rho$ の conductor divisor は §2 (2) に述べたように，一般には定義できないと考えられるのである．しかしながら，$n=1$ の場合には conductor divisor が存在し（§2 (2)，そこでは $\overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$ でなく $\mathbb{C}^\times$ への表現を考えているが，同じ定義が成立する），そしてその conductor divisor をもとに conductor 0-cycle class $c_{X,U,\rho}$ が $\dim(X)\leqq 2$ なら常に，$\dim(X)\geqq 3$ でもあとでのべる "clean" の仮定のもとでなら定義される（U が fix されたとき適当に X をと

りかえると "clean" 条件はみたされると予想される).

予想 $\mathrm{rank}(\mathcal{F})=1$ のとき,

$$\chi(U,\mathcal{F}) = \chi(U) + \deg(c_{X,U,\mathcal{F}}).$$

($\deg$ は 0-cycle class の degree)

定理 予想は $\dim(X)\leqq 2$ なら成立する.

ℓ進層の Riemann-Roch は純粋に代数幾何の問題であるが, 連接層の Riemann-Roch とちがって「分岐」に深くかかわり, 古典的な, 代数的整数論の分岐論がそうであるように, 類体論と深くかかわるはずであり, こういう代数幾何と類体論の交叉のテーマは筆者にとってロマンを感ずる事柄である.

(3) Cohomology の conductor, Jacobi 和

k を代数体, O_k をその整数環, X を O_k 上の proper flat 有限型 scheme で, 正則かつ連結なものとする. U を X の dense open set, K を X の函数体. ℓ: 素数, $\mathcal{F}$ を U 上の smooth $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-sheaf, $\rho: \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \to GL_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ を $\mathcal{F}$ に対応する U 上不分岐な表現とする. etale cohomology 群 $H^i_{et}(U_{\overline{k}},\mathcal{F})$ ($U_{\overline{k}} = U \otimes_{O_k} \overline{k}$) には, $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ が作用するが, この, $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の表現 ρ の分岐と, cohomology への $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ の表現の分岐の関係を, 記述するのが目標である.

予想 $n=1$ とする. v を k の有限素点で $v \nmid \ell$ なるものとすると,

$$\mathrm{sw}_v H^{\cdot}_{et}(U_{\bar{k}},\ \mathcal{F}) = \mathrm{sw}_v H^{\cdot}_{et}(U_{\bar{k}},\ \overline{\mathbb{Q}}_\ell) - \deg(c_{X,U',\rho})$$

ここに　$\mathrm{sw}_v H^{\cdot}_{et}(U_{\bar{k}}, \mathcal{F})$ は　$\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ の表現　$H^i_{et}(U_{\bar{k}}, \mathcal{F})$ の v における swan conductor（§2 (1), そこでは $\mathbb{C}$ 上の表現について述べたが　$v \nmid \ell$ なら $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上の表現にも v における swan conductor が定義できる　ここで v は O_k の素 ideal と同一視した）の i にわたる交代和 $\sum_i (-1)^i \mathrm{sw}_v H^i_{et}(U_{\bar{k}}, \mathcal{F})$ である　また，U' は U から v 上にある部分を除いたもの.

<u>定理</u>　予想は $\dim(X) \leqq 2$ なら成立する.

例.　$X = \mathbb{P}^1_{O_k}$，　k は 1 の原始 n 乗根を含むとし，Uは，$X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\frac{1}{n}, \frac{1}{\ell}]$ から，divisor "$t=0$", "$t=1$", "$t=\infty$" をぬいたもの（t は $\mathbb{P}^1$上の標準座標関数）とする. $K = k(t)$ であるが.
整数 a, b をとり,

$$\alpha = t^{\frac{a}{n}}(1-t)^{\frac{b}{n}}$$

を $\bar{K}$ の中にとり　ρ として　(a, b に depend する),

$$\mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\times} \quad : \quad \sigma \longmapsto \sigma(\alpha)/\alpha$$

