代数幾何学シンポジウム記録
1987年度　pp.193-211

代数曲線の導手、判別式と数論曲面のNoether公式

東大 理　斎藤 毅

§1. 導手・判別式公式

古典的な分岐理論における基本的な公式の1つに導手・判別式公式というものがあります。これは剰余体が完全体であるような離散付値体の有限次分離拡大において、その導手と判別式が等しいことを主張するものです。ここでの目標はこの公式の類似をそのような体上の曲線について定式化し証明することです。この公式は、その種数=1の場合としてOggの公式[O]を含んでいます。種数=2の場合には86年1月に東大で行われたシンポジウムで上野氏が関連した話題について講演しています[U1][U2]。なお証明等詳しいことを知りたい方は[S1][S2]をみて下さい。

以下つねにSを剰余体が代数閉であるようなHensel離散付値環のSpecとする。すると一般にS上の有限型scheme Xに対しXの導手とよばれる整数を定義することができる。導手は$\mathbb{Z}$上有限型のschemeのHasse-Weil zetaの函数等式の定

数項にあらわれると予想されており、整数論的にも重要な不変量である。以下XをS上のproper flatな正則schemeでgeneric fiberはsmoothなものとする。このときXのArtin導手Art(X/S)をSで可逆な素数ℓについてのℓ進cohomologyを用いて次のように定義する

$$\mathrm{Art}(X/S) = \chi(X_{\bar{\eta}}) - \chi(X_s) + \mathrm{Sw}_S H^*(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}_\ell).$$

ここでχはℓ進Euler-Poincaré標数、$\bar{\eta}$およびsはそれぞれSの(geometric) generic pointとclosed point. 最後の項は$X_{\bar{\eta}}$のℓ進cohomologyのSwan導手の交代和です。Swan導手というのは惰性群$I = \mathrm{Gal}(\kappa(\bar{\eta})/\kappa(\eta))$の有限次$\ell$進表現Vに対して定まる正の整数$\mathrm{Sw}_S V$のことで、ここでは詳しい定義は省略して、次の性質だけを注意しておきます。pro-有限群Iは完全系列$1 \to P \to I \to \prod_{p' \neq p} \mathbb{Z}_{p'} \to 1$をみたします。ここでpはSの剰余体$\kappa(s)$の標数でPはIのただ1つのpro-p Sylow部分群です。Swan導手$\mathrm{Sw}_S V$というのはPがVへどのくらい大きく作用するか、つまりVのwild ramificationのはげしさをあらわす不変量で$\mathrm{Sw}_S V = 0$というのがPがVへ自明に作用することの同値な条件となっている。Artin導手の例として、KをSの分数体$\kappa(\eta)$としLをKの有限次分離拡大、XがSのLでの整閉包の場合を考えると、Art(X/S)は古典的な体の拡大L/KのArtin導手と一致する

次に判別式について考えます。Xを上のようにS上のproper flatな正則schemeでgeneric fiberがsmoothなものとする．まず古典的な場合．つまり $f:X\to S$ が finite な場合を考える．するとこのとき generic pointでは同型であるような可逆$\mathcal{O}_S$加群の間の標準写像 $\Delta:(\det f_*\mathcal{O}_X)^{\otimes 2}\to\mathcal{O}_S$ が $x_1\wedge\cdots\wedge x_n\otimes y_1\wedge\cdots\wedge y_n$ に $\det(\mathrm{Tr}_{X/S}(x_iy_j))$ を対応させることにより定義される．ここでnはXのS上の次数で $\det f_*\mathcal{O}_X$ は $\wedge^n f_*\mathcal{O}_X$ である．そして判別式はΔの余核の長さと定義する．以下この余核の長さを位数とよびordと書く．はじめに述べた古典的な導手・判別式公式とはここで $\mathrm{Art}(X/S)=\mathrm{ord}\,\Delta$ という公式のことである．

さて，XがS上の曲線の場合を考える．以下さらに上のXがS上geometrically connectedで相対次元が1という条件をみたすものとする．今後簡単のためこのようなXをS上の正則な曲線とよぶことにする．判別式を定義するためには，上のような標準写像が必要だが，それは次の定理により与えられる．

