

## 断面種数による偏極多様体の分類について

東京大学 教養学部 藤田 隆夫

コンパクト複素多様体  $M$  とその上の ample 直線束  $L$  に対し、偏極多様体  $(M, L)$  の断面種数  $g(M, L)$  を次の公式

$$2g(M, L) - 2 = (K + (n-1)L) \cdot L^{n-1}$$

により定義する。ここで、 $K$  は  $M$  の canonical bundle,  $n$  は  $M$  の次元であり、右辺の和や積は  $M$  の Chow 環におけるものである。断面種数  $g$  は非負整数であることが知られている。

$\mathcal{P}$  が  $(M, L)$  に関する何らかの条件のとき、 $t_{n,g}(\mathcal{P})$  で  $\mathcal{P}$  を満たしかつ  $n = \dim M$ ,  $g = g(M, L)$  であるような偏極多様体の変形同値類の個数を表わす ( $\infty$  かもしれない)。ただし、 $(M, L)$  と  $(M', L')$  が変形同値とは、偏極多様体  $(M_0, L_0) = (M, L), (M_1, L_1), \dots, (M_k, L_k) = (M', L')$  で各々に対し  $(M_i, L_i)$  と  $(M_{i+1}, L_{i+1})$  とは同じ smooth polarized deformation family に属するようなものが存在することをいう。

本稿の主結果は次のように定式化できる：

定理。 $t_{n,g}(M, L)$  は curve 上の scroll でない) はすべての  $n, g$  に対し有限個である。

ここで、一般に、 $(M, L)$  が  $W$  上の scroll である、とは、 $W$  上の vector bundle  $E$  で  $M \cong \mathbb{P}(E)$  でありしかもこの同型で  $L$  と tautological bundle  $\mathcal{O}(1)$  とが対応するようなものが存在することを意味する。このように、curve 上の scroll というはっきりした構造をもつものを除けば、与えられた  $n, g$  をもつ  $(M, L)$  の変形同値類は有限個しかないから、その各類の特徴を具体的に記述すれば分類理論ができるはずである。そこで上の定理は分類理論の存在定理とみなせるが、分類理論そのものというわけではない。

$L$  が very ample の場合には断面種数とは  $M$  より超平面切断をくり返して得られる curve の種数に他ならない。これを fix したときの射影多様体  $M$  の分類はきわめて古い研究史をもつが、very ample でない場合はごく最近までは手がけられなかつた。森・川又氏らにより代数多様体の標準直線束が nef (数値的に半正値) でなくなる要因が解明されてきた結果、その polarized version というべき理論が駆使できるようになり  $g \leq 1$  の場合の分類はほぼ完成した ([F4] 参照)。 $g=2$  の場合は一部未完成だがかなり良い結果に達している ([F3] 及び [F3'] 参照)。本稿主定理 (より正確にいえば

その証明) は,  $g=2$  で用いられた方法が適当な一般化をほどこせば仕事の  $g$  においても有効であることを示している。しかしもちろん, 分類表を具体的に仕上げていくには, 上述の基本方針に加えて, 様々の場合へに応じた ad hoc の技法を用いねばならない。これは  $g=2$  の場合では相当に面倒な作業であった。

だが, 分類のためのアルゴリズムを確立するための最大の困難は別にある。主定理の証明にあたって我々は  $K + (n-2)L$  が nef かどうかで場合をわける。nef でなければ森・川又理論 (の polarized version) の出番である。nef のときは松阪の大定理で片づける (cf. §1)。だが, この松阪大定理はあまりにも強力かつ一般的であり過ぎる。Hilbert 多項式を決めれば  $(M, L)$  の変形型が有限個しかないことはこれから簡単に出てくるが, その有限個の変形同値類を具体的に求めるための手続は一般には全くないものである。実際,  $g=2$  の場合でも, 分類が未完成なのは  $K = (3-n)L$  の場合だけであるが, Hilbert 多項式は容易に決定できるのに, 変形類については大したことはわかっていない。例えば, このような  $(M, L)$  のうち  $M$  が单連結なものが何種類あるか今のところ不明である (weighted complete intersection になるものが 2 種あるが, 他にもあるかも知れない)。