をとると，ρ に対応する $\mathcal{F}$ について　$H^1(U_{\bar{k}}, \mathcal{F})$ は $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ の Jacobi 和表現と呼ばれる 1 次元表現になる. Jacobi 和表現といわれる理由は，$v \nmid n$　$v \nmid \ell$ ならば　この表現は v で不分岐で v の frobenius 置換の $\overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\times}$ における $\underbrace{\text{像}}_{\rho\text{による}}$ が「Jacobi 和」に一致するからである. $v | n$, $v \nmid \ell$ ならば分岐がおこりうるが $\mathrm{sw}_v H^1(U_{\bar{k}}, \mathcal{F})$

は $v \nmid l$ なる l によらず，この Swan conductor を求めよという Weil の問題があったが，この conductor は最近 Coleman, McCallum によって求められた．上の定理から，彼らの結果の別証を与えることができる．

§4 諸定義

conductor divisor, characteristic cycle, conductor 0-cycle class の定義を与える

(1) conductor divisor　§2 (2) にいう $\rho : \mathrm{Gal}(K^{ab}/K) \to \mathbb{C}^\times$ の Swan conductor divisor の定義であるが，これについては [2] に述べたので，ここでは（結局同じではあるが）少し[ ]とちがった形に定義を述べる．高さ 1 の点 $\mathfrak{p}$ ごとに conductor を与えるのであるが，$X = \mathrm{Spec}(A)$，A：完備離散付値環のときにこの整数を定義し，一般の場合は A として $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$ の完備化をとって，この場合に帰着して定義する．A の分数体を K とする．

1° まず A の剰余体がある $n \geq 1$ について $n-1$ 次元局所体である時，つまり K が n 次元局所体の時に定義する．ここに K が n 次元局所体とは，体の列 $k_0, \dots, k_n$ で k_0 が有限体，$1 \leq i \leq n$ について k_i は k_{i-1} を剰余体とする完備離散付値体，

$k_n = K$ なるものが与えられていることをいう．n次元局所類体論によれば，ほぼ同型に近い標準準同型

$$K_n^M(K) \longrightarrow Gal(K^{ab}/K)$$

が存在する（K_n^M は Milnor の K群）（[1]）．$\rho : Gal(K^{ab}/K) \to \mathbb{C}^\times$ に対しその Swan conductor を ρ が $K_n^M(K)$ の第$(i+1)$単数群を消す最小の整数 $i \geq 0$ として定義する．ここに，$i \geq 1$ に対し完備離散付値体 K の $K_n^M(K)$ の第 i 単数群（$U^i K_n^M(K)$ と書く）とは，

$$\{a_1, \cdots, a_n\} \qquad a_1, \cdots, a_n \in K^\times,\ \mathrm{ord}_K(a_1 - 1) \geq i$$

の形の symbol で生成される $K_n^M(K)$ の部分群．

2°．Aの剰余体が素体上有限生成な時．この時Kの拡大体である完備離散付値体 K′ で，K の素元は K′ でも素元，K′ の剰余体はある $n \geq 0$ について n次元局所体でかつ K の剰余体の分離拡大となるものが存在する．A における Swan conductor を A′ =（K′ の付値環）へいって 1° によって定義する．これは K′ のとり方によらないことが言える

3°．一般にAは，剰余体が素体上有限生成な完備離散付値環の有向順極限 $\varinjlim_{\iota} A_\iota$ の完備化としてあらわされる．そして $\rho : Gal(K^{ab}/K) \to \mathbb{C}^\times$ は十分大きい ι について A_ι において定義される．2° により，十分大きい ι について Swan conductor を定義すれば，それは十分大きい ι について一定となり，こ

れを Swan conductor と定義するのである.

(2) Characteristic cycle.

