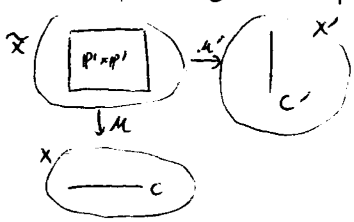
代数幾何学シンポジウム記録
1987年度 pp.143-168

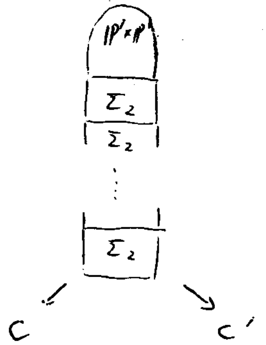
3次元多様体の中の孤立した$\mathbb{P}^1$の法線束について

千葉大・教養　安藤哲哉

§1. はじめに

まず X が3次元非特異射影多様体で C は $\mathbb{P}^1$と同型な X 内の曲線で, X の標準因子 K_X との交点数は $(K_X \cdot C)=0$ としてみよう。このような (-2)-curve の法線束は $N_{C/X}=(-1,-1), (-2,0), (-3,1), \cdots$ (ただし $(a,b):=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b)$) である。$N_{C/X}=(-1,-1)$ の時には X を C で blow up し, 得られた $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ を反対方向に blow down する基本変換があり, $N_{C/X}=(-2,0)$ で C が動かない時には, C で blow up して得られた Σ_2 の (-2)-section で blow up し, この Σ_2 の (-2)-section で blow up する操作有限回後に得られる $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ を今度は逆方向に blow down する$\cdots$という基本変換が知られている。しかし $N_{C/X}=(-3,1)$ の場合からは話がむつかしくなってくる。以下に述べる話はまだまとまった形をもったものではなく, 成功する可能性も小さいものであるが, 3次





元多様体を研究する上で一度は考えてみなければならない問題ではないかと思える。

$N_{C/X}=(-3,1)$で孤立している，という条件の$C(\cong\mathbb{P}^1)$を扱いたいがまだこれはできない。かわりにCが1次元fibreの成分と仮定する。すなわちある写像$f:X\to Y$と$p\in Y$が存在し，$C\subset f^{-1}(p)$かつ$\dim f^{-1}(p)=1$とする。当分$\dim f=\dim X-\dim f(X)$は0でも1でもよく，また$\dim X$は3以上でよい。この仮定では，

<u>Prop. 1</u> ある定まったX上のdivisor Aをとり，$\mathrm{supp}\,\Gamma=C$なる任意のXのsubscheme Γに対し$H^1(\Gamma,\mathcal{O}_\Gamma(A))=0$とできる。特に$\dim f=0$の時は$A=K_X$，また$\dim f=0$で$(K_X\cdot C)\leqq 0$の時は$A=0$と$A$を選ぶことができる。（証明は§2）

そこでΓとしてCをいろいろな方向に膨らましたものをとり，$\chi(\mathcal{O}_\Gamma(A))\geqq 1$から得られる不等式によって$N_{C/X}$や$C$をblow upして得られるHirzebruch surfaceのminimal sectionの法線束についての情報を得ようということが，この論文の主旨である。以後記号の節約上法線束のかわりにその双対である余法線束I_C/I_C^2（I_Cは$\mathcal{O}_X$におけるCの定義ideal）ばかりを考える。$I_C/I_C^2=(a_1,\cdots,a_{N-1})=\bigoplus_{i=1}^{N-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$ ($N=\dim X$, $a_1\leqq a_2\leqq\cdots\leqq a_{N-1}$)とした時，

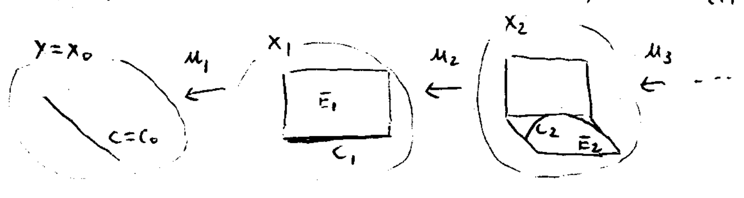
<u>不等式2.</u> $2(a_1+\cdots+a_p)+(a_{p+1}+\cdots+a_{N-1})\geqq 0 \quad (0\leqq p\leqq N-1)$

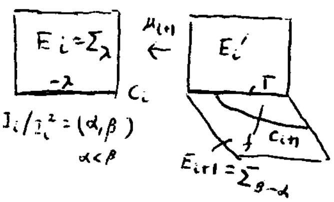
この不等式は$I_C=J_0\supset J_1\supset\cdots\supset J_{N-1}=I_C^2$を$J_{i-1}/J_i=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a_i)$と取る時$\chi(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_X/J_p^r,\mathcal{O}(A))$を$r$についての多項式と見た時の最高次の

係数として得られるものである。また $J=J_1$, $I=I_C$ として $J/IJ=(b_1,\cdots,b_{N-1})$ $(b_1\le\cdots\le b_{N-1})$ とする時

<u>不等式3.</u> $\frac{1}{2}b_1+2a_1+(a_2+\cdots+a_{N-1})\ge 0$

これは $J\supset L\supset IJ$ を $J/L=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b_1)$ とする時, $L_r=\sum_{\alpha+2\beta+3\gamma=r} I^{\alpha}J^{\beta}L^{\gamma}$ とし, $\chi(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_X/L_r,\mathcal{O}(A))$ を計算して得られる。この L_r は森[2]の言葉で書けば, $L_r=F^r(\mathcal{O}_X,L)=\mathrm{Sat}_{\mathcal{O}_X}(L^{[r/3]}I^{r\%3}+I^{r+1})$ ([ ]はGaussのカッコ, %はモジュロ演算子)で width $L=3$ である。次は width 4 の ideal を考えるのであるが, ここからは $\dim X=3$ と仮定しないとまだできない。さらにこれらの ideal の幾何学的意味を見ないといけない。$C_0=C$, $X_0=X$ とし帰納的に, C_i を中心に X_i を blow up したものを $\mu_i: X_{i+1}\longrightarrow X_i$, $E_{i+1}=\mu_i^{-1}(C_i)$, C_{i+1} を Hirzebruch surface E_{i+1} の minimal section とする。I_i は $\mathcal{O}_{X_i}$ における C_i の定義 ideal とする。$I=I_0$ から $J,L,L_r,\cdots$ を作ったように I_i から $J_i, L_{(i)}, L_{r,(i)}\cdots$ を作る。$E_n=\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ となった時 C_n の選び方は一意的でなくなるので, blow up は X_n で中止し, C_n は考えない。$E_i=\mathbb{P}(I_{i-1}/I_{i-1}^2)$, $I_i\mathcal{O}_{X_{i+1}}=\mathcal{O}_{X_{i+1}}(-E_{i+1})$,





$\Gamma\approx C+(\lambda-\alpha)f$

$(C_{i+1}\cdot E_i')_{X_{i+1}}=\lambda-b$

$J_i\mathcal{O}_{X_{i+1}}=I_{i+1}\mathcal{O}_{X_{i+1}}(-E_{i+1})$, …… に注意する。これらより

<u>Prop 4.</u> (i) $J_i/I_iJ_i\cong I_{i+1}/I_{i+1}^2\otimes\mathcal{O}_{C_{i+1}}(-E_{i+1})$

(ii) $\mathcal{O}_{C_{i+1}}(-E_{i+1})\cong I_i/J_i$

(iii) $L_{(i)}/(I_iL_{(i)}+J_i^2) \hookrightarrow J_{i+1}/I_{i+1}J_{i+1}\otimes \mathcal{O}_{C_{i+1}}(-E_{i+1})$

(iv) $(I_iL_{(i)}+J_i^2)/J_iL_{(i)} \cong J_{i+1}/I_{i+1}J_{i+1}\otimes\mathcal{O}_{C_{i+1}}(-2E_{i+1})$

等々が得られる。(§4)

width が $i+1$ の ideal が C_i の法線束と関係するので、少し仮定付の不等式が width 4 の ideal によって得られる。

<u>不等式5.</u> $\deg I/J < \deg J/I^2$, $\deg J/L < \deg L/IJ$ とする。$L/_{IL+J^2}=(c_1,c_2)$ $(c_1\leqq c_2)$ とし $c_1<c_2$ も仮定する。$L\supset M\supset IL+J^2$ を $L/M=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(c_1)$ で定め、$M_5=F^5(\mathcal{O}_X,M)$ 即ち M_5 は M/M_5 が $M/IM+JL$ の locally free 部分を与えるような ideal とする。今自然な単射 $I/J\otimes L/M \longrightarrow IL+J^2/M_5$ は同型であるとすれば

$$\frac{1}{3}c_1+\frac{1}{2}b_1+2a_1+a_2\geqq 0$$

この場合 $M_r=F^r(\mathcal{O}_X,M)=\sum_{\sum i\alpha_i=r} I^{\alpha_1}J^{\alpha_2}L^{\alpha_3}M^{\alpha_4}M_5^{\alpha_5}M_8^{\alpha_8}$ と具体的に saturated filtration が書ける。

width 5 の ideal まで考えると次の定理が得られる。

<u>定理6</u> $(K_X\cdot C)=0$ の時 $N_{C_0/X_0}, N_{C_1/X_1}, N_{C_2/X_2},\cdots$ の列は次のいずれか:

(i) $(-1,-1)$

(ii) $(-2,0),\cdots,(-2,0),(-1,-1)$　　($(-2,0)$ は有限の任意個)

(iii) $(-3,1),(-2,-1),(-1,-1)$

(iv) $(-3,1),(-3,0),(-2,-1),(-1,-1)$

(v) $(-3,1),(-3,0),(-3,0),(-2,-1),(-1,-1)$

これらはすべて実例も知られている。(Reid [5], Pinkham [4])