$K + (n-2)L$  が nef でない場合には分類アルゴリズムをかなり具体的に与えることができる。曲面の極小モデルの理論の polarized version (詳しくは後述) を考えることにより  $(M, L)$  が "minimal" な場合に問題を帰着できる。さてそのとき,  $n \geq 3$  なら Fano fibration が存在することになるのでそれ的具体的調査をすれば済む。 $n=2$  なら  $M$  が普通の意味で相対的極小になるまで blow down して考えるが,  $L$  が関係するため高次元には見られない様々な問題が派生していく。その代り, この困難を克服すれば, 分類完成は間近い。もっとも, ruled polarized surface の場合に限っても, この過程には大量の数値計算と場合わけ作業が必要となる。そこで我々はこの目的のためのコンピュータープログラムを作成した。これにより  $g \leq 10$  の ruled polarized surface の変形同値類分類表として 12 万種あまりのタイプが数え上げられた。これらがすべて実際に存在することはまだ証明できていないが実験的には正しような気配である。一方, これらがすべての可能性を尽くしていることは (プログラムに虫がないければ) OK なので,  $t_{2,g}$  ( $M$  is ruled) の上からの評価は具体的に与えられていくことになる。詳細は §5 参照。

本稿で扱う事項の証明等は [F5] を見ていただきたい。

## §1. 松坂理論

ここでの主目的は  $t_{n,g}(K + (n-2)L \text{ is nef})$  が有限であることを示すことである。

どんな多項式  $p(m)$  に対しても,  $t_{n,g}(X(M, mL)) = p(m)$  は松坂大定理より有限であるから,  $(M, L)$  のヒルベルト多項式に有限個の可能性しかないことを示せばよい。

まず,  $2g-2 = (K + (n-2)L)L^{n-1} + L^n$  だから, 右辺各項は仮定のもとでは  $\geq 0$  なので, ともに  $\geq 0$  で評価できる。ここで  $d = L^n$  も fix して考えてよいが, 一般論によれば  $d$  と  $g$  を固定するとヒルベルト多項式には高々有限個の可能性しかないことがいえる (cf. [KM])。これは以下のように簡単に証明できる。

$A_m = K + mL$  とおくと, 仮定より  $A_m$  は  $m \geq n-1$  ならば ample である。 $\alpha_j = A_m^j L^{n-j}$  とおけば,  $\alpha_0$  と  $\alpha_1$  とは  $d$  と  $g$  で定まり, もろんこれで評価できる。一方, Index Theorem の高次元版により  $\alpha_{j-1}\alpha_{j+1} \leq (\alpha_j)^2$  であるから, まにに関する帰納法ですべての  $\alpha_j$  が評価できる。

そこで,  $m = n, \dots, 2n$  に対して  $A_m^n$  が評価できたとしてよい。他方, 松坂 - Mumford 不等式 (cf. [MM]) によれば  $\rho^*(M, A_m) \leq n + A_m^n$  であり, これがすべて有界となる。ところが, 小平の消滅定理と Serre 双対定理より

$\chi^0(M, A_m) = (-1)^n \chi(M, -mL)$  だから、これらの評価が得られる。

最後に、ヒルベルト多項式が  $n$  次式であることより、その各係数は  $\chi(M, -mL)$  の  $m = n, \dots, 2n$  での値の一次式として定められることを用いれば、証明が完了する。

以上で理論的にはおしまいであるが、実用上は全く不十分である。評価をきちんとやっていければ、与えられた子に対して可能なヒルベルト多項式を数え上げることはできるが、そうして得られる分類表は best possible なものからほ程遠いと思われる。臨機応変の手法で可能性をさうに絞りこむことにより初めて分類理論らしきものが出来上がってくるだろ。

## §2. Adjoint bundle の理論、そして $(M, L)$ の極小モデル

ここでは [F4] の理論の役割を説明する。これが我々の戦略の心臓部である。  
 $\overbrace{BVI(I_0)}$

§1. の議論により  $A_{n-2} = K + (n-2)L$  は nef でない、として考えてよい。一方、次の事実がある。

Fact (cf. [F4; Theorem 182]).  $A_{n-1} = K + (n-1)L$  は、以下の場合を除けば nef である。

1)  $(M, L)$  は  $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1))$ , 2 次超曲面  $(\mathbb{Q}^n, \mathcal{O}(1))$  又は

$(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(2))$  と同型。

2)  $(M, L)$  は曲線上の scroll。

Fact 2 (ibid, Theorem 3 & 3').  $n \geq 3$  のとき,  $A_{n-1}$  が nef だが  $A_{n-2}$  は nef でないとするとき, 次のどれかが成立:

a)  $M$  上の因子  $E$  で,  $(E, L_E) \cong (\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}(1))$  かつ  $\mathcal{O}[E]_E = \mathcal{O}_E(-1)$  なるものがある。 $E$  は smooth point に blow-down できる。