定理(Deligne [D])．$g:Y\to T$ を proper smooth geometrically connectedで相対次元が1とする．このとき次の標準同型が一意的に存在する

$$\Delta:\ \det Rg_*\omega_{Y/T}^{\otimes 2}\longrightarrow(\det Rg_*\omega_{Y/T})^{\otimes 13}.$$

ここで $\omega_{Y/T}$ は相対標準層でこの場合は $\Omega_{Y/T}$ と同型。また K を完全複体とし $K=(K^i)$ 各 K^i は局所自由としたとき $\det K$ は可逆層 $\bigotimes_{i\in\mathbb{Z}}(\wedge^{rk K^i}K^i)^{\otimes(-1)^i}$ を表わす。この場合は、γ を Y の種数とすると

$$R^i g_*\omega_{Y/T}^{\otimes 2} = \text{階数 } 3\gamma-3 \text{ の局所自由加群 } (i=0) \quad =0 \quad (i\neq 0)$$

$$R^i g_*\omega_{Y/T} = \text{階数 } \gamma \text{ の局所自由加群 } (i=0) \quad \cong \mathcal{O}_T \ (i=1)$$
$$= 0 \quad (i\neq 0,1)$$

だから、

$$\det Rg_*\omega_{Y/T}^{\otimes 2} \cong \wedge^{3\gamma-3} g_*\omega_{Y/T}^{\otimes 2},\quad \det Rg_*\omega_{Y/T} \cong \wedge^{\gamma} g_*\omega_{Y/T}.$$

ここでは[D]を引用したが、この標準同型は以前から知られているものでMumford[M]にまでさかのぼるものである。これの数論曲面のNoether公式への応用はFaltings[F]によって見出された。また最近では物理のstring理論への応用が知られている。

さて $f:X\to S$ を上のように S 上の正則な曲線とする。すると

$$\Delta: \det Rf_*\omega_{X/S}^{\otimes 2} \longrightarrow (\det Rf_*\omega_{X/S})^{\otimes 13}$$

が上の定理をもちいて少なくとも S の生成点 η 上での同型としては定義される。このとき $\mathrm{ord}\,\Delta$ は π を $\mathcal{O}_S$ の素元とするとき $\pi^n\Delta$ が同型となる唯一の整数として定義される。そこで X の判別式をこの $\mathrm{ord}\,\Delta$ と定義する。すると曲線についての導手・判別式公式というのは次の定理である。

定理 1. $f: X \to S$ S上の正則な曲線とすると

$$-\mathrm{Art}(X/S) = \mathrm{ord}\,\Delta.$$

Xのclosed fiber X_sがXの被約な正規交叉因子であるとき、XをS上のsemi stable曲線ということにする。このとき右辺 $-\mathrm{Art}(X/S)$はX_sの特異点の数と一致するが、この場合にはDeligneが[D]で上に引用した定理を示したとき定理1も同時に証明しました。われわれは後に定理1をこの場合に帰着することによって証明する。この証明はあとまわしにして、ここではこの定理の系と応用について先に述べる。

系1 上のように定義されたΔは実はS上$\mathbb{Q}$加群の準同型

$$\Delta: \det Rf_*\omega_{X/S}^{\otimes 2} \longrightarrow (\det Rf_*\omega_{X/S})^{\otimes 13}$$

を定義する。さらにΔが同型となるためには、$f: X \to S$ がsmoothであるかあるいは種数が1でX_sの被約化がsmoothであることが必要十分。

証明. 定理1により、つねに$-\mathrm{Art}(X/S) \geq 0$であることと、$-\mathrm{Art}(X/S) = 0$が上の条件と同値であることを示せばよい。今、$-\mathrm{Art}(X/S) = \chi(X_s) - \chi(X_{\bar\eta}) + \mathrm{Sw}\, H^1(X_{\bar\eta}, \mathbb{Q}_\ell)$ であり、(右辺)≥ 0であることと、(右辺)$= 0$なら上の条件をみたすことはよく知られている。逆は種数1の曲線Xが上の条件をみたせば、PがH'へ自明に作用することからわかる。