残念ながら width 6 以上の ideal はまだうまく扱えない。もし width w の ideal $\mathfrak{p}$ に対し $\chi(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_X/F^r(\mathcal{O}_X,\mathfrak{p}))$ が計算できれば

$$\sum_{r=1}^{w}\frac{1}{r}(d_0+\cdots+d_{r-1})\geq \deg N_{C/X}\qquad (I_C/I_C^2=(d_i,d_i'),\ d_i\leq d_i')$$

という不等式が得られるはずである。これが正しければ、例えば C が孤立していれば minimal section で blow up をくり返す操作は必ず有限回で終わることが導かれる。

§2. 準備

前の§で導入された記号はこの小論を通して有効である。ここでは§1であいまいに述べた事項の説明と初等的な事実の証明をする。まず Prop.1 の証明から始める。

証明. 適当にモデルをとりかえて Y は射影的で f は全射としておく。$B, B_1, \cdots, B_m$ ($m=N-\dim f$) を $B_1\cap\cdots\cap B_m$ は NC (normal crossing) かつ $y\in B_1\cap\cdots\cap B_m$ ($y=f(C)$) と取る。$H_i=f^*B_i$ ($i=0,1,\cdots,m$) とし $A\subset X$ を $A+mH-\sum_{i=1}^{m}r_iH_i-K_X$ が $m\gg m_0$ に対し nef & big となるように選ぶ。$\dim f=0$ や $(K_X\cdot C)\leq 0$ の時 $A=K_X$ とか $A=0$ と取れることも注意する。すると $H^i(X, A+mH-\sum_{j=1}^{m}s_jH_j)=0$ ($\forall i\geq 1, m\gg 0, s_j=0\sim r_j$) より $\Gamma\subset r_1H_1\cap\cdots\cap r_mH_m$ なる schem Γ に対しては $H^1(\Gamma,\mathcal{O}_\Gamma(A))=0$ である。□

次に定義せずに用いた言葉を説明する。

$\mathrm{supp}\,\mathcal{O}_X/\mathfrak{p}=C$ なる $\mathcal{O}_X$ の ideal $\mathfrak{p}$ に対し $\mathfrak{p}\supset I_C^d$ となる最小の整数 d を $\mathfrak{p}$ の width と言う。また $I_C\supset\mathfrak{p}$ なる ideal $\mathfrak{p}$ に対し、$I_C/\mathfrak{p}$ が 0-次元

部分層をもたない時 $\mathcal{P}$ は saturated であるという。一般の $\mathcal{P} \subset I_C$ に対し $\mathcal{P}$ を含む最小の saturated な ideal 層を $\mathrm{Sat}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P})$ で表わす。width $\mathcal{P} = d$ の時、$n = qd + r$ ($0 \le r < d$, i.e. $q = [\frac{n}{d}]$, $r = n \% d$) と $n \in N$ を表示し、$\mathcal{P}_n = F^n(\mathcal{O}_X, \mathcal{P}) = \mathrm{Sat}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}^q I^r + I^{n+1})$ と書く。§1 で作った filtration $I_C = I \supset J \supset L \supset M \supset N \supset \cdots$ のように saturated な ideal の filtration $I_C = {}^1\mathcal{P} \supset {}^2\mathcal{P} \supset {}^3\mathcal{P} \supset \cdots$ が width ${}^d\mathcal{P} = d$, ${}^d\mathcal{P} \supsetneq {}^{(d+1)}\mathcal{P} \supsetneq F^{d+1}(\mathcal{O}_X, {}^d\mathcal{P})$ かつ $1 \le {}^\forall r \le d$ に対し ${}^r\mathcal{P} = F^r(\mathcal{O}_X, {}^d\mathcal{P})$, をみたす時, depth $= 1$ の saturated filtration と呼ぶ。

§3. 不等式 2,3 の証明

まず一般次元で成り立つことは先に片付けてしまう。C の一点 P の近傍では $I = (x_1, \cdots, x_{N-1})$, $J_i = (x_1, \cdots, x_i)^2 + (x_{i+1}, \cdots, x_{N-1})$ であるような局所座標 $x_1, \cdots, x_N$ がとれる。$\mathcal{O}_C$-module M, N に対し rank と degree が等しい時 $M \approx N$ (numerically equivalent) と書く。

lemma 3.1 $1 \le q \le p < N-1$ に対し

$$J_p^r / I J_q J_p^{r-1} \approx \bigoplus_{k=0}^{r} S^{2k}(I/J_q) \otimes S^{r-k}(J_p/I^2)$$

証明 $G_k = I^{2k-3} J_q J_p^{r-k+1} + I^{2k} J_p^{r-k}$, $H_k = I^{2k-2} J_p^{r-k+1} \cap I J_q J_p^{r-1}$ とおく。$G_k \supset H_k$ を示す。これは local に見ればよい。$A = (x_1, \cdots, x_q)$, $B = (x_{q+1}, \cdots, x_p)$, $C = (x_{p+1}, \cdots, x_{N-1})$ とおく。$I = A + B + C$, $J_q = A^2 + B + C$, $J_p = (A+B)^2 + C$ である。まず $A^a B^b C^c \subset I^{2k-2} J_p^{r-k+1}$ となるための必要十分条件は (a,b,c) が図1で示される領域にあることである。同様 $A^a B^b C^c \subset I^{2k} J_p^{r-k}$ なる (a,b,c) の存在領域は図2で与えられる。また図3は $A^a B^b C^c$

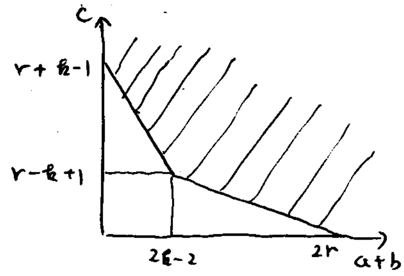


図1

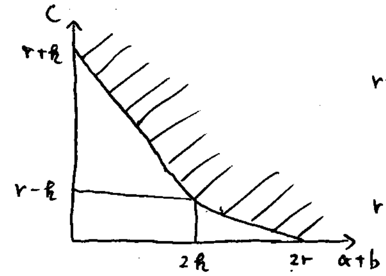


図2

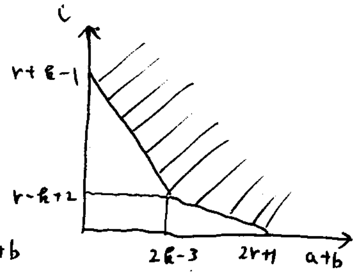


図3

$\subset I^{2k-3}J_p^{r-k+2}$ を表わしている。従って $A^aB^bC^c \subset I^{2k-2}J_p^{r-k+1}$ かつ $A^aB^bC^c \not\subset I^{2k-3}J_qJ_p^{r-k+1}$ であれば ($I^{2k-3}J_qJ_p^{r-k+1} \supset I^{2k-3}J_p^{r-k+2}$ に注意) $2r \le a+b+2c < 2r+1$ かつ $a+b > 2k-3$ (i.e. $c < r-k+2$) をみたす。従って $A^aB^bC^c \subset I^{2k-2}J_p^{r-k+1}$ かつ $A^aB^bC^c \not\subset G_k$ なら $c = r-k+1$ かつ $a+b+c = r+k-1$ をみたす。$b \ge 1$ とすると $(A+B)^{2k-3}B \subset I^{2k-3}J_q$ だから $A^aB^bC^c \subset H_k$ となる。従って $A^aB^bC^c \subset I^{2k-2}J_p^{r-k+1}$ かつ $A^aB^bC^c \not\subset G_k$ となるための必要十分条件は $a = 2k-2,\ b = 0,\ c = r-k+1$ である。$A^{2k-2}C^{r-k+1}$ は $IJ_qJ_p^{r-1}$ に含まれないから $G_k \supset H_k$ が分かる。(今の議論は $k \ge 2$ を使っているが、$k=0,1$ でも同様にして示せる。) さて $0 \le k \le r$ に対し全射 $S^{2k}(I/J_q) \otimes S^{r-k}(J_p/I^2) \longrightarrow I^{2k}J_p^{r-k}/G_{k+1}$ は同型であることが局所座標を見ることによって分かる。また同型定理により $I^{2k}J_p^{r-k}/H_{k+1} \cong G_k/H_k$ である。これを F_k とおく。すると完全列

$$0 \longrightarrow F_{k+1} \longrightarrow F_k \longrightarrow S^{2k}(I/J_q) \otimes S^{r-k}(J_p/I^2) \longrightarrow 0$$

ができる。$F_0 = J_p^r/IJ_qJ_p^{r-1} = S^r(J_p/I^2)$, $F_{r+1} = I^{2r-1}J_q/I^{2r} \cap IJ_qJ_p^{r-1} = 0$ に注意すると結論が得られる。 □

さてこの lemma を使って $\chi(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_X/J_p^r, \mathcal{E}(A))$ を計算できる。一般に、$Q \supset P$ なる ideal P に対し、$Q = P_0 \supset P_1 \supset \cdots \supset P_m = P$, 各 P_i/P_{i-1} は