b0)  $K = (1-n)L$  であり, Picard 数  $P(M)$  は 1。

b1) 曲線  $C$  上の fibration  $f: M \rightarrow C$  で, general fiber を  $F$  とすると  $F$  は  $\mathbb{P}^n$  内の 2 次超曲面,  $L_F$  は  $\mathcal{O}_F(1)$  となるものがある。さらに  $P(M) = 2$  であり, すべての fiber が 2 次超曲面になる。

b1') 上のような  $f: M \rightarrow C$  があり, すべての fiber  $F$  に対して  $(F, L_F)$  は  $(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(2))$  と同型。特に  $n=3$ 。

b2)  $(M, L)$  は曲面  $S$  上の scroll である。

さて, 我々の主定理では曲線上の scroll の場合は除いていいから,  $A_{n-1}$  は nef としてよい。そこで,  $n \geq 3$  ならば, Fact 2. のどれかの条件が満たされから, それぞれの場合を各個擊破する。 $n=2$  では森理論を用いて同様に考えてゆくのだが, 高次元にはなかつた困難が出てくる。その詳細は §4 で記す。

まず前記 Fact 2-a) の場合を扱うため，極小曲面の理論の polarized 版を考える。

Def. 偏極多様体  $(M, L)$  (ただし  $n = \dim M \geq 2$  とする) が極小とは，2-a) のような因子  $E$  が存在しないことをいう。

$(M, L)$  が極小でなければ，2-a) のような  $E$  が存在するから，その一点への blow-down を  $M^b$  とする。 $L + E$  は  $M^b$  上の直線束  $L^b$  の引き戻しとなり， $L^b$  は  $M^b$  上 ample であることも容易にわかる。このようなとき， $(M, L)$  は  $(M^b, L^b)$  の simple blow up と呼び， $(M^b, L^b)$  は  $(M, L)$  の simple blow down ということにしよう。

さて， $(M^b, L^b)$  が極小でなければ，さらにその simple blow down を考える。以下同様にくり返せば，ついには極小な  $(M_0, L_0)$  を得る。このとき，これを  $(M, L)$  の極小モデルと呼ぶ。

$M^b$  の標準直線束を  $K^b$  とすると， $K^b + (n-1)L^b$  の  $M$  への引き戻しは  $K + (n-1)L$  になる。そこで  $(M^b, L^b)$  の断面種数は  $g$  で不变である。一方  $(L^b)^n = L^n + 1$  である。従って，極小モデルに達するまでの simple blow down の回数を  $r$  とすれば， $g(M_0, L_0) = g$  かつ  $(L_0)^n = L^n + r$  である。

以上より,  $t_{n,\infty}(K + (n-1)L)$  は nef, かつ  $(M, L)$  は  
極小)  $< \infty$  が言えれば十分なことがわかる。

実際, 極小なるものの変形型が有限個しかなく分類できているとしよう。すると, 一般の  $(M, L)$  に対しても, その極小モデル  $(M_0, L_0)$  は有限個の型のどれかである。そこで, この型を fix して,  $(M, L)$  の型の有限性を示せばよい。さて, 前述の如き blow down の回数を  $r$  とおけば,  $r = (L_0)^n - L^n < (L_0)^n$  だから,  $(M_0, L_0)$  の型を固定してある以上  $r$  は有界である。一方,  $(M_0, L_0)$  の型と  $r$  によって  $(M, L)$  の型が決まることも容易にわかる。これらより  $(M, L)$  の有限性が示せる。

なお, 極小モデル  $(M_0, L_0)$  は  $(M, L)$  に対し unique に決まるわけではないが, 上の論法にはさしつかえない。

かくて,  $K + (n-1)L$  は nef,  $(M, L)$  は極小, そして考えてよいことになった。論理的には以下  $n=2$  の場合をまず証明し, その結果を一部用いて  $n \geq 3$  の場合に取りかかるべきなのであるが, 心理的な説明の便宜上高次元の方を先に解説する。 $n=2$  の場合は §4 にまわす。

### §3. $\dim M \geq 3$ の場合

$(M, L)$  は極小で  $A_{n-1} = K + (n-1)L$  は nef であるが,

$A_{n-2} = K + (n-2)L$  は nef でない場合を調べる。前節の Fact 2 により条件 b0) ~ b2) のどれかが成立つ。

b0) のとき、 $(M, L)$  は Del Pezzo 多様体と呼ばれるものになるが、特に  $\Delta$  種数は 1 である。 $\Delta$  種数の理論により Del Pezzo 多様体の分類はきちんとできているので、この場合は OK となる。もっとも、Del Pezzo 多様体のヒルベルト多項式は簡単に計算ができるので、松阪理論を頼ることにするならば、変形型の有限性だけの証明なら大して手間はいらない。