Characteristic cycle は "logarithmic pole 的 cotangent bundle" の上の cycle であるので, まずこの "logarithmic pole 的 ……" を定義する. X を正則 scheme で D をその上の normal crossing な reduced divisor とする. $\mathcal{O}_X$ 加群層 $\Omega^1_X(\log D)$ を次のように定義する. $U = X - D$, $j : U \to X$ を inclusion とし $\mathcal{O}_X$ 加群 $\Omega^1_{X/\mathbb{Z}}$ と, 記号 $d\log(f)$ $f \in j_*\mathcal{O}_U^\times$ で生成される自由 $\mathcal{O}_X$ 加群の, 直和を, 関係式「$d\log(fg) = d\log(f) + d\log(g)$」「$f \in \mathcal{O}_X \cap j_*\mathcal{O}_U^\times$ なら $fd\log(f)$ は $\Omega^1_{X/\mathbb{Z}}$ の元 df に一致」でわってできる $\mathcal{O}_X$ 加群を, $\Omega^1_X(\log D)$ であると定義する. X が標数 $p > 0$ の完全体 k 上の smooth scheme なら

$$\Omega^1_X(\log D) = \text{通常の } \Omega^1_{X/k}(\log D) \subset j_*\Omega^1_{U/k}$$

となる.

仮定として

(*) X は excellent, 連結で, D の正標数の既約成分は, 正標数の完全体上の有限型 scheme である

とする. この仮定は例えば X が $\underbrace{\mathbb{Z}}_{\text{(連結で)}}$ や正標数の完全体上有限型ならば, 成立する

<u>Proposition</u> : F を D の正標数の既約成分とすると

$$\Omega^1_X(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_F$$

は$\mathcal{O}_F$上の rank dim(X) の locally free sheaf である.

以下 (2) では (*) を仮定し, X の函数体を K とし,

$\rho : Gal(K^{ab}/K) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ を U 上で不分岐なものとし, ρ の Swan conductor divisor を $\underline{sw}(\rho)$ とおく. 次のような概念を順次定義していく必要がある.

1°. refined Swan conductor. F を $\underline{sw}(\rho)$ の台の既約成分とする (F は正標数となる) と, $\Omega^1_X(\log D)(\underline{sw}(\rho)) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_F$ の non-zero global section $rsw_F(\rho)$ が定義される (refined Swan conductor と呼ぶ). ここに $(\underline{sw}(\rho))$は可逆層 $\mathcal{O}_X(\underline{sw}(\rho))$ とのテンソル積を示す. 定義はややこしく, 長くなるので, [2] に書いたことを用いて説明する. $rsw_F(\rho)$ は F の生成点における stalk で特徴づけられるが, 生成点 $\mathfrak{p}$ における stalk は, 離散付値環 $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$ と ρ と $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$ の素元 π についてきまる [2] p171, 9行目の $(\alpha, \beta) \in \Omega^1_{k(\mathfrak{p})} \oplus k(\mathfrak{p})$ を用いて,

$$\pi^{-n} \otimes (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}\, d\log(\pi))$$

(n : ρ の $\mathfrak{p}$ における Swan conductor の値, $\tilde{\alpha}$: α の $\Omega^1_{X/\mathbb{Z},\mathfrak{p}}$ へのもちあげ, $\tilde{\beta}$: β の $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$ へのもちあげ) と定義される.

refined Swan conductor は高次元局所体を用いて述べることもできるがここでは説明をしない (ややはりややこしい話になってしまいますので) が, K を n 次元局所体 ($n \geqq 1$),

$\rho : Gal(K^{ab}/K) \to \mathbb{C}^\times$ の Swan conductor が $i \geqq 1$ とすると, refined Swan conductor とは ρ の導く $U^iK_2(K)/U^{i+1}K_2(K) \to \mathbb{C}^\times$ の記述である.