$\mathcal{O}_C$-module となる filtration がとれる時，$\mathrm{rank}_{\mathcal{O}_C} Q/P = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{rank}_{\mathcal{O}_C} P_i/P_{i-1}$，$\deg_{\mathcal{O}_C} Q/P = \sum_{i=1}^{n} \deg_{\mathcal{O}_C} P_i/P_{i-1}$，とする。$\chi(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_X/P, \mathcal{O}(A)) = \deg_{\mathcal{O}_C}\mathcal{O}_X/P + \{(C\cdot A)_X + 1\}\cdot \mathrm{rank}_{\mathcal{O}_C}\mathcal{O}_X/P$ である：$N_{a,b} = \{(n_1,\cdots,n_{N-1}) \mid n_i \in \mathbb{Z},\ n_i \geq 0$，かつ $a \leq \frac{1}{2}(n_1+\cdots+n_p)+(n_{p+1}+\cdots+n_{N-1}) < b\}$ とする。n変数r次の単項式の個数 $= {}_nH_r = \frac{(r+1)(r+2)\cdots(r+n-1)}{(n-1)!} \sim \frac{r^{n-1}}{(n-1)!}$，n変数r次の単項式すべての積をとってできる単項式の各変数についての次数 $= \frac{r}{n}\,{}_nH_r = {}_{n+1}H_{r-1} \sim \frac{r^n}{n!}$ に注意する。$I/J_q \approx (a_1,\cdots,a_q)$，$J_p/I^2 \approx (a_{p+1},\cdots,a_{N-1})$ であり $J_p^r/J_p^{r+1} \approx J_p^r/J_0J_p^r \oplus J_0J_p^r/J_1J_p^r \oplus J_1J_p^r/J_2J_p^r \oplus \cdots \oplus J_{p-1}J_p^r/J_p^{r+1}$ であるから，$J_qJ_p^r/J_{q+1}J_p^r \cong J_q/J_{q+1} \otimes J_p^r/IJ_{q+1}J_p^{r-1}$ $(0 \leq q < p \leq N-1)$ と lemma 3.1 より

$$J_p^r/J_p^{r+1} \approx \bigoplus_{(n_1,\cdots,n_{N-1}) \in N_{r,r+1}} (n_1a_1,\cdots,n_{N-1}a_{N-1})$$

，となる。従って

$$\mathcal{O}_X/J_p^r \approx \bigoplus_{(n_1,\cdots,n_{N-1}) \in N_{0,r}} (n_1a_1,\cdots,n_{N-1}a_{N-1})$$

である。

あとは $n_1,\cdots,n_p$ の奇偶により 2^p 個に分けて deg, rank を計算すると 2^p 個の項いずれも $\deg \sim {}_NH_{r-1}(2(a_1+\cdots+a_p)+(a_{p+1}+\cdots+a_{N-1}))$，$\mathrm{rank} \sim {}_{N-1}H_r$ であるから r について最高次の r^N の項だけを見れば $\chi(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_X/J_p^r, \mathcal{O}(A)) \sim \frac{2^p}{N!}((a_1+\cdots+a_p)+(a_{p+1}+\cdots+a_{N-1}))$ が得られる。これと prop. 1 を合わせて不等式2が得られる。

この証明から分かるように，たとえ $A=0$ であっても，$\chi(\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_X/J_p^r, \mathcal{O}(A))$ の係数からは他の意味ある不等式は得られない。（つまり $\chi = f(r)\cdot\deg + g(r)\cdot\mathrm{rank}$ の形をしているから）さて次は不等式3を示そう。$0 \to S^2(I/J) \to J/IJ \to J/I^2 \to 0$ より J/IJ は $\mathrm{rank} = N-1$ の locally free $\mathcal{O}_C$-module で $b_1+\cdots+b_{N-1} = \deg J/IJ = \deg S^2(I/J) + \deg J/I^2 = 2a_1+(a_2+\cdots+a_{N-1})$

である。$L \supset IJ$, $J \supset I^2$ に注意すると $L_r = \sum_{\alpha+2\beta+3\gamma=r} I^{\alpha} J^{\beta} L^{\gamma}$ は

$$\begin{cases} L_{3t} = \sum_{i=0}^{[t/2]} L^{t-2i} J^{3i} = L^t + L^{t-2}J^3 + L^{t-4}J^6 + \cdots \\ L_{3t+1} = L^t I + \sum_{i=1}^{[t/2]} L^{t-2i+1} J^{3i-1} = L^t I + L^{t-1}J^2 + L^{t-3}J^5 + \cdots \\ L_{3t+2} = \sum_{i=0}^{[t/2]} L^{t-2i} J^{3i+1} = L^t J + L^{t-2}J^4 + L^{t-4}J^7 + \cdots \end{cases}$$

と書ける。$p = [\frac{r}{2}]$, $\lceil \frac{b}{a} \rceil = -[-\frac{b}{a}]$ (切り上げ) とし $1 \leqq t \leqq [\frac{r}{3}]+1$ に対し, $L_{r,t}$ を

$$L_{r,t} = \begin{cases} \sum_{i=0}^{t-1} L^i J^{p-[3i/2]} I^{1-i\%2} + L_{r+1} & (\text{if } r \text{ is odd}) \\ \sum_{i=0}^{t-1} L^i J^{p-\lceil 3i/2 \rceil} I^{i\%2} + L_{r+1} & (\text{if } r \text{ is even}) \end{cases}$$

で定め, $Q_{r,t} = L_r/L_{r,t}$, $Q_{r,0} = L_r/L_{r+1}$ とする。

さらに $F_{r,t}$ $(0 \leqq t \leqq [\frac{r}{3}])$ を $r+t$ の奇偶により ($s = \lceil 3t/2 \rceil$ とする)

$$F_{r,t} = \begin{cases} S^{p-[3t/2]}(J/L) \otimes S^t(L/IJ) & \text{if } (r+t) \text{ is even} \\ \left(\cong L^t J^{p-[3t/2]} / (L^{t+1} J^{p-[3t/2]-1} + L^{t-1} J^{p-[3t/2]+1} I) \right) & \\ I/J \otimes S^{p-s}(J/L) \otimes S^t(L/IJ) & \text{if } (r+t) \text{ is odd.} \\ \left(\cong L^t J^{p-s} I / (L^{t+1} J^{p-s-1} I + L^t J^{p-s+1} + L^{t-1} J^{p-s+1} I^2) \right) & \end{cases}$$

とおく。$r\%6$ の値により 6 通りに分けて考えると $L_{r,[\frac{r}{3}]+1} = L_r$ が分かる。すなわち $Q_{r,[\frac{r}{3}]+1} = 0$。 さて, $0 \to F_{r,t} \to Q_{r,t} \to Q_{r,t+1} \to 0$ なる完全系列が得られることを見よう。$L_{r,t} \subset L_{r,t+1}$ であるから $Q_{r,t} \to Q_{r,t+1}$ は全射。この Kernel は $L_{r,t+1}/L_{r,t}$ であるが, これが $F_{r,t}$ に同型であることを見る。

$$P_{r,t} = \begin{cases} L^t J^{p-[3t/2]} I^{1-t\%2} & \text{if } r \text{ is odd} \\ L^t J^{p-\lceil 3t/2 \rceil} I^{t\%2} & \text{if } r \text{ is even} \end{cases}$$

とおく。$L_{r,t+1} = P_{r,t} + L_{r,t}$。 まず全射 $F_{r,t} \to (P_{r,t} + L_{r,t})/L_{r,t}$ の存

をrとtのパリティーで4通りに分けて示す。

$r=2p,\ t=2k$ と書ける場合: $P_{r,t}=L^{2k}J^{p-3k}$, $F_{r,t}=L^{2k}J^{p-3k}/(L^{2k+1}J^{p-3k-1}+L^{2k-1}J^{p-3k+1}I)$. $F_{r,t}$の分母 $\subset L_{r,t}$ を示せばよい。まず $3(2k+1)+2(p-3k-1)=2p+1$ より $L^{2k+1}J^{p-3k-1}\subset L_{r+1}\subset L_{r,t}$. また $L^{2k-1}J^{p-3k+1}I$ は $L_{r,t}=\sum_{i=0}^{t-1}L^{i}J^{p-\lceil 3i/2\rceil}I^{i\%2}+L_{r+1}$ において $\sum$ の中の $i=t-1=2k-1$ の項である。従って $F_{r,t}$の分母 $\subset L_{r,t}$. $\therefore F_{r,t}\to P_{r,t}/(P_{r,t}\cap L_{r,t})\cong(P_{r,t}+L_{r,t})/L_{r,t}=L_{r,t+1}/L_{r,t}$.

他の3通りの場合も大体この程度の考察で証明できる。

さて、この $F_{r,t}\to L_{r,t+1}/L_{r,t}$ が同型であることを見るには両辺のrankが等しいことを示せばよい。そのためには、もっと広い視野から $\mathcal{O}_X$ から J^{3p} の間にfiltration:

$\mathcal{O}_X\supset\cdots\supset L\supset\cdots\supset L_r\supset L_{r,[\frac{r}{3}]}\supset L_{r,[\frac{r}{3}]-1}\supset\cdots\supset L_{r,2}\supset L_{r,1}\supset L_{r+1}\supset\cdots\supset L_{6p}\supset J^{3p}+L_{6p+1}\supset J^{3p}+L_{6p+2}\supset\cdots\supset J^{3p}+L_{9p-3}\supset J^{3p}+L_{9p-2}\supset J^{3p}$ を作る。後半にでてくる $J^{3p}+L_q\supset J^{3p}+L_{q+1}$ はさらに細分して

$J^{3p}+L_q\supset J^{3p}+L_{q,[q/3]}\supset J^{3p}+L_{q,[\frac{q}{3}]-1}\supset\cdots\supset J^{3p}+L_{q,1}\supset J^{3p}+L_{q+1}$ としておく。$J^{3p}+L_{q,u+1}/J^{3p}+L_{q,u}\cong L_{q,u+1}/(L_{q,u+1}\cap J^{3p})+L_{q,u}$. 再び全射 $F_{q,u}\to J^{3p}+L_{q,u+1}/J^{3p}+L_{q,u}$ が得られる。この全射は左の項が0でない限り同型であることも証明しようとする主張に加える。(注. qが$9p-2$に近づくと小さなuに対しては $J^{3p}+L_{q,u+1}=J^{3p}+L_{q,u}$ となってしまう。) $F_{q,u}\cong(I/J)^{a}\otimes S^{b}(J/L)\otimes S^{c}(L/IJ)$ $(a=0\sim1)$ なる a,b,c を $a=a(q,u)$, $b=b(q,u)$, $c=c(q,u)$ と書こう。$\mathcal{O}_X$ から J^{3p} まで