b2) のときは  $(M, L) \cong (\mathbb{P}_s(\mathcal{E}), \mathcal{O}(1))$  となるような  $S$  上の局所自由層  $\mathcal{E}$  がある。もし  $\text{rank } \mathcal{E} = n-1 \geq 2$ 。  
 $\mathcal{E}$  は Hartshorne の意味で ample だから、 $D = \det \mathcal{E}$  は  $S$  上 ample である。簡単な計算により  $g(S, D) = g(M, L)$  が得られる（注意：これは  $\dim S \leq 2$  であるが故の特殊事情であって、 $\dim W \geq 3$  ならば  $W$  上のベクトル束  $\mathcal{E}$  に対しては  $g(\mathbb{P}(\mathcal{E}), \mathcal{O}(1))$  と  $g(W, \det \mathcal{E})$  とは普通は等しくない）。また、 $S$  内のどんな非特異有理曲線  $Z$  に対しても、 $\mathcal{E}_Z$  は ample で decomposable となるから  $D_Z > 1$  である。従って、 $(S, D)$  は curve 上の scroll ではなく、極小であることも言える。主定理が  $n=2$  では正しいものとすれば、このような  $(S, D)$  の変形型は  $g$  を固定したとき有限個しかない。そこで、 $(S, D)$  の型も固定してよい。特に

$C_1(\mathcal{E})^2 = D^2$  は fix してよい。

一方よく知られた公式より  $L^n = S_2(\mathcal{E}) = C_1(\mathcal{E})^2 - C_2(\mathcal{E})$  である。ところが、 $L^n$  はもちろん、 $\mathcal{E}$  が ample なことより  $C_2(\mathcal{E})$  も正整数だから (cf. [BG])；両者ともに  $D^2$  で表えられる。 $\chi(M, mL) = \chi(S, S^m \mathcal{E})$  (ここで  $S^m$  は  $m$  次対称積を表わす) であることで、 $S$  上の Riemann-Roch 定理を用いれば、ヒルベルト多項式  $\chi(M, mL)$  は  $C_2(\mathcal{E})$  と  $(S, D)$  で決まる量で表わせる。ここで  $\chi$  の有限性がいえる。最後は、まあ、松坂大定理を用いればよい。だが、現実の分類問題の状況に於ては、 $\mathcal{E}$  の型を分類することができて、自然に  $(M, L)$  の分類表ができて行くことであろう。

b1) 及び b1') のときは互いに似たやり方ができる。b1) のとき、 $\mathcal{E} = f_*(\mathcal{O}_M[L])$  は  $C$  上局所自由で rank  $n+1$  である。さらに、 $M$  は  $P = \mathbb{P}(\mathcal{E})$  上の因子として自然に埋め込まれ、 $\mathcal{O}_P(1)$  を  $H$  とおけば  $M \in |2H + \pi^*B|$  となるような  $C$  上の直線束  $B$  が存在することもわかる。 $\pi$  は自然な map  $P \rightarrow C$  で、その  $M$  への制限が  $f$  である。 $g$  を  $C$  の種数、 $e = C_1(\mathcal{E})$ 、 $\gamma = \deg B$  とおけば、これら 3 つの整数により  $(M, L)$  の変形型が定まることは容易にわかる。そこでこれらを評価すればよい。

まず、 $A = \omega_C \otimes \det \mathcal{E} \otimes B$  に対し、 $f^*A = K + (n-1)L$

となることがわかる。消滅定理より  $H^1(M, f^*A) = 0$  だから,  $H^1(C, A) = 0$  である。故に  $1 + \deg A \geq g$ 。他方  $2g - 2 = L^{n-1} \cdot f^*A = 2 \deg A$  より  $g \leq \frac{1}{2} \deg A$ , かくて  $g$  は有界である。

次に,  $M$  をその零点としてもつ  $H^0(P, 2H + \pi^*B) \cong H^0(C, S^2 E \otimes B)$  の元を一つ fix する。 $C$  の各点  $x$  に対し,  $\pi^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^n$  の首次座標に関する 2 次式, そしてそれに対応する  $(n+1)$  次の対称行列が定まるわけであるが, この行列の  $\det$  をつなぎあわせることにより, 自然に  $(\det E)^{\otimes 2} \otimes B^{\otimes(n+1)}$  の  $C$  上での正則切断ができる。なお, この切断の零点は  $f$  の singular locus と一致する。ともあれ, これより