2° cleanness. (X, U, ρ) が clean ということの定義は [ ] に述べたが，これは divisor $\underline{sw}(\rho)$ の台の任意の既約成分 F について，$rsw_F(\rho)$ が local に $\Omega^1_X(\log D)(\underline{sw}(\rho)) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_F$ の base の1部になることである.

3° characteristic cycle. (X, U, ρ) が clean の時，その"characteristic cycle"を次のように定義する. この時 $rsw_F(\rho)$ は

$$\mathcal{O}_X(-\underline{sw}(\rho)) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_F \longrightarrow \Omega^1_X(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_F$$

を induce するが，cleanness から，左のものは右のものに局所的には直和因子として埋めこまれている. したがって F 上の vector bundle $\mathbb{V}(\Omega^1_X(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_F)$ の rank 1 の部分 vector bundle が与えられていることになり，これを $V_{F,\rho}$ と書く. 形式的な和

$$\sum_F sw_F(\rho) \cdot V_{F,\rho}$$

(ここに F は $\underline{sw}(\rho)$ の台の既約成分を走り，$sw_F(\rho) \in \mathbb{Z}$ は $\underline{sw}(\rho)$ の F での係数) を (X, U, ρ) の characteristic cycle と呼ぶ.

X が正標数の完全体 k 上 smooth なら，これは $\mathbb{V}(\Omega^1_{X/k}(\log D))$ (log pole 的 cotangent bundle) の上の cycle とみなせるが，これに $\mathbb{V}(\Omega^1_{X/k}(\log D))$ の 0-section $[X]$ を加えたものが，$\mathcal{D}$ 加群の理論における characteristic cycle の良い類似になる. ($\mathcal{D}$ 加群論では cotangent bundle を用い，log pole 的 cotangent bundle は用いないが 少し定義を変えれば log pole 的 cotangent bundle 上

に characteristic cycle を定義できる.)

(3) conductor 0-cycle class (X, U, ρ) を 上の §4 (2) のとおり (仮定 (*) をみたす) とし clean とする時. $(-1)^{\dim X} \cdot sw_F(\rho) V_{F,\rho}$ と, $\mathbb{V}(\Omega^1_X(\log D)\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_F)$ の 0-section ($\cong F$) の intersection $\in CH_0(F)$ を, $\underline{sw}(\rho)$ の台のすべての既約成分 F について加えることにより,

$$c_{X,U,\rho} \in CH_0(E) \qquad E = D \text{の正標数部分}$$

が定義される.

次に, (X, U, ρ) を §3 (1) のとおりとする (つまり X の正則性や, cleanness を仮定しない) この時は, $\dim(X) \leqq 2$ なら $c_{X,U,\rho}$ は次のように定義される. $f : X' \to X$ proper birational で $(X', f^{-1}(U), \rho)$ が §4 (2) の仮定をみたしかつ clean であるものが存在することが示せ,

$$c_{X,U,\rho} = f_* c_{X', f^{-1}(U), \rho}$$

とおく. これは X′ のとり方によらないことが示される.

文献表

[1] K. Kato, A generalization of local class field theory by using K-groups II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo IA 27, 1980.

[2] K. Kato, 高次元の分岐について (数理解析研究所講究録 609)

[3] G. Laumon, Characteristic d'Euler-Poincaré des faisceaux

constructibles sur une surface, Astérisque 101-102.

[4] S Saito, General fixed point formula for an algebraic surface and the theory of Swan representations for two dimensional local rings to appear in Amer. J. Math.

なお本稿に書きましたことは論文

Class field theory, $\mathcal{D}$-modules and ramification on higher dimensional schemes

にまとめるつもりです. $\mathcal{D}$加群との類似について詳しく述べずに終わってしまいましたが, これについては拙稿「類体論と$\mathcal{D}$加群(1986年10月の数理解析研 代数解析の集会報告集)にくわしく書きました. 終わりの方で本稿が少し乱雑な書き方になりましたこと(時間切れ)をおわびします.