の filtration の 0 でない商 $L_{r,t+1}/L_{r,t}$ あるいは $J^{3P}+L_{q,u+1}/J^{3P}+L_{q,u}$ へ全射を与える $F_{r,t}$ ($F_{q,u}$) 全体にあらわれる a, b, c は，簡単な考察から $\frac{a}{2}+b+c<3P$, $a=0$ or 1, $b\geq 0$, $c\geq 0$ なるすべての整数の組を動くことがわかる。ここで

$$\sum\left\{\mathrm{rank}\,F_{r,t} \;\middle|\; a=a(r,t),\ b=b(r,t),\ c=c(r,t),\ a=0 \text{ or } 1,\ b\geq 0,\ c\geq 0,\ \frac{a}{2}+b+c<3P\right\}$$

$=\mathrm{rank}\,\mathcal{O}_X/J^{3P}$ に注意すれば $F_{r,t}\cong L_{r,t+1}/L_{r,t}$ が得られる。

今，得られた完全系列 $0\longrightarrow F_{r,t}\longrightarrow Q_{r,t}\longrightarrow Q_{r,t+1}\longrightarrow 0$ により $\chi(\mathcal{O}_X/L_r\otimes A)$ が計算できる。$\mathcal{O}_X$ から L_r までの filtration の商としてでてくる $F_{q,t}$ 全体は，$a+2b+3c<r$ ($a=0$ or 1, $b\geq 0$, $c\geq 0$) なる整数の組 (a,b,c) を与えるものが1回づつでてくる。従って $\chi(\mathcal{O}_X/L_r\otimes\mathcal{O}(A))$ の r についての最高次 (N 次) の項の係数は $\frac{1}{3^N N!}\left(\frac{3}{2}b_1+(b_2+\cdots+b_{N-1})\right)$ である。$2a_1+(a_2+\cdots+a_{N-1})=b_1+\cdots+b_{N-1}$ を合わせると不等式3が得られる。

注意　今の証明を見れば分かるように今の L のかわりに $J\supset pL\supset IJ$ を $J/pL=(b_1,\cdots,b_p)$ となるようにとり $\chi(\mathcal{O}_X/F^r(\mathcal{O}_X,pL))$ を計算すれば $\frac{3}{2}(b_1+\cdots+b_p)+(b_{p+1}+\cdots+b_{N-1})\geq 0$ という不等式が得られるであろうことは確信をもてる。ただ，さしせまった必要がないので，まだ $\chi(\mathcal{O}_X/F^r(\mathcal{O}_X,pL))$ をていねいに計算してはいない。大雑把に言えば，上の証明で L とあるところをすべて pL と書きかえ，rank が退化しないことの証明を少し考えれば，大丈夫なはずである。

§4. Blow up との関係

ここまでは記号がごたごたするだけで、特に難しいところはなかった。しかし ideal M が登場するところからは事情が変わるようである。そこで話を簡明にするため $N = \dim X = 3$ の場合のみを以後扱かうことにする。この§では§1で述べた prop. 4 の証明などを述べる。記号 J_i は（3通りの使われ方のうち）X_i における ideal の意味で用いられる。添字のわずらわしさをきらって§4の中に限り $X_i, C_i, \mu_i, I_i, J_i, L_{(i)}, \cdots$ を単に $X, C, \mu, I, J, L, \cdots$ と、$C_{i+1}, E_{i+1}, I_{i+1}, J_{i+1}, \cdots$ を $\tilde{C}, \tilde{E}, \tilde{I}, \tilde{J}, \cdots$ と書くことにする。$C_{i+2}, E_{i+2}, I_{i+2}, J_{i+2}, \cdots$ は $\tilde{\tilde{C}}, \tilde{\tilde{E}}, \tilde{\tilde{I}}, \tilde{\tilde{J}}, \cdots$ で表わす。

まず $\tilde{E}, \tilde{C}$ の定義から $I\mathcal{O}_{\tilde{X}} = \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\tilde{E})$, $J\mathcal{O}_{\tilde{X}} = \tilde{I}(-\tilde{E})$ である。§3と同様点 $P \in C$ の近傍での局所座標 x_1, x_2, x_3 を $I = (x_1, x_2)$, $J = (x_1^2, x_2)$ となるようとっておく。$\tilde{x}_i = \mu^{-1}(x_i)$, $\tilde{t} = \mu^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ とする。$\bigoplus_{d=0}^{\infty} S^d(I/I^2)$ は x_1, x_2 の類で生成され、$\deg I/J < \deg J/I^2$ であるから $\tilde{t} = 0$ が $\tilde{E}$ 上での $\tilde{C}$ の定義方程式である。（$\deg I/J > \deg J/I^2$ としてしまうと $\tilde{E}$ の ∞-section がでてきてしまってあまりうれしくない。）$\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\tilde{E}) = I_{\tilde{E}} = (\tilde{x}_1)$, $\tilde{I} = (\tilde{x}_1, \tilde{t})$ と書いてみれば $J/IJ \longrightarrow \tilde{I}/\tilde{I}^2 \otimes \mathcal{O}_{\tilde{C}}(-\tilde{E})$ が同型であることがわかる。$I/J \cong \mathcal{O}_{\tilde{C}}(-\tilde{E})$ も明らか。

さて、$J/IJ = (b_1, b_2)$ という表示に対応して $J = (y_1, y_2)$ と局所的に書ける。$\hat{\mathcal{O}}_X$ の可逆行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ により $y_1 = a x_1^2 + b x_2$, $y_2 = c x_1^2 + d x_2$ と書ける。$L = (x_1 y_1, x_2 y_1, y_2)$ と局所的に書ける。$0 \to L/IJ \to J/IJ \to J/L \to 0$

の split する完全系列に $\mathcal{O}_{\tilde{C}}(\hat{E})$ を tensor して $0 \to \hat{J}/\hat{I}^2 \to \hat{I}/\hat{I}^2 \to \hat{I}/\hat{J} \to 0$ が得られ、$\hat{J} = L\mathcal{O}_{\tilde{X}}(\hat{E}) + \hat{I}^2$ が分かる。(注. $\hat{J} = L\mathcal{O}_{\tilde{X}}(\hat{E})$ は一般には成立しない)

<u>prop 4.1</u>　$\deg I/J \leq \deg \tilde{I}/\tilde{J}$

<u>証明</u>　$\deg \tilde{I}/\tilde{J} = \deg J/L - \deg I/J$ だから $2\deg I/J \leq \deg J/L$ を示せばよい。$S^2(I/J) = I^2/IJ \to J/IJ \to J/L$ として得られる $S^2(I/J) \to J/L$ は x_1^2 の類が消えないので injective. □

さて $\mu^{-1}(IL+J^2) \subset \hat{I}\hat{J}(-\hat{E})$ より rank $=2$ の $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$-module の間の自然な写像 $L/L_4 = L/IL+J^2 \longrightarrow \hat{J}/\hat{I}\hat{J} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{C}}(-\hat{E})$ が得られる。これは z_1, z_2 の像が各々 $\hat{J}/\tilde{L}\otimes\mathcal{O}_{\tilde{C}}(-\hat{E})$, $\tilde{L}/\hat{I}\hat{J}\otimes\mathcal{O}_{\tilde{C}}(-\hat{E})$ で消えないので単射である。しかし同型になるとは限らない。例えば定理6の(v)に現われる $I/I^2 = (-1,3)$, $J/IJ = (-1,2)$, $L/L_4 = (-1,1)$ の場合, $\hat{I}/\hat{I}^2 = (0,3)$, $\hat{J}/\hat{I}\hat{J} = (0,3)$ であって同型になっていない。また $L/\mathfrak{p} \cong \hat{J}/\hat{I}\hat{J}\otimes\mathcal{O}_{\tilde{C}}(-\hat{E})$ となるような ideal $\mathfrak{p}$ は存在しない。その代わりに同型 $L_4/L_5 = IL+J^2/JL \longrightarrow \hat{J}/\hat{I}\hat{J}\otimes\mathcal{O}_{\tilde{C}}(-2\hat{E})$ が存在する。以下これを示す。$L_4\mathcal{O}_{\tilde{X}} \subset \hat{J}(-2\hat{E})$ で $JL\mathcal{O}_{\tilde{X}} \subset \hat{I}\hat{J}(-2\hat{E})$ だから $L_4/L_5 \to \hat{J}/\hat{I}\hat{J}\otimes\mathcal{O}_{\tilde{C}}(-2\hat{E})$ が作られる。L_4/L_5 は局所的には x_1z_2 と z_1^2 で生成される。(∵ L_4/J^2 は x_1z_2 で J^2/JL は z_1^2 で生成される) $\tilde{a} = \mu^{-1}(a), \cdots$ として $\hat{I} = (\tilde{x}_1, \tilde{t}) = (\tilde{a}\tilde{x}_1 + \tilde{b}\tilde{t}, \tilde{c}\tilde{x}_1 + \tilde{d}\tilde{t})$, $L\mathcal{O}_{\tilde{X}} = (\tilde{x}_1(\tilde{a}\tilde{x}_1+\tilde{b}\tilde{t}), \tilde{c}\tilde{x}_1+\tilde{d}\tilde{t})\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\hat{E})$, $\hat{J} = L\mathcal{O}_{\tilde{X}}(\hat{E}) + \hat{I}^2 = \left((\tilde{a}\tilde{x}_1+\tilde{b}\tilde{t})^2, \tilde{c}\tilde{x}_1+\tilde{d}\tilde{t}\right)$.
今 $\mu^{-1}(x_1z_2) = \tilde{x}_1^2\cdot(\tilde{c}\tilde{x}_1+\tilde{d}\tilde{t})$, $\mu^{-1}(z_1^2) = \tilde{x}_1^2\cdot(\tilde{a}\tilde{x}_1+\tilde{b}\tilde{t})^2$ だから、この点の近傍で、従って全体で $L_4/L_5 \to \hat{J}/\hat{I}\hat{J}\otimes\mathcal{O}_{\tilde{C}}(-2\hat{E})$ は同型である。生成元

で見るのが気持ち悪ければ次のように言ってもよい。$I/J^2 \cong \hat{I}/\hat{I}^2 \otimes O_{\tilde{C}}(-2\hat{E})$, $J^2/IJ^2 \cong \hat{I}^2/\hat{I}^3 \otimes O_{\tilde{C}}(-2\hat{E})$. そして filtration $IJ \supset L_4 \supset J^2 \supset L_5 \supset L^2+IJ^2 \supset IJ^2$ に $O_{\tilde{C}}(2\hat{E})$ を tensor して $\tilde{I} \supset \hat{J} \supset \tilde{I}^2 \supset \tilde{I}\hat{J} \supset \hat{J}^2+\hat{I}^3 \supset \hat{I}^3$ が得られる。従って $L_4/L_5 \cong \hat{J}/\hat{I}\hat{J} \otimes O_{\tilde{C}}(-2\hat{E})$.