種数が1の時は上に定義した判別式は古典的なものと一致する. $g: Y \to T$ を proper smooth で geometrically connected で相対次元が1種数が1とする. すると $\det Rg_*\omega_{Y/T}^{\otimes 2} \simeq \det Rg_*\omega_{Y/T}$ であって Δ は古典的な同型 $\Delta: \mathcal{O}_T \to (\det Rg_*\omega_{Y/T})^{\otimes 12}$ に他ならない. そこで定理1から次の Ogg の定理が系として得られる

系2. (Ogg [O]). X_η を η 上の楕円曲線とする. すなわち proper smooth geometrically connected で種数が1で有理点をもつ曲線とする. そして $f: X \to S$ を X_η の Néron model すなわち極小正則 model とし $g: X' \to S$ を X_η の極小 Weierstrass model とする. すると

$$-\mathrm{Art}(X/S) = \mathrm{ord}\,\Delta'_{X'/S}.$$

証明 定理1より $\mathrm{ord}\,\Delta_{X/S} = \mathrm{ord}\,\Delta'_{X'/S}$ を示せばよい. これは X が minimal であることから $\mathrm{ord}\,\Delta_{X/S} = \mathrm{ord}\,\Delta'_{X/S}$ であり, また X' が特異点として高々有理2重点しかもたず X がその極小正則 model であることから $\mathrm{ord}\,\Delta'_{X/S} = \mathrm{ord}\,\Delta'_{X'/S}$ であることから従う.

種数が2の時の古典的な判別式との関係および上野氏の結果との関係については§3で述べる

次に数論曲面の Noether 公式への応用について述べる. B を代数体の整数環の Spec とする. B 上の数論曲面とは proper flat geometrically connected な正則 B-scheme $f: X \to B$ で相

対次元が1であるものと定義する．可逆O_B加群Lとその無限素点$v \in B(\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(O_B, \mathbb{C})$でのHermite計量$\|\ \|_v$の族で複素共役で安定なものとの組のことを$B$上のArakelov可逆層という．$B$上のArakelov可逆層$L$に対しその次数$\deg L \in \mathbb{R}$を$l$を$L$の0でない任意の有理切断とするとき

$$\deg L = \sum_{v \in B_0} \mathrm{ord}_v l \cdot \log q_v - \sum_{v \in B(\mathbb{C})} \log \|l\|_v$$

と定義する．ここでB_0はBの有限素点全体の集合で$v \in B_0$に対しq_vはvでの剰余体の位数である．さて$f: X \to B$をB上の数論曲面としたとき．各整数nに対し．$\det Rf_*\omega_{X/B}$には標準的なArakelov可逆層の構造が定義されているので．その次数を定 することができる．するとNoether公式とは次の公式である．

定理 2．B上の数論曲面$f: X \to B$に対し．

$$\begin{aligned}
&13 \deg \det Rf_*\omega_{X/B} - \deg \det Rf_*\omega_{X/B}^{\otimes 2} \\
&\qquad = -\sum_{v \in B_0} \mathrm{Art}_v(X/B) \cdot \log q_v + \sum_{v \in B(\mathbb{C})} \delta(X_v)
\end{aligned}$$

ここで$v \in B_0$に対し $\mathrm{Art}_v(X/B)$は$B_{\bar{v}}$をBのvでのstrict hensel化としたときの$\mathrm{Art}(X \times_B B_{\bar{v}} / B_{\bar{v}})$であり，$v \in B(\mathbb{C})$に対しては$\delta(X_v)$はRiemann面$X_v$のinvariantであってFaltingsが定義したδの種数のみによる定数倍と一致する．

定理2は定理1よりただちにしたがう．また$f: X \to B$がsemi stableな場合にはFaltingsが証明している[F]．

ここで導手・判別式公式の意味について考える。まず曲線の判別式の幾何的あるいはmoduli的な解釈について述べる。$M_g, \overline{M}_g$ をそれぞれ種数 g の smooth曲線あるいはstable曲線のfine moduli stackとするとき $\Delta = \overline{M}_g - M_g$ は既約な $\overline{M}_g$ の正規交叉因子となる。$f : X \to S$ を上のように S 上の正則な曲線とすると X はあたかも S から $\overline{M}_g$ への射を定めているかのように考えることができて、さらに $\mathrm{ord}\,\Delta$ は因子 Δ の S 上のひきもどしの次数すなわち S と Δ の交点数と解釈することができる。X が極小でsemi stableのときは X は実際この射を定めていてこのとき交点数は X_s の特異点の数となる。一方このとき $\mathrm{ord}\,\Delta$ もそうなる。上の解釈の正当化はある程度こうしてできる。さて一般にこのように考えると判別式とは曲線のbad reductionをmoduli的にはかった量といえる。一方導手は同じものをcohomology的にはかった量であるから、導手・判別式公式とは、その2とおりのはかり方が一致するという公式であるということになる。