$2e + (n+1)g \geq 0$  を得る。これに加え,  $0 < L^n = 2e + g$  であること,  $2g - 2 + e + g = \deg A = g - 1$  及び  $g$  の有界性とをあわせると, もともと  $g$  は有界となることがわかる。

b1') のときは,  $H = K + 2L$ ,  $E = f_*(\mathcal{O}_M(H))$  ておく。 $E$  は  $C$  上局所自由で rank 3,  $M \cong \mathbb{P}(E)$  で  $H$  が  $\mathcal{O}(1)$  になる。そこで  $L = 2H + f^*B$ ,  $B \in \text{Pic}(C)$  としてよい。 $g$  を  $C$  の種数,  $e = C_1(E)$ ,  $g = \deg B$  とおく。これらの値により  $(M, L)$  の変形型が定まる。

簡単な計算により  $2g - 2 = 4e + 4g$ ,  $L^3 = 8e + 12g$

となるが、これより  $6g-6 = L^3 + 4e$  を得る。他方、 $H$  は nef だから  $0 \leq H^3 = e$ 。従って、 $g$  を fix すれば、 $e$  も  $L^3$  も有界となる。故に  $\gamma$  もこう。その有界なことも容易に示せる。

注意。松坂大定理を頼るなら、今まで述べたように、 $L^n$  の有界性を示すだけで十分である。しかし、このまで述べた方法は、よりくわしい分類を具体的に求めるための方法としても役に立つ。

#### §4. $\dim M = 2$ の場合

$K+L$  は nef,  $(M, L)$  は極小,  $K$  は nef でないとして考えてよい。従って次の 3 つの場合がある:

①  $M \cong \mathbb{P}^2$ .

②  $M$  は curve 上の  $\mathbb{P}^1$ -bundle.

③  $E^2 = -1$ ,  $E \cong \mathbb{P}^1$  となる曲線（以下 (-1)- 曲線と呼ぶ）が存在する。なお、 $(M, L)$  は極小だから、 $L \cdot E > 1$  である。

① はもうろん気にしなくてよい。② の場合、 $M \cong \mathbb{P}(E)$  となるような曲線  $C$  上のベクトル束  $E$  をとる。これは  $e = c_1(E)$  が 0 又は 1 となるよう選ぶこととする。③(1) を  $H$ , 射影  $M \rightarrow C$  の fiber を  $F$  とすれば、 $NS(M)$  は  $H$  と  $F$  で生成される自由アーベル群であり、 $L \hookrightarrow aH + bF$  とお

ける。ここで、 $\sim$  は数値的に同値なことを表わし、 $a$  と  $\epsilon$  は整数である。さらに  $C$  の種数を  $g$  とすれば、 $(M, L)$  の変形型は  $g, \epsilon, a, \beta$  で決まるから、これらが有界であることを示せばよい。

まず、 $K+L$  は nef だから  $a > 1$  である。次に  $ea + 2\beta$  を  $Z$  とおけば  $L^2 = aZ$  となる。よって  $Z > 0$ 。また、 $K \sim -2H + (2g-2+\epsilon)F$  だから、 $2g-2 = (a-1)Z + 2a(\beta-1)$  を得る。そこで  $2g-2 > 2a(\beta-1) \geq 4g-4$ 、かくて  $\beta$  は有界である。 $a, Z$  が有界であることもすぐわかり、従って  $\beta$  も有界である。

こうして②の場合は片づいた。

Fact 2 と比較すればわかるように、③は高次元には相当する場合がなく 2 次元特有のものである。この場合  $E$  の blow-down を  $M \rightarrow M^b$  とし、 $m = LE$  とおくと、 $L+mE$  は  $M^b$  上の ample 直線束  $L^b$  の引き戻しになる。ところが、 $(M^b, L^b)$  の断面種数は  $g + \frac{1}{2}m(m-1)$  になり、増えてしまう。だから、へたにやると分類はできない。

そこで、 $M$  内の  $(-1)$  曲線のうち  $m$  の値が最小となるものを選んで blow-down していくことにする。 $K^b + L^b$  は nef であることに注意。以下このように  $(-1)$  曲線をうまく選びつつ blow-down していくと、ついには canonical bundle が

nef になるか, ②の場合かになる。このプロセスを  $(M, L) = (M_r, L_r) \rightarrow \dots \rightarrow (M_1, L_1) \rightarrow (M_0, L_0)$  とする。つまり,  $M_i$  の標準直線束を  $K_i$  とすれば,  $M_0$  が曲線上の  $\mathbb{P}^1$ -bundle でない限り  $K_0$  は nef である。このような過程を "admissible minimization" と呼ぶが,  $(M, L)$  に対し unique に定まるとは限らない。 $M_j \rightarrow M_{j-1}$  でつぶれる  $(-1)$  曲線を  $E_j$  とし,  $L_j E_j$  を  $m_j$  とおく。数列  $(m_1, m_2, \dots, m_r)$  を adjoint spectrum と呼ぶ。