しかし $L/L_4 \longrightarrow \hat{J}/\hat{I}\hat{J} \otimes O_{\tilde{C}}(-\hat{E})$ が同型でないことが ideal L の取り扱いを難しくしている。$\hat{J} \supset \tilde{L} \supset \hat{I}\hat{J}$ に対応して $L \supset M \supset L_4$ を作る。この M は §1 で定義したものと一致する。2つの invertible sheaf の間の全射 $L/M \longrightarrow \hat{J}/\tilde{L} \otimes O_{\tilde{C}}(-\hat{E})$, $M/L_4 \longrightarrow \tilde{L}/\hat{I}\hat{J} \otimes O_{\tilde{C}}(-\hat{E})$ のうち $L/M \longrightarrow \hat{J}/\tilde{L} \otimes O_{\tilde{C}}(-\hat{E})$ は同型でないと width 4 の ideal M はあまり幾何学的意味をもたなくなってしまう。不等式5で課せられた仮定 $I/J \otimes L/M \cong IL+J^2/M_5$ はこれから従う。すなわち

<u>prop 4.2</u> $L/M \cong \hat{\hat{I}}/\hat{J} \otimes J/L$ ならば $I/J \otimes L/M \cong L_4/M_5$.

<u>証明</u> $L/M \cong \hat{I}/\hat{J} \otimes J/L$ は $L/M \cong \hat{J}/\tilde{L} \otimes O_{\tilde{C}}(-\hat{E})$ と同じこと。$L_4/M_5 \cong \hat{J}/\tilde{L} \otimes O_{\tilde{C}}(-2\hat{E}) \cong \hat{\hat{I}}/\hat{J} \otimes J/L \otimes I/J$. 従って $I/J \otimes L/M \cong L_4/M_5$ □

同じように全射 $M/M_5 \longrightarrow \tilde{L}/\tilde{L}_4 \otimes O_{\tilde{C}}(-\hat{E})$, $M_5/M_6 \longrightarrow \tilde{L}/\tilde{L}_4 \otimes O_{\tilde{C}}(-2\hat{E})$ もできるが、こちらは L/L_4, L_4/L_5 よりもっとひどく、どちらも一般には同型でない。しかし prop4.2 同様:

<u>prop 4.3</u> $L/M \cong \hat{\hat{I}}/\hat{J} \otimes J/L$ ならば $M_5/M_6 \cong \tilde{L}/\tilde{L}_4 \otimes O_{\tilde{C}}(-2\hat{E})$.

<u>証明</u> $L_5/L_6 = JL/L^2+J^3 \cong J/L \otimes L/L_4$. 従って $L_5/M_6 \cong J/L \otimes L/M$. また $J/L \cong \hat{I}/\hat{J} \otimes O_{\tilde{C}}(-\hat{E})$, $L/M \cong \hat{J}/\tilde{L} \otimes O_{\tilde{C}}(-\hat{E})$, $\hat{I}\hat{J}/\tilde{L}_4 \cong \hat{I}/\hat{J} \otimes \hat{J}/\tilde{L}$. これらより $L_5/M_6 \cong \hat{I}\hat{J}/\tilde{L}_4 \otimes O_{\tilde{C}}(-2\hat{E})$. これと $M_5/L_5 \cong \tilde{L}/\hat{I}\hat{J} \otimes O_{\tilde{C}}(-2\hat{E})$ より

結論が得られる。 □

Ideal M_5 は $M_5=F^5(\mathcal{O}_X,M)$ で定義されていたが、このように

右図の split する完全系

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_5/JL \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & IL+J^2/JL \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & IL+J^2/M_5 \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tilde{L}/\tilde{I}\tilde{J}\otimes\mathcal{O}_{\tilde{C}}(-2\hat{E}) \arrow[r] & \tilde{J}/\tilde{I}\tilde{J}\otimes\mathcal{O}_{\tilde{C}}(-2\hat{E}) \arrow[r] & \tilde{J}/\tilde{L}\otimes\mathcal{O}_{\tilde{C}}(-2\hat{E}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

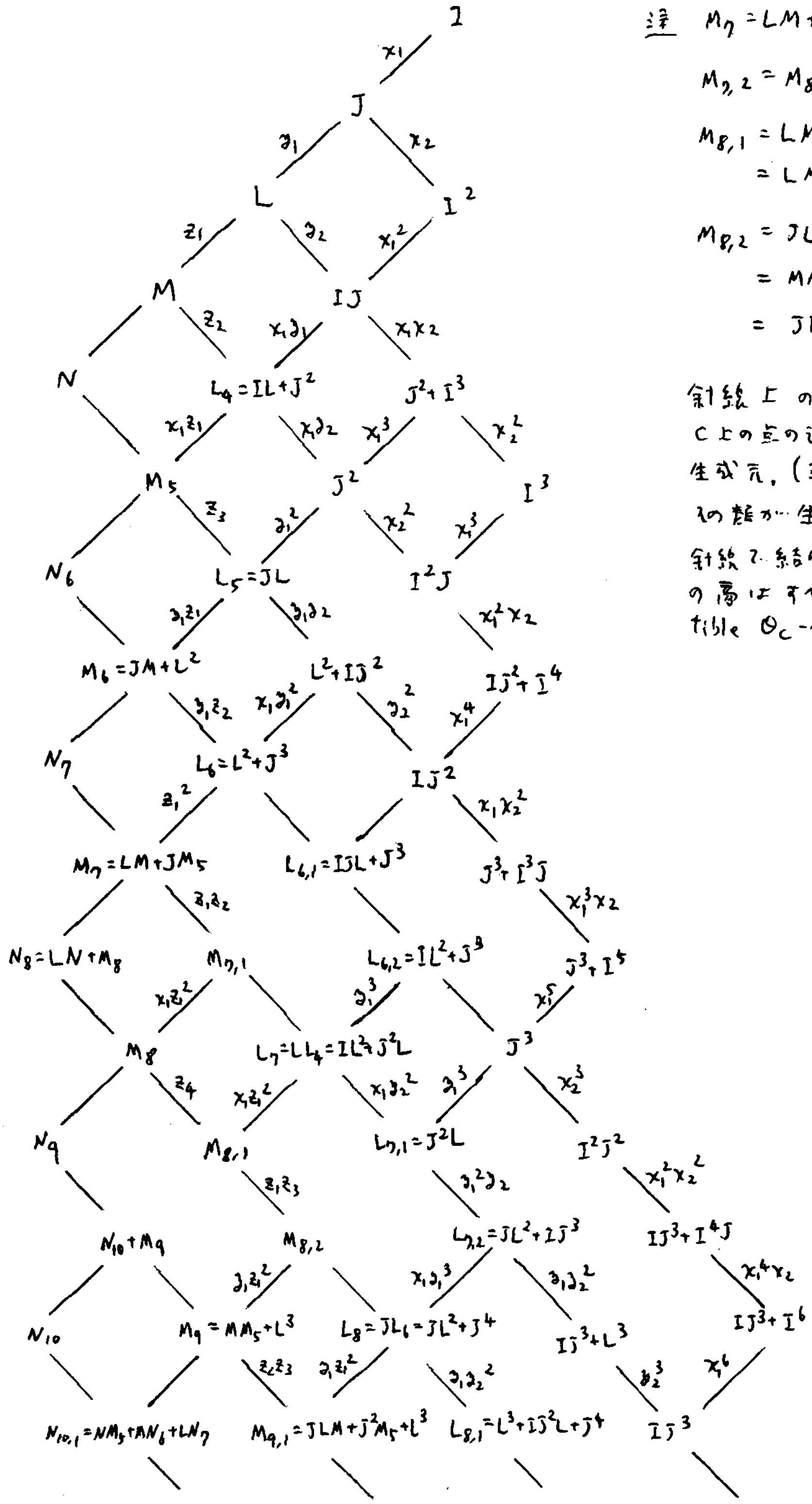
列でも特徴づけられる。しかし一般に torsion をもつ rank=1 の $\mathcal{O}_C$-module $M/IM+JL$ の free part を M/M_5 が与えるというだけの意味しかもたないため扱いづらい ideal ではある。定理6の(v)の場合も $IM+JL\subsetneq M_5$ であることに注意しておく。ちなみに $L_5/L_6\cong J/L\otimes L/L_4$ より $M_6=JM+L^2$ である。

§5. 不等式5の証明

不等式5には4つの仮定 (i) $\deg I/J<\deg J/I^2$ (ii) $\deg J/L<\deg L/IJ$ (iii) $\deg L/M<\deg M/L_4$ (iv) $I/J\otimes L/M\cong L_4/M_5$ が課せられていた。これらは§4から分かるように、(i)–(iii) は E_1, E_2, E_3 が $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ と同型でないこと、(iv) は $L/M\cong I_2/J_2\otimes J/L$ から従う。§4と同様 C 上の点 P の近傍で $I=(x_1,x_2)$, $J=(x_1^2,x_2)=(y_1,y_2)$ と表示する。さらに z_1, z_2 を各々その類が L/M, M/L_4 を生成するようにとる。$S^2(J/L)\longrightarrow L_4/M_5$ は単射であるから $y_2^2=\alpha x_1 z_1$ ($\alpha\in\hat{\mathcal{O}}_{X,P}$) と書ける。読者には混乱的で申し分けないが、§3で $L_{r,t}$ と書いたものを以後 $L_{r,[\frac{r}{3}]+1-t}$ とする。すなわち $L_r\supset L_{r,1}\supset L_{r,2}\supset\cdots\supset L_{r,[\frac{r}{3}]}\supset L_{r+1}$.