次にこの公式をRiemann-Rochとみる解釈について述べる。S を上のとおりとし、$f : X \to S$ を proper flat で generic fiber が smooth な正則 S-scheme で相対次元が pure に r とする。このとき X の導手は $-\mathrm{Art}(X/S) = \deg\,(-1)^{r+1} f_* c_{r+1}(\Omega^1_{X/S})$ となると予想される。このことの正確な意味は後でのべる。一方判

別式については，まず古典的な $r=0$ のときには，$(\det f_*\mathcal{O}_X)^{\otimes 2}$ と $\mathcal{O}_S$ のずれだから $-2c_1(f_*\mathcal{O}_X)$ と解釈される．したがって導手判別式はこの場合 $-2c_1(f_*\mathcal{O}_X)=f_*(c_1(\Omega^1_{X/S}))$ つまり Riemann-Roch 公式 $c_1(f_*\mathcal{O}_X)=-\frac{1}{2}f_*(c_1(\Omega^1_{X/S}))$ とみなされる．ところでこれは Riemann-Roch から導手判別式公式を導く証明とはならないことに注意する．その理由は，証明のためには $CH_0(S)=\mathbb{Z}$ の中で考えなくてはいけないのに，Riemann-Roch は $CH_0(S)=0$ の中でしか考えられていなかったからで る．この点を正当化するためには，局所化された chern 類の概念を用いる必要がある．そしてその時，導手・判別式公式を示すということは，これに対し局所化された Riemann-Roch を示すということになる．

さて次に同じ留保のもとで $r=1$ の場合を考える．すると，$c_1(Rf_*\omega_{X/S}^{\otimes 2})-c_1(Rf_*\omega_{X/S})=f_*(c_1(\Omega^1_{X/S})^2)$ と $c_1(Rf_*\mathcal{O}_X)=c_1(Rf_*\omega_{X/S})$ を用いることにより，導手・判別式公式，

$$13\,c_1(Rf_*\omega_{X/S})-c_1(Rf_*\omega_{X/S})=f_*\,c_2(\Omega^1_{X/S})\quad \text{は}$$

$$c_1(Rf_*\mathcal{O}_X)=\frac{1}{12}f_*(c_1(\Omega^1_{X/S})^2+c_2(\Omega^1_{X/S}))$$

と解釈することができる．このように $r\leq 1$ のときには，導手判別式公式を Riemann-Roch とみる解釈があるが，$r\geq 2$ のときは，このように $f_*c_{r+1}(\Omega^1_{X/S})$ を可逆層の順像の c_1 だけでかくことはできないので，それに応じて判別式の定義さらに導手・

判別式公式はないと考えられる.

§2. 証明の概略. 局所化されたchern類.

ここでは定理1の証明の概略についてのべる. 証明は曲線のstable reduction theoremを用いて すでにDeligneが示していたsemi-stableな場合に帰着することによって行なわれる. このためには. baseを拡大するときの両辺の変化が等しいことを示せば十分だが. それは次のようにして示される. まず両辺の変化を局所化されたchern類で書き表わす. これは. ord Δ の方は直ちにできるが. Art(X/S)の方はBlochによる導手公式を用いる. これはそれ自体重要な結果なのであとで説明する. こうして示すべきことはある局所化されたchern類のあいだの等式ということになる. そしてこの等式は局所化されたRiemann-Roch公式から導かれるので. これを示すことにより定理の証明が完結する. ここでは証明の細かい点にはふれずBlochの導手公式と局所化されたRiemann-Roch公式について説明する.