ここで最大のキーは,  $m_j K_j + L_j$  が  $M_j$  上 nef であることである。実際,もし nef でなければ, 森理論により extremal rational curve  $Z$  で  $(m_j K_j + L_j)Z < 0$  なるものがある。しかし,  $M_j$  は  $\mathbb{P}^2$  も  $\mathbb{P}^1$ -bundle でもないから,  $Z$  は  $(-1)$  曲線でしかあり得ない。すると,  $E_j$  の選び方より  $L Z \geq m_j$  のはずで, 先の不等式と矛盾してしまう。

$m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_r$  であることも注意しておく。実際,  $m_j K_{j-1} + L_{j-1}$  の  $M_j$  への引き戻しは  $m_j K_j + L_j$  だから, これは  $M_{j-1}$  上でも nef である。よって  $0 \leq (m_j K_{j-1} + L_{j-1})E_j = m_{j-1} - m_j$  を得る。

主定理の証明には必要ないので理由は省略するが, この adjoint spectrum が実は admissible minimization の二方によるず, しかも  $(M, L)$  の変形型だけで決まることが示

せる。変形不变量としてはこれは極めて強力である。

さて、主定理の証明にあたっては  $M$  が ruled かどうかで場合をわける。 $M$  が non-ruled なら、 $K_0$  は nef である。簡単な計算により  $2g-2-L^2 = KL = K_0L_0 + m_1 + \dots + m_r$   $\geq m_1 + \dots + m_r$  となるから、 $L^2 = m_j$  も  $j$  を固定すれば有界である。そこで松阪理論に帰着する。

$M$  が ruled なら、 $M_0$  は種数  $g$  の曲線上の  $\mathbb{P}^1$ -bundle である。 $m_r \geq 2$  だから  $2K+L$  は nef である。よって  $0 \leq (2K+L)^2 = 32(1-g) + 8(g-1) - 3L^2 - 4r$ 、ここで  $g$  を fix すれば  $g$  も  $L^2$  も  $r$  も有界になる。これでもう松阪理論を用いることもできるが、もう少し初等的方法でがんばってみよう。

上の考察より  $L^2, KL, K^2, g, r$  をすべて fix して考えてよい。このとき、 $0 \leq m \leq m_r$  となすすべての実数  $m$  に対して  $0 \leq (mK+L)^2$  となる。このような  $m_r$  は有限個しかなく、その範囲は  $K^2, KL, L^2$  によって定め得る。その内の一つの  $m_r$  を fix すれば、 $K_{r-1}^2, K_{r-1}L_{r-1}, L_{r-1}^2$  が決まり、上と同様にして  $m_{r-1}$  の範囲が定まる。以下同様にしてあり得る adjoint spectrum をすべて数え上げることができる。 $m_r, \dots, m_1$  を固定すれば、 $K_0L_0, L_0^2$  も定まるから②の場合のやり方で  $(M_0, L_0)$  を分類する。このようにして

$(M, L)$  の変形型を分類するためのかなりは、きりしたアルゴリズムが得られる。

上の方針に基きこの目的のためのコンピューター・プログラムを作った。これについては次のとて紹介する。ただ、理論的には不要なので上では述べなかつたのだが、可能性を能率的にしほり込むための補助的考察がいくつかあり、それを組み込むことにより初めて現実に実行可能な計算速度をもつプログラムができたことを記しておきたい。

なお、断面種数により偏極曲面を分類する話は最近リバーバルの兆しがあり、イタリアを中心としてかなりの研究者が取り上げている。 $g \leq 2$  の場合はいろんな人がいろんな形でやつてゐるが、 $g > 2$  でしが very ample とは限らない場合を扱つていける例は非常に少ない。前田英敏氏は [Ma] で  $g = 3$  の場合を扱つてゐる。方法は先に記した我々のものとほぼ同様だが、 $g = 3$  に特有の考察をも用いて計算を簡略化している。こうした工夫をもつて排除していくことにより前述のプログラムができたといえる。また、 $g \leq 3$  での分類が既に得られていたことが、プログラムの虫取り作業にあたって大きな助けになることをも記しておきたい。

$M$  が ruled でない場合には分類理論はまだ全く力不足である。特に、 $M$  が一般型の場合には難しいだろう。しかし、小平

次元が 1 以下の場合に限るなら、松阪理論に頼らずに具体的な分類が得られると期待できる。しかし実情は、 $g=2$  の場合すらかなり難しい。例えば、 $KL = L^2 = 1$ ,  $K^2 = 0$  で  $M$  が橋円曲面となるような例が存在するかどうか未だわかっていない。