これから行うことは $\chi(\mathcal{O}_X/M_r)$ を計算できるように M_r を具体

図4



注 $M_7 = LM + M_8$

$M_{7,2} = M_8 + L_7$

$M_{8,1} = LM_5 + J^2 M$
$\quad = LM_5 + JL_6$

$M_{8,2} = JL^2 + ML_4$
$\quad = MM_5 + JL_6$
$\quad = JL_6 + M_9$

斜線上の文字はC上の点の近傍での生成元。(正確にはその類が生成元). 斜線で結んだところの商はすべてinvertible $\mathcal{O}_C$-module.

陽に表示してゆくことである。

prop 5.1 $IM_5 \subset M_6 = JM + L^2$

証明 $U = C - \mathrm{Supp}(M_5/IM+JL)$ 上では $M_5|_U = (IM+JL)_U$, $M_6|_U = (JM+L^2)_U$. 従って $JL/(JM+L^2+IM_5)$ は locally free, rank$=2$ の $\mathcal{O}_C$-module. 従って全射 $JL/JM+L^2 \twoheadrightarrow JL/(JM+L^2+IM_5)$ は同型。∴ $IM_5 \subset M_6$. □

prop 5.2 $M_7 = LM + JM_5$, $L_6/M_7 \cong S^2(L/M)$.

証明 $\mathrm{Coker}(S^2(L/M) \to L_6/LM+JM_5) = L^2+J^3/L^2+JM_5 \cong J^3/(L^2+JM_5)\cap J^3$. ところで、$y_1^3 = \alpha \cdot x_1 y_1 z_1 \mod JM_5$. また $x_1 y_1 \in L$ だから $y_1^3 \in L^2 + JM_5$. 従って $S^2(L/M) \xrightarrow{\cong} L_6/LM+JM_5$. これより $M_7 = LM + JM_5$. □

$M_{7,1} = M_8 + L_7$, $M_{8,1} = LM_5 + J^2M$, $M_{8,2} = JL^2 + ML_4$ とおく。

prop 5.3 (i) $M_9 = MM_5 + L^3$ (ii) $M_{7,1}/M_8 \cong L_7/M_{8,1} \cong L/M \otimes L_4/M_5$.
(iii) $M_{7,1}/L_7 \cong M_8/M_{8,1}$. (iv) $M_{8,1}/M_{8,2} \cong L/M \otimes M_5/L_5$, (v) $M_{8,2}/L_8 \cong M/L_4 \otimes M_5/L_5$
(vi) $IM_8 \subset M_9$, $M_{8,2}/M_9 \cong J/L \otimes L_6/M_7$ (vii) $M_{8,2} = MM_5 + JL_6$, $M_{8,1} = LM_5 + JL_6$.

証明 (ii) $L_7/ILM+J^2L \cong L/M \otimes L_4/J^2$ で $ILM+J^2L/JL^2+ML_4$ は 0-次元層でないから $L_7/M_{8,2} \cong L/M \otimes L_4/JL$. 特に $L/M \otimes L_4/M_5 \cong L_7/M_{8,1}$. また $L_7/M_{8,1} \twoheadrightarrow L_7/M_8 \cap L_7 \cong M_8 + L_7/M_8 = M_{7,1}/M_8$ は invertible sheaf の間の全射だから同型。
(iii) は (ii) より従う。(iv) も $L_7/M_{8,2} \cong L/M \otimes L_4/JL$ から従う。(v), (vii) を示す。
$0 \to L/M \otimes M_5/JL \to M_{8,1}/MM_5+JL_6 \to LM_5+J^2M/LM_5+JL_6 \to 0$ は完全。また
$S^2(J/L) \otimes M/L_4 \twoheadrightarrow J^2M/(LM_5+JL_6)\cap J^2M \cong LM_5+J^2M/LM_5+JL_6$ は全射。最後の項は local には $y_1^2 z_2$ で生成されるが、$y_1^2 z_2 = \alpha \cdot x_1 z_1 z_2 \mod LM_5$ で $x_1 z_2 \in IM \subset M_5$, 従って $y_1^2 z_2 \in LM_5 + JL_6$. 従って (iv) と合わせると

$M_{8,2}=MM_5+JL_6$ が分かる。L_7/L_8 は locally free $\mathcal{O}_C$-module で rank $=3$。従って $M_{8,2}/L_8$ は invertible で $M/L_4\otimes M_5/JL \twoheadrightarrow MM_5/JL_6\cap MM_5 \cong M_{8,2}/L_8$ は同型。$M_{8,1}=LM_5+JL_6$ は，$J/L\otimes M_6/L_6 \twoheadrightarrow LM_5+JM_6/LM_5+JL_6$ において右辺の生成元 $z_1^2z_2$ は消滅することから分かる。(i)を示す。定義から $M_9\supset MM_5+L^3$。従って $M_{8,2}/MM_5+L^3$ が invertible であることを示せばよい。$J/L\otimes L_6/M_7 \twoheadrightarrow MM_5+JL_6/MM_5+L^3$ は全射。これより結論。(vi)は Sat の定義。(cf. 森[2] Lemma 8.2.1.) □

$M_{9,1}=JLM+J^2M_5+L^3$, $M_{9,2}=JM_{7,1}+L^3$, $M_{10,1}=M_{11}+LM_7$, $M_{10,2}=M_{11}+LM_{7,1}$

とおく

<u>prop 5.4</u> (i) $M_{10}=JM_8+L^2M$ (ii) $M_{11}=JMM_5+LM_8$

(iii) $L_8/M_{9,1}\cong M_{8,2}/M_9\cong J/L\otimes L_6/M_7$ (iv) $M_9/M_{9,1}\cong M_{8,2}/L_8\cong M/L_4\otimes M_5/JL$

(v) $M_{9,1}/M_{9,2}\cong J/L\otimes M_7/M_{7,1}$ (vi) $M_{9,2}/L_9\cong J/L\otimes M_{7,1}/L_7$.

(vii) $M_{9,2}/M_{10}\cong L_9/M_{10,1}\cong L/M\otimes L_6/M_7$ (viii) $M_5^2\subset M_{10}$.

<u>証明</u> (iii), (v), (vi) は $L_8\supset M_{9,1}\supset M_{9,2}\supset L_9$ の商は $L_6\supset M_7\supset M_{7,1}\supset L_7$ に J/L を tensor して得られることから分かる。(iv), (vii) は prop 5.3 の (iii), (v) の証明と同様に示される。(viii) も Sat の性質。(i), (ii) は各々 $M_{9,2}/JM_8+L^2M$, $M_{10,2}/JMM_5+LM_8$ が $J/L\otimes M_{7,1}/L_7$, $L/M\otimes M_{7,1}/M_8$ と同型であることがすぐ分かり，それから従う。 □

次の prop はもっと簡単な証明があるように思うが：

<u>prop 5.5</u> $JM_5\subset LM+M_8$。従って $M_7/M_8\cong L/M\otimes M/M_5$。

<u>証明</u> $M_{12}=MM_8+L^4$, $M_{13}=M_5M_8+L^3M$ (簡単な事実だが，こうろを

定義と思ってもよい). $M_{12,1}=M_{13}+LM_9$, $M_{12,2}=M_{13}+LM_{9,1}$, $M'_{12,1}=M_{12,2}+M_5M_7$ とおく。$M_{13}\subset M_{12,2}\subset M_{12,1}\subset M'_{12,1}\subset M_{12}$。まず $J^2M_8\subset M_{12,1}$ を示す。$S^2(J/L)\otimes M_8/M_9 \twoheadrightarrow J^2M_8/(M_{12,1}\cap J^2M_8)$ は zero であることを示せばよい。まず局所的に, $\ell_2=\mathrm{Im}(J^2/JL\otimes M_{8,2}/M_9\to J^2M_8/(M_{12,1}\cap J^2M_8))$ は $y_1^3z_1^2$ で生成されるが, $y_1^3z_1^2\in LJ^2M_5\subset LM_{9,1}\subset M_{12,1}$。従って $\ell_2=0$。ここで自然に, $\ell_1=\mathrm{Im}(J^2/JL\otimes M_{8,1}/M_{8,2}\to J^2M_8/(M_{12,1}\cap J^2M_8))$ が定義できる。ℓ_1 は local には $y_1^2z_1z_3$ (z_3 は M_5/L_5 の生成元) で生成される。$y_1^2z_3\in M_9$ より $y_1^2z_1z_3\in M_{12,1}$。従って $\ell_1=0$。最後に $\ell_0=\mathrm{Im}(J^2/JL\otimes M_8/M_{8,1}\to J^2M_8/M_{12,1}\cap J^2M_8)$ は $y_1^2z_4$ (z_4 は $M_8/M_{8,1}$ の生成元) で生成されるが, $y_1^2\equiv\alpha x_1z_1 \bmod M_5$ より $y_1^2z_4\equiv\alpha z_1\cdot x_1z_4 \bmod M_{13}$ で, $x_1z_4\in IM_8\subset M_9$ より $y_1^2z_4\in M_{12,1}$。以上で $J^2M_8\subset M_{12,1}$ が示された。$L_4M_8+MM_{8,1}=L\cdot IM_8+J^2M_8+LMM_5+JL^2M+J^4M\subset LM_9+M_{13}=M_{12,1}$。これより $M/L_4\otimes M_8/M_{8,1}\to M_{12}/M_{12,1}$ ができ $M_{12}=MM_8+M_{12,1}$ より同型。同様 $M/L_4\otimes M_8/M_{8,1}\xrightarrow{\cong}M_{12}/M'_{12,1}$。従って $M_{12,1}=M'_{12,1}$。ここで2つの完全系列 $0\to L/M\otimes M_9/M_{9,1}\to M_{12}/M_{12,2}\to M_{12}/M_{12,1}\to 0$ と $0\to M_5/JL\otimes M_7/M_{7,1}\to M_{12}/M_{12,2}\to M_{12}/M'_{12,1}\to 0$ を比較する。(注. $M_5M_{7,1}=M_5M_8+M_5LL_4\subset M_{12,2}$) $\deg L/M+\deg M_9/M_{9,1}=\deg M_5/JL+\deg M_7/M_{7,1}$, $M_9/M_{9,1}\cong M/L_4\otimes M_5/JL$ で $\deg M_7/M_{7,1}=\deg L/M+\deg M/L_4$ だから自然な写射 $L/M\otimes M/L_4\to M_7/M_{7,1}$ は両辺の deg が等しいので同型になる。$M_7=LM+JM_5=LM+M_{7,1}=LM+(M_8+LL_4)=LM+M_8$。従って $JM_5\subset LM+M_8$。 □