まず準備として局所化されたchern類について説明する. 一般にscheme X と $\mathcal{O}_X$-加群の完全複体Kに対し. Kのp番めのchern類 $c_p(K)$ が $CH^p(X)$ に定義されるが. 局所化されたchern類というのは次のようなものである. UをXのopen

subschemeで complementをZとするとchow群の完全系列
$CH(Z)\to CH(X)\to CH(U)\to 0$ がある。ここで$c_R(K)$が$CH^R(U)$で消えるときに、$CH_*(Z)$の元で$c_R(K)$にくるような自然な元を定義できることがある。これをZに局所化されたKのchern類とよび$c_{R\,Z}^{X}(K)$とかく。具体的な構成については[B][Fu]を参照して下さい。

さてSを前のとおりとし、$f:X\to S$をseparated flatな有限型正則S-schemeで相対次元がrでgeneric fiberがsmoothなものとする。するとこのとき$\Omega_{X/S}$はX_η上では階数がrの局所自由加群なので$c_{r+1}(\Omega^1_{X/S}|X_\eta)=0$となる。そこで局所化されたchern類$c_{r+1}{}^{X}_{X_s}(\Omega^1_{X/S})$が$CH_0(X_s)$内に定義される。Blochはこの0-cycleを定義し次の予想をたてた。

予想(Bloch). 上の$f:X\to S$がさらにproperならば、

$$-\mathrm{Art}(X/S)=\deg(-1)^{r+1}f_*c_{r+1}{}^{X}_{X_s}(\Omega^1_{X/S}).$$

ここでdegは標準同型$CH_0(s)\simeq\mathbb{Z}$のことである。さらにBlochは$r=1$のときには実際にこの予想を証明した[B]。これが上に述べたBlochの導手公式である。

次に局所化されたRiemann-Roch公式について述べる。まずふつうのRiemann-Rochから復習する。これは$f:Y\to T$をproper locally of complete intersectionな射としFを$\mathcal{O}_Y$-加群の完全複体としたとき、$\mathrm{ch}\,Rf_*F=f_*(\mathrm{ch}(F)\cap \mathrm{td}(L_{Y/T})^{*})$が$CH(T)_{\mathbb{Q}}$

でなりたつというものである。ここで ch は Chern 指標、td は Todd 類、$L_{Y/T}$ は余接複体、$*$ は奇数次の項を (-1) 倍する作用素である。これから説明する局所化された Riemann-Roch とは双有理な射 $\pi: Z \to Y$ についての両辺のずれを局所化しようというものである。U を T の open subscheme で R をその complement とし、$\pi: Z \to Y$ を proper T-morphism で U 上では同型を導くものとし Z_U, Y_U はそれぞれ Z, Y で dense で $g = f\circ\pi$ も locally of complete intersection とする。このとき $Rf_*F \to Rg_*L\pi^*F$ の mapping cone $[Rf_*F \to Rg_*L\pi^*F]$ は T 上の完全複体で U 上では非輪状なので左辺の差 $ch(Rg_*(L\pi^*F)) - ch(Rf_*F)$ は $ch_R^T([Rf_*F \to Rg_*L\pi^*F])$ として $CH(R)_{\mathbb{Q}}$ 内に定義される。一方 $L_{Z/Y}$ を $L\pi^*L_{Y/T} \to L_{Z/T}$ の mapping cone とおくと $g_*(ch(L\pi^*F) \cap td(L_{Z/T})^*)$ $= f_*(ch(F) \cap td(L_{Y/T})^* \cap \pi_*(L_{Z/Y})^*))$ となる。ここで $L_{Z/Y}$ は Z_U 上非輪状となるので、$\pi_*([Z]) = [Y]$ に注意すると $td(L_{Z/Y})^* - [Z]$ は $CH(Z_R)_{\mathbb{Q}}$ 内に定義される。したがって右辺の差

$$g_*(ch(L\pi^*F) \cap td(L_{Z/T})^*) - f_*(ch(F) \cap td(L_{Y/T})^*)$$
$$= f_*(ch(F) \cap td(L_{Y/T})^* \cap \pi_*(td(L_{Z/Y})^* - [Z]))$$

も $CH(R)_{\mathbb{Q}}$ 内に定義することができる。よって次の局所化された Riemann-Roch 公式の予想をたてることができる。

予想　上の定義のもとで $CH(R)_{\mathbb{Q}}$ において次の公式が成立する

$$ch(Rg_*L\pi^*F) - ch(Rf_*F)$$
$$= f_*(ch(F) \cap td(L_{Y/T})^* \cap \pi_*(td(L_{Z/Y})^* - [Z]))$$