### §5. コンピューター・プログラム

前節のアルゴリズムによりつくられたプログラムの概要を説明したい。現在これは N88 - 日本語 BASIC (MS DOS 版) で書かれた 3 つのプログラム、イル "POLSUR.R", "POLSUR.E", "POLSUR.G" として存在している。興味ありの方は、5.25インチの空フロッピーディスクを送って下さればコピーをせし上げますので、自由に操作、解析、書き換える等していただければ幸いです。

さて、"POLSUR.R" は  $(M, L)$  が極小、 $M$  が有理曲面であるような偏極曲面の変形型の分類を行なうべく設計されている。起動すると Classification of rational polarized surfaces とタイトルが出て 1. Introduction か 2. Main program かと問う。2 を入力 (2 に続きリターンキーを押す) すると Main program に直行するが、1 を選んでみよう。すると、このプログラムの扱う問題についての簡単な説明文

が出てくる。リターンキーを押すと新たなパラグラフが出てくるが、最後には 1. read the introduction again 2. Main program と問うてくる。1.を選べば説明をくり返すが、もうXの必要はあるまい。Main programに入ると作動パラメータが表示される。例えば 1.  $g = 2$  と初期状態ではなっているが、これは断面種数2のものをさがす態勢になっていたことを意味する。これを変更したければ 1. を入力する。又、"g = ?" と問うてくるから、例えば 5 なら 5 を入力すれば、再び元の状態になって 1.  $g = 5$  と表示される。gとして 50 を大きく越える数を代入すると、分類を開始したときエラーが発生する可能性がある。同様に他のパラメータも設定できる。例えば 2. を入力すると "L<sup>2</sup> = ?" と問うてくるが、ここで例えば 1 を入力すれば、 $L^2 = 1$  であるような (M, L)だけをさがす。一方 0 を入力すると、 $L^2$  に対しては条件をつけずある (M, L) をさがす態勢になる。同様に 3. では K<sup>2</sup> の値を設定する。"K<sup>2</sup> = ?" のときに 9 を入力すれば K<sup>2</sup> に対しては条件をつけない。4. と 5. は画面に出力する様式を定めるもので、後で説明する。6. は Introduction にモードするためのもの。さて、こうして準備ができたら、0 を入力すると分類が開始される (X の前に画面は一度クリアされる)。初めの 4. が "describe each type" になっていたと、

各変形型に対し、 $(M, L) \rightarrow \dots \rightarrow (M_0, L_0)$  を admissible minimization,  $M_0 \cong P(\varepsilon)$ ,  $H = O(1)$ ,  $\varepsilon = C(\varepsilon)$  ( $= 0$  or 1),  $L_0 \sim xH + yF$  ( $F$  は fiber) としたとき,  $L^2$ ,  $KL$ ,  $K^2$ ,  $\varepsilon$ ,  $x$ ,  $y$ , 及び adjoint spectrum  $m_1, \dots, m_r$  が画面に表示される。表示の順序は次のような辞書式順序による: ①  $L^2$  の小さい方が先。②  $K^2$  の大きい方が先。③  $m_r$  の大きい方が先。④  $m_{r-1}$  の小さい方が先。…… (r+2)  $m_1$  の小さい方が先。 (r+3)  $\varepsilon$  の小さい方 (つまり  $\varepsilon = 0$ ) 優先。そして、各  $L^2$  及び  $K^2$  の値ごとに、変形型が何種あったか個数を表示する。最後に、こうしてみつかった型の合計数を表示して休止する。スペース (他のキーでもよい) を押すと休止は終了し、画面がクリアされ、再び作動パラメーターが表示される。4. は "describe each type" 又は "number of types only" のどちらかの状態にセットされており、4 を入力すれば他方に変化する。"number of types only" で 0 を入力したときは、各変形型の不变量を出力することはせず、ただその個数のみを出力する。5. は初期状態では "without pause" となるが、これでは表示のペースが速すぎて読み取りにくことが多い。そんなときは 5 を入力すれば休止の入れ方を設定できる。"pause at each type" なら変形型がみつかるたびにその不变量を表示して休止する。"pause at each LL" なら  $L^2$  の

値が変化するたびに休止する。休止はいずれもスペースを押すまで続く。もちろん、1, 2, 3 を入力して  $g$ ,  $L^2$ ,  $K^2$  の値を設定し直すこともできる。プログラムを終了するには STOP キーを押して BASIC にモード。