<u>prop 5.6.</u> (i) $r\geq 9$ の時 $M_r=JM_{r-2}+LM_{r-3}+MM_{r-4}+M_5M_{r-5}+M_8M_{r-8}$

(ii) $M_r=\sum_{\Sigma i\alpha_i=r} I^{\alpha_1}J^{\alpha_2}L^{\alpha_3}M^{\alpha_4}M_5^{\alpha_5}M_8^{\alpha_8}$.

(i)の証明はしないで(i)のほうをM_rの定義だと考える。するとこの§が終るところで実は(i)で定義されるM_rが$F^r(\mathcal{O}_x, M)$と一致することがわかる。(i)から(ii)はrに関する帰納法で簡単に示される。(ただし書くと長い)

さて$M_{r,p}$を定義する($0 \leq p \leq [\frac{r}{4}]+1$)。$r \leq 9$に対してはすでに定義されている。そこで$r \geq 10$とする。$0 < p \leq [\frac{r}{4}]$に対して

$$M_{r,p} = \begin{cases} L M_{r-3,p-1} + M_{r+1} & \text{if } r \not\equiv 3 \mod 4 \quad (r \geq 10) \\ L M_{r-3,p} + M_{r+1} & \text{if } r \equiv 3 \mod 4 \quad (r \geq 10) \end{cases}$$

とし$M_{r,0} = M_r$, $M_{r,[\frac{r}{4}]+1} = M_{r+1}$と定義する。

実はこの$M_{r,p}$は表[2] §8,(8.6)の$gr^{n,i}(\mathcal{O}_x, M) = M_{n,i}/M_{n,i+1}$を与える。同様$gr^{n,i}(\mathcal{O}_x, L) = L_{n,i}/L_{n,i+1}$である。これもこの§を最後まで読めば自然に分かる。さてここまでくると$\chi(\mathcal{O}_x/M_r \otimes \mathcal{O}(A))$の計算にとりかかれる。

<u>Prop 5.7.</u> (i-m) $M_{8m} = L M_{8m-3} + M_8 M_{8m-8} + M_{8m+1}$ $(m \geq 2)$

(ii-m) $M_{8m+4} = L M_{8m+1} + M M_{8m} + M_{8m+5}$ $(m \geq 1)$

(iii-m) $J^4 M_{8m-8} \subset L M_{8m-3} + M_{8m+1}$ $(m \geq 2)$

(iv-m) $M_{4m+5} = M_5 M_{4m} + L M_{4m+2} + M_{4m+6}$ $(m \geq 1)$

(v-m) $M_{4m+2} = J M_{4m} + L M_{4m-1} + M_{4m+3}$ $(m \geq 1)$

(vi-m) $M_{4m+3} = L M_{4m} + M_{4m+4}$ $(m \geq 1)$

<u>証明</u> (ii-1),(iv-1),(iv-2),(v-1),(v-2),(vi-1),(vi-2)はすでにここまでに示されている。そこで次の様な帰納法を組む。(イ) (iv-(m-1)),(v-(m-1)),

(vi-(m-2)), (vi-(m-1)) $\Longrightarrow$ (vi-m). (ロ) (iv-(m-2)), (iv-(m-1)), (vi-m) $\Rightarrow$ (iv-m)

(ハ) (v-(m-2)), (v-(m-1)), (iv-(m-2)) $\Longrightarrow$ (v-m) (ニ) (ii-(m-1)), (v-(2m)), (vi-(2m-1)) $\Rightarrow$ (ii-m). (ホ) (ii-(m-1)), (vi-(2m-2)), (vi-(2m-1)) $\Rightarrow$ (i-m),

(ヘ) (i-(m-1)) $\Rightarrow$ (iii-m). 各々の証明は簡単である。例えば(イ)を示そう。(vi-m)の $\subset$ の包含関係は prop 5.6.(i) より明らか。$\supset$ を示す。prop 5.6.(i) の表示より $JM_{4m+1} \subset LM_{4m} + M_{4m+4}$, $MM_{4m-1} \subset LM_{4m} + M_{4m+4}$, $M_5 M_{4m-2} \subset LM_{4m} + M_{4m+4}$, 及び $M_8 M_{4m-5} \subset LM_{4m} + M_{4m+4}$ の4つを示せばよい。(iv-(m-1)) より $JM_{4m+1} = JM_5 M_{4m-4} + JLM_{4m-2} + JM_{4m+2}$. そして $JM_{4m+2} \subset M_{4m+4}$. また $JM_5 \subset LM + M_8$ より $JM_5 M_{4m-4} \subset LMM_{4m-4} + M_8 M_{4m-4} \subset LM_{4m} + M_{4m+4}$。従って $JM_{4m+1} \subset LM_{4m} + M_{4m+4}$. 同じように (vi-(m-1)) から $MM_{4m-1} \subset LM_{4m} + M_{4m+4}$ が、(vi-(m-2)) から $M_8 M_{4m-5} \subset LM_{4m} + M_{4m+4}$ が導かれる。また (v-(m-1)) より $M_5 M_{4m-2} = JM_5 M_{4m-4} + LM_5 M_{4m-5} + M_5 M_{4m-1} \subset LM_{4m} + M_{4m+4}$.以上で(イ)が示された。あと(ロ)-(ヘ)も今と同様で、書くと長いが難しくない。ただここまでで示されている等式や $M_5^2 \subset JM_8 + L^2 M$, $J^2 M_8 \subset LM_9 + M_{13}$ などに注意して(イ)の証明のまねをすればできる。 $\square$

<u>prop 5.8.</u> (i) $r \equiv 3 \bmod 4$, $r \geq 7$, $1 \leq p \leq [\frac{r}{4}]+1$ に対し

$$0 \longrightarrow L/M \otimes M_{r-3,p-1}/M_{r-3,p} \longrightarrow M_r/M_{r,p} \longrightarrow M_r/M_{r,p-1} \rightarrow 0$$ は完全.

(ii) $r \not\equiv 3 \bmod 4$, $r \geq 8$, $1 \leq p \leq [\frac{r}{4}]$ の時

$$0 \longrightarrow L/M \otimes M_{r-3,p-1}/M_{r-3,p} \rightarrow M_r/M_{r,p+1} \rightarrow M_r/M_{r,p} \longrightarrow 0$$ は完全.

(iii) $r \equiv 1 \bmod 4$, $r \geq 9$ の時 $M_5/JL \otimes M_{r-5}/M_{r-5,1} \cong M_r/M_{r,1}$.

(iv) $r \equiv 2 \bmod 4$, $r \geq 6$ の時 $J/L \otimes M_{r-2}/M_{r-2,1} \cong M_r/M_{r,1}$.

(v) $r \equiv 0 \bmod 8$, $r \geq 16$ の時 $M_8/M_{8,1} \otimes M_{r-8}/M_{r-8,1} \cong M_r/M_{r,1}$.

(vi) $r \equiv 4 \bmod 8$, $r \geq 12$ の時 $M/L_4 \otimes M_{r-4}/M_{r-4,1} \cong M_r/M_{r,1}$.