この予想を全く一般に示すことはできていない．しかし定理1の証明には十分である次の仮定のもとで示すことはできる．すなわち

定理3　Tが正則schemeでYが3次元正則schemeの被約な因子とする．ZがYの特異点の解消，RがTの正則閉部分schemeなら上の予想はなりたつ．

ここまで述べてきたようにして，定理1の証明がなされる．この節では以下定理3の証明についてのべる．まず広中の2次元schemeの特異点の解消[H]により，Yは正則な閉部分scheme CでそれにそってYが法平坦であるものを中心にして次々にblow upすることにより，特異点の解消ができることがわかる．このことから，各blow upごとに予想がなりたつことを示せばよい．そしてそれは実際に計算することによって確かめる．詳しいことは省略するが，だいたいどのような計算をするかは，次の例で想像できると思う．

例　Tを正則2次元局所環のSpec，Yをその被約な因子とし，CをTの閉点とする．ZをYのCを中心としたblow upとする．このとき$f: Y \to T$，$\pi: Z \to Y$，$R = \{C\}$としてF＝$\mathcal{O}_Y$の場合を考える．$CH_0(R) = \mathbb{Z}$と標準的に同一視する

すると左辺は．

$$ch(Rg_* L\pi^* F) - ch(Rf_* F) = \mathrm{length}\,(\pi_* \mathcal{O}_Z/\mathcal{O}_Y)$$

一方右辺は．Y の C での重複度を ℓ とし．P の C での blow up Q の例外因子を E とおくと．

$$\begin{aligned} & td(L_{Z/Y})^* - 1 \\ = & -\frac{1}{2}\left(c_1(\Omega^1_{Q/P}|_Z) - c_1(N_{Z/Q}) + c_1(\pi^* N_{Y/P})\right) \\ = & -\frac{1}{2}\left(c_1(\Omega^1_E|_Z) + c_1(\mathcal{O}(-\ell E)|_Z)\right). \end{aligned}$$

ここで $(E, Z) = \ell$ より．

$$\pi_*(td(L_{Z/Y})^* - 1) = \frac{1}{2}(\ell^2 - \ell).$$

したがってこの場合上の Riemann-Roch はよく知られた等式

$$\mathrm{length}\,(\pi_* \mathcal{O}_Z/\mathcal{O}_Y) = \frac{1}{2}\ell(\ell - 1)$$

となる．

§3．種数2の場合．

この節では．種数が2のときに上で用いた判別式と古典的な判別式との関係をのべて．それが標準因子の base locus で記述されることを示す．この結果は城崎でのシンポジウムでは話さなかったものです．S を今までどおり．剰余体が代数閉な Hensel 離散付値環の Spec とし．X を S 上の正則な曲線でさらにここでは X の種数が2と仮定する．この節では§1で定義した $\mathrm{ord}\,\Delta$ と少し異なる古典的な判別式 $\mathrm{ord}\,\Delta'$ を定義して $\mathrm{ord}\,\Delta$ と $\mathrm{ord}\,\Delta'$ の違いを調べる．

$g: Y \to T$をproper smoothなgeometrically connected な曲線で種数が2とする．§1では標準同型

$$\Delta:\ \det Rg_*\omega_{Y/T}^{\otimes 2} \xrightarrow{\sim} (\det Rg_*\omega_{Y/T})^{\otimes 13}$$

を用いて判別式を定義した．ここでは種数が2だから，標準写像

$$S^2 g_*\omega_{Y/T} \to g_*\omega_{Y/T}^{\otimes 2}$$

は同型となる．これから標準同型

$$\Delta_1:\ (\det R\cdot\omega_{Y/T})^{\otimes 3} \xrightarrow{\sim} \det Rg_*\omega_{Y/T}^{\otimes 2}$$

がえられる．このΔとΔ_1から重さ10のSiegel保型形式に対応する古典的な判別式を定める標準同型

$$\Delta':\ \mathcal{O}_T \xrightarrow{\sim} (\det Rg_*\omega_{Y/T})^{\otimes 10}$$