このプログラムのままではプリンターに出力することはできないが、そのまゝに書き直すことは容易である。数ヶ所にある print 命令を lprint 命令に改めるだけですむ。

$g$ ,  $L^2$ ,  $K^2$  を不意に指定して動かすと変形型の個数が多くなるため止まらなくなってしまうことがある（例えば、 $g=50$  で  $L^2$  と  $K^2$  を fix しないで動かすと、終了までには何億年もかかりそうに思える。経験的には所要時間はほぼ変形型の個数に比例し、 $g$ に関しては指數関数に近い感じで増加する。 $g=10$  なら数十分である。）。ちなみ、たら STOP キーを押すより終了のすべてはない。なお、計算時間は 4. の状態にもかなり影響される。もちろん "number of types only" の方が速い。また、経験的には、 $K^2$  を非負整数に指定しておけば、 $g$ を相当大きくしても上のような現象は起こらない。なぜこのようになるのか理論的に説明できるはずであるが、今のところよくわからない。

"POLSUR-E" 及び "POLSUR-G" もほぼ同様であるが、"E" の方は  $g=1$  の場合の分類を行ない、"G" は  $g \geq 2$  の

場合を扱う。"G"においては  $\gamma$ ,  $L^2$  などの他に  $\gamma$  も作動パラメーターとして指定できる。

これらにより  $\gamma \leq 10$  の場合の分類は一応できる。 $\gamma = 11$  ではきわめて馬鹿馬鹿しい理由によりトラブルが発生する。 $\gamma = 11$  では  $L^2, K^2$  を指定しなければ変形型の個数が  $2^{15}$  を超えてしまう。当プログラムではこれが BASIC の整数変数として格納されているために, overflow エラーが生じてしまふのである。計算を施しプログラムを改良するのは容易だが、サポートまだやっていない。

結果の一部は [F5] にある。とくに  $\gamma = 9$  の場合の分類表がのっている。なお、このプログラムの分類表に出てくる各変形型がはたして実際に存在するか、は未だ一般にはわからぬ。指定のごとく  $\Sigma_e$  (あるいは  $P^1$ -bundle) を blow-up してみて  $(M, L)$  を構成したとき,  $L$  が ample かどうかがチェックしにくないのである。ただ、数つかの場合には確認できている。

## 文 献

[BLP] M. Beltrametti, A. Lanteri & M. Pallareschi :

Algebraic surfaces containing an ample divisor of arithmetic genus two, preprint.

- [BG] S. Bloch & D. Gieseker : The positivity of the Chern classes of an ample vector bundle, Invent. Math. 12 (1971), 112 - 117.
- [F1] T. Fujita : On the structure of polarized varieties with  $\Delta$ -genus zero, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 22 (1975), 103 - 115.
- [F2] — : On the structure of polarized manifolds with total deficiency one, part I, II & III, J. Math. Soc. Japan 32 (1980) 709 - 725, 33 (1981) 415 - 434 & 36 (1984) 75 - 89.
- [F3] — : On polarized manifolds of sectional genus two, Proc. Japan Acad. 62 (1986), 69 - 72.
- [F3'] — : Classification of polarized manifolds of sectional genus two, Dedicated to Prof. M. Nagata, preprint.
- [F4] — : On polarized manifolds whose adjoint bundles are not semipositive, in Algebraic Geometry Sendai 1985, pp. 167 - 178, Advanced Studies in Pure Math. 10, 1987.
- [F5] — : On classification of polarized manifolds by sectional genus, preprint.
- [Io] P. Ionescu : Ample and very ample divisors on surfaces, to appear in Rev. Roum. d. Math. Pure et Appl. 33 (1988).

- [I<sup>o</sup>] P. Ionescu : Generalized adjunction and applications, preprint.
- [KMM] Y. Kawamata, K. Matsuda and K. Matsuki , Introduction to the minimal model problem, in Algebraic Geometry Sendai 1985, pp. 283 - 360, Advanced Studies in Pure Math. 10, Kinokuniya, 1987.
- [KM] J. Kollar and T. Matsusaka : Riemann - Roch type Inequalities, Amer. J. Math. 105 (1983), 229 - 252.
- [Ma] H. Maeda, On polarized surfaces of sectional genus three, preprint.
- [Mt] T. Matsusaka: Polarized varieties with a given Hilbert polynomial, Amer. J. Math. 94 (1972), 1027 - 1077.
- [MM] T. Matsusaka and D. Mumford : Two fundamental theorems on deformations of polarized varieties Amer. J. Math. 86 (1964), 668 - 684.
- [Mo] S. Mori : Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective, Ann. Math. 116 (1982), 133 - 176.