が直ちに定義される．このΔ'によって，$\mathrm{ord}\,\Delta'$が§1の$\mathrm{ord}\,\Delta$のようにS上の種数2の正則曲線に対し定義される．同様に$\mathrm{ord}\,\Delta_1$を定義すると　$\mathrm{ord}\,\Delta' = \mathrm{ord}\,\Delta + \mathrm{ord}\,\Delta_1$がなりたつ．

次にS上の種数2の正則曲線のbase locusについて考える．標準写像$f^*f_*\omega_{X/S} \to \omega_{X/S}$をkとする．種数$\geq 1$のsmooth曲線の標準因子はbase point freeであるからkはgeneric fiberでは全射になる．Iをkの余核の零化域，DをXの因子で$I_D \supset I$かつI_D/Iが長さ有限となるただ1つのもの．RをXの0-cycle $\sum_{x\in X} \mathrm{length}_{\mathcal{O}_{X,x}}(I_D/I)_x$とする．するとDとRの台はXの閉fiber$X_s$にはいる．この節の主結果は次のとおりである．

定理 4. 上の記号の下で.

$$\mathrm{ord}\,\Delta_1 = 2c_1(\omega_{X/S}) \cap D - D^2 + \deg R$$

系1 $\omega_{X/S}$ が base point free ならば Δ_1 は $\mathbb{Q}$ 加群の標準同型

$$\Delta_1 : (\det Rf_*\omega_{X/S})^{\otimes 3} \xrightarrow{\sim} \det Rf_*\omega_{X/S}^{\otimes 2}$$

を定める. また X が minimal なら Δ_1 は $\mathbb{Q}$ 加群の準同型を定め さらにこれが同型であるためには $\omega_{X/S}$ が base point free であることが必要十分.

系1の証明. まず Δ_1 が準同型あるいは同型を定めるということは $\mathrm{ord}\,\Delta_1 \geq 0$ あるいは $=0$ と同値であることに注意する. $\omega_{X/S}$ が base point free なら定理4より $\mathrm{ord}\,\Delta_1 = 0$. X を minimal とする 一般に $-D^2 \geq 0$, $\deg R \geq 0$ でありさらにこのときは $D \cdot c_1(\omega_{X/S}) \geq 0$ だから1つめの主張はよい. 等号はこのとき $D^2 = 0$. $D \cdot c_1(\omega_{X/S}) = 0$, $R = 0$ と同値だが. これが base pt. free と同値であることは容易にわかる

古典的な判別式 Δ' については次がなりたつ.

系2. $X \to S$ を定理4のとおりとすると

$$\mathrm{ord}\,\Delta' = -\mathrm{Art}(X/S) + 2c_1(\omega_{X/S}) \cap D - D^2 + \deg R$$

で Δ' はつねに $\mathbb{Q}$ 加群の準同型を定める. これが同型となるには X の minimal model が smooth となることが必要十分.

系2の証明. $\mathrm{ord}\,\Delta' = \mathrm{ord}\,\Delta + \mathrm{ord}\,\Delta_1$ だから上の等式は定理1と定理4から直ちに従う また $\mathrm{ord}\,\Delta'$ は blow up で不変だか

ら後半を示すにはXをminimal modelと仮定してよく　そのときは定理1の系1と定理4の系1からわかる.

定理4の証明は次のようにする　Mを$\mathcal{O}_X$加群の完全複体$[f^*f_*\omega_{X/S} \to \omega_{X/S}]$とする. ここで$f^*f_*\omega_{X/S}$は0次の項$\omega_{X/S}$は1次の項とする. すると$H^0(M)$は可逆層で$H^1(M)$は台が$X_s$にはいり他のcohomologyは消える　そこで局所化されたchern類$c_{2X_s}^{X}(M)$が$CH_0(X_s)$に定義される. これを実際に計算すると$c_{2X_s}^{X}(M)$は$2c_1(\omega_{X/S}) \cap D - D^2 + R$となることがわかる. 一方$M$の2回外巾$L\Lambda^2 M$は完全複体$[\Lambda^2 f^*f_*\omega_{X/S} \to \omega_{X/S} \otimes f^*f_*\omega_{X/S} \to \omega_{X/S}^{\otimes 2}]$と定義される　ここで$\Lambda^2 f^*f_*\omega_{X/S}$が0次の項である　複体$L\Lambda^2 M$は$X_\eta$で非輪状なので上と同様に$c_{2X_s}^{X}(L\Lambda^2 M)$が$CH_0(X_s)$に定義される. すると[S3]と同様にして$c_{2X_s}^{X}(L\Lambda^2 M) = -c_{2X_s}^{X}(M)$が示される. さらにそこと同様にRiemann-Rochを用いると

$$-\deg c_{2X_s}^{X}(L\Lambda^2 M) = \mathrm{length}_{\mathcal{O}_S} Rf_* L\Lambda^2 M$$

が示される. ここで少し計算すると右辺は.

$$\begin{aligned}&\mathrm{length}_{\mathcal{O}_S} Rf_* L\Lambda^2 M \\ &= \mathrm{length}_{\mathcal{O}_S}(\mathrm{Coker}(S^2 f_*\omega_{X/S} \to f_*\omega_{X/S}^{\otimes 2})) - \mathrm{length}_{\mathcal{O}_S} R^1 f_*\omega_{X/S}^{\otimes 2}\end{aligned}$$

となり　さらにこの右辺が$\mathrm{ord}\,\Delta_1$となることは容易にわかる.
このようにして定理4が証明される.

次に$\mathrm{ord}\,\Delta_1$のmoduli的な意味を述べる. $\Delta = \overline{M}_2 - M_2$には既約成分が2つある. 1つはnodeを1つもつ楕円曲線に対応す

るΔ_0で、もう1つが2つの楕円曲線が横断的に交わるものに対応するΔ_1である。すると$\mathrm{ord}\Delta_1$は§1で述べたような意味で、Xが定めるSとΔ_1の交点数と解釈できる。実際Xが極小でsemi-stableのときは、この交点数はX_sの特異点pで$X_s-\{p\}$が連結でないものの数となり、一方$\mathrm{ord}\Delta_1$もこれと一致する。

最後に上野氏の結果との関係について述べる。まずそれを簡単に復習する

定理(上野) Sの剰余体の標数が2.3.5でないとする。Xをminimalとすると、

$$\mathrm{ord}\,\Delta = -\mathrm{Art}(X/S) + (\text{補正項})$$

とかけて この補正項はXのsingular fiberのconfigurationで定まり、具体的に表で与えられる。

今までにみたことからこの補正項は$\mathrm{ord}\Delta_1$であり、定理4により$\omega_{X/S}$のbase locusのようすでかける。したがってこの結果との関係を完全にするには$\omega_{X/S}$のbase locusのようすをXのclosed fiberのconfigurationのようすでかけばよいが、それは上でのべたsemi-stableの場合を除くとまだほとんどなされていない。

文献

[B] S.Bloch, Cycles on arithmetic schemes and Euler characteristics of curves, to appear in Bowdoin conference in Algebraic Geometry, AMS Proc. Symp. Pure Math.

[D] P.Deligne, Le discriminant d'une courbe, Appendice 3 à "Lettre à Quillen", 20 June 1985.

[F] G.Faltings, Calculus on arithmetic surfaces, Ann. of Math. 119, pp.387-424, 1984.

[Fu] W.Fulton, Intersection theory, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[H] H.Hironaka, Desingularization of excellent surfaces, Appendix in Springer LNM 1101, pp. 99-132, 1984.

[M] D.Mumford, Stability of projective varieties, Ens. Math. 23, pp.39-110, 1977.

[O] A.P.Ogg, Elliptic curves and wild ramification, Amer. J. Math. 89, pp.1-21, 1967.

[S1] T.Saito, Conductor, discriminant and the Noether formula of arithmetic surfaces, to appear in Duke Math. J.

[S2] T.Saito, The discriminants of curves of genus 2, preprint 1988.

[S2] T.Saito, Self-intersection 0-cycles and coherent sheaves on arithmetic schemes, to appear in Duke Math. J.

[U1] K.Ueno, Discriminants of curves of genus 2 and arithmetic surfaces, preprint, 1987.

[U] K.Ueno, Discriminants of hyperelliptic curves and arithmetic surfaces, pp.100-147, in Arithmetic Algebraic Geometry ミニポジウム 報告集, 1987.