証明は書くと長いが，すべて prop 5.7. を使えばすぐ分かることばかりであるので省略する。

さて $\chi(M_r/M_{r+1} \otimes \Theta_c(A))$ を計算しよう。まず prop 5.8 (v) より $M_{8r}/M_{8r,1} \cong S^r(M_8/M_{8,1})$。(i), (ii) より $M_{3r,[\frac{4r}{4}]}/M_{3r+1} \cong S^r(L/M)$。一般の $M_{r,p}/M_{r,p+1}$ も prop 5.8. より厳密に書けるが，場合分けが多く面倒。雑に書くと，$M_{r,p}/M_{r,p+1} \cong S^a(L/M) \otimes S^b(M_8/M_{8,1}) \otimes Q$ という形で Q は I/J, J/L, M/L_4, M_5/L_5 のいずれかであるかこの中の 2 つの tensor 積。a, b は $|r-(3a+8b)| < 16$ で $\left|\frac{4}{3}p - a\right| < 2$, $\left|\left(\frac{r}{8} - \frac{p}{2}\right) - b\right| < 2$ をみたす整数である。また $\mathrm{rank}\, M_r/M_{r+1} = [\frac{r}{4}]+1$ で $\deg M_r/M_{r+1}$ は r の 2 次式だから $\Theta_c(A)$ は無視してよい。$\deg M_r/M_{r+1}$ を r の 2 次式と見た時の係数は上の考察から $\left(\sum_{p=0}^{[\frac{r}{4}]} \frac{4}{3}p\right) \deg L/M + \left(\sum_{p=0}^{[\frac{r}{4}]} \left(\frac{r}{8} - \frac{p}{2}\right)\right) \deg(M_8/M_{8,1})$ を見ればよく，$\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3} \deg L/M + \frac{1}{8} \deg M_8/M_{8,1}\right)$ である。従って $\chi(\Theta_r/M_r \otimes \Theta_c(A))$ の最高次 r^3 の係数は $\frac{1}{24}\left(\frac{1}{3} \deg L/M + \frac{1}{8} \deg M_8/M_{8,1}\right)$ である。ところで，$\deg M_8/M_{8,1} = \deg M_{7,1}/M_7 = 4 \deg I/J + \deg J/L - 2 \times \deg L/M + 2 \deg J/I^2$ (図 4 を見よ) であるから $\frac{1}{3} \deg L/M + \frac{1}{8} \deg M_8/M_{8,1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} \deg L/M + \frac{1}{2} \deg J/L + \deg I/J + \deg I/I^2\right)$. そしてこれは prop. 1 により 0 以上。これで不等式 5 が示された。

§6. 定理6の証明

$(K_X \cdot C) = 0$ とする。$I/I^2 = N^{\vee}_{C_0/X_0} = (a_1, a_2)$ $(a_1 \leqq a_2)$ とおく。$a_1 + a_2 = 2 - (K_X \cdot C) = 2$ で prop 1 より $H^1(\mathcal{O}_X/J) = 0$。従って $a_1 \geqq -1$。すなわち $I/I^2 = (1,1), (0,2), (-1,3)$ のいずれかであるが、このうち $I/I^2 = (1,1), (0,2)$ の場合 (i),(ii) が成り立つことは周知の事実である (cf. Reid [5])。以下 $I/I^2 = (-1,3)$ の場合を考える。

$J/IJ = (b_1, b_2)$ により $I_1/I_1^2 = (b_1+1, b_2+1)$ (I_1 は C_1 の定義 ideal) である。$H^1(\mathcal{O}_X/L) = 0$ より $b_1 \geqq -1$。$b_1 + b_2 = 2a_1 + a_2 = 1$ より $J/IJ = (-1,2)$ 又は $(0,1)$。

<u>lemma 6.1</u> $I_i/I_i^2 = (\alpha_1, \alpha_2)$ $(\alpha_1 < \alpha_2)$, $I_{i+1}/I_{i+1}^2 = (\beta_1, \beta_2)$ $(\beta_1 \leqq \beta_2)$ の時 $\beta_1 + \beta_2 = \alpha_2$, $\alpha_1 \leqq \beta_1$.

<u>証明</u> $J_i/I_iJ_i \cong I_{i+1}/I_{i+1}^2 \otimes I_i/J_i$ と $\deg J_i/I_iJ_i = 2\alpha_1 + \alpha_2$ より $\beta_1 + \beta_2 = \alpha_2$. $\alpha_1 \leqq \beta_1$ は prop 4.1. □

<u>Cor 6.2</u> $I_i/I_i^2 = (1,2)$ ならば $I_{i+1}/I_{i+1}^2 = (1,1)$.

というわけで $J/IJ = (0,1)$ の時は定理6の(iii)の case になる。以下 $J/IJ = (-1,2)$ (i.e. $I_1/I_1^2 = (0,3)$) とする。lemma 6.1. より $I_i/I_i^2 = (0,3)$ ならば $I_{i+1}/I_{i+1}^2 = (1,2)$ 又は $(0,3)$。このうち $I_{i+1}/I_{i+1}^2 = (1,2)$ の時は $I_{i+2}/I_{i+2}^2 = (1,1)$ で $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ がでてきて端終する。従って、あと定理6を示すために言うべきことは $I_1/I_1^2 = (0,3)$, $I_2/I_2^2 = (0,3)$, …… という $(0,3)$ の列は高々2つしか続かないことである。

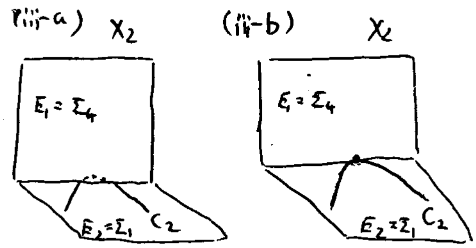
さて $I_0/I_0^2 = (-1,3)$, $I_1/I_1^2 = (0,3)$, $I_2/I_2^2 = (0,3)$ より $J/IJ = (-1,2)$, $L_4/L_5 = (-2,0)$.

また $H^1(\mathcal{O}_X/M)=0$ と prop4(iii) より $L/M=(-1)$。従って $I/J\otimes L/M\cong L_4/M_5$ となり，不等式5の仮定がすべて満たされた。以下，さらに $I_3/I_3^2=(0,3)$ と仮定して矛盾を導こう。$I_1, J_1, L_{(1)}, M_{(1)},\cdots$ を $\hat{I},\hat{J},\hat{L},\hat{M},\cdots$ と書き図4に対応するものを $X_1=\hat{X}$ 上で考える。§4より $\hat{I}/\hat{J}=\hat{J}/\hat{L}=\hat{L}/\hat{M}=\mathcal{O}_{\hat{C}}$, $\hat{J}/\hat{I}^2=\hat{L}/\hat{I}\hat{J}=\hat{M}/\hat{L}_4=\mathcal{O}_{\hat{C}}(3)$ が簡単に計算できる。width 5 の ideal N を $M\supset N\supset M_5$, M/N と N/M_5 は invertible で $\deg M/N<\deg N/M_5$ となるようにとる。$\deg M/M_5=-1$ と $H^1(\mathcal{O}_X/N)=0$ より $\deg M/N=-1$, $\deg N/M_5=0$。従って $M/N\longrightarrow\hat{L}/\hat{M}\otimes\mathcal{O}_{\hat{C}}(-\hat{E})$ は同型。$N_r=F^r(\mathcal{O}_X,N)$ とおく。$r\leq 10$ については図4のような関係がある。prop4.3 より $M_5/M_6\cong\hat{L}/\hat{L}_4\otimes\mathcal{O}_{\hat{C}}(-2\hat{E})=(-2,1)$。特に $N_6/M_6\cong\mathcal{O}_C(1)$。また prop5.5 より $M_7/M_8\cong L/M\otimes M/M_5$。従って $N_8/M_8\cong L/M\otimes N/M_5\cong\mathcal{O}_C(-1)$。ところが N_r の定義から単射 $J/L\otimes N_6/M_6\longrightarrow N_8/M_8$ が存在する。(cf. 森[2](8.6)。雑に言えば，$J/L\otimes N_6/M_6$ も N_8/M_8 も C の dense open subset 上では $x_1^3x_2$ で生成されているのである。) ところが J/L が $\mathcal{O}_C(-1)$ であるから $\mathcal{O}_C\longrightarrow\mathcal{O}_C(-1)$ という単射ができることになり矛盾。従って $I_3/I_3^2=(0,3)$ とはなり得ない。以上で定理6が示された。

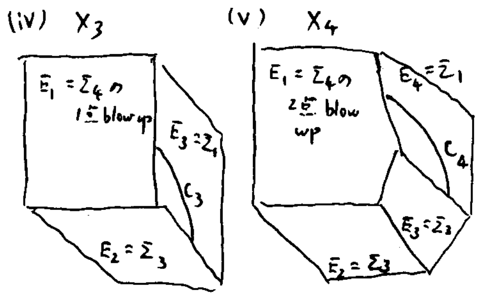
これは言い訳であるが，本来は定理6を示すのに $\chi(\mathcal{O}_X/N_r)$ を計算することにより $\frac{1}{4}\deg M/N+\frac{1}{3}\deg L/M+\frac{1}{2}\deg J/L+\deg I/J+\deg I/I^2\geq 0$ という不等式を得て，この系として定理6が出てくると言いたかった。実際 $I_1/I_1^2=I_2/I_2^2=I_3/I_3^2=(0,3)$ であると上の不等式は

$\frac{-1}{4}+\frac{-1}{3}+\frac{-1}{2}+(-1)+2\geq 0$ と矛盾する。しかし§5のようにこの不等式を示そうとするとたいへんで、証明に確信の持てない部分もあるので人目には見せられない。定理6自体は $\chi(\mathcal{O}_X/N_Y)$ を計算する、ごく初期の段階のところで、この§に示したように証明されてしまうのでこれを示すにとどめた。

また応用についてはまだ何もない。一番ほしいのは elementary transformation であるが、定理6(iii)の一部の場合に知られている Pinkham[4]にある例を見ても分かるようにずいぶん難しい。また $N_{C_0/X_0}, N_{C_1/X_1}, \cdots$ の情報だけでは $N_{C_0/X_0}=(-3,1)$ の場合は C_0 の近傍の様子は決定されない。それは $C_1, C_2, \cdots$ の絵を書いてみればすぐ分かる。定理6(iii)の場合の X_2 は下図の2種類がある。このうち(iii-b)の場合は $(C_2\cdot E_1)_{X_2}=2$ で2重に交わるため C_2 で blow up すると E_1 の strict transform は特異点をもつ曲面になってしまう。



この場合が flip を考える上で一番難しいところである。定理6の(iv)の X_3,(v)の X_4 は各々右図のようになっていて、むしろこちらのほうが簡単な形に見える。



文献

[1] H. Laufer, On $\mathbb{C}P^1$ as an exceptional set, Recent developments in several complex variables, Ann. of Math. Stud. Princeton University Press 100 (1981), 261-275

[2] S. Mori, Flip theorem and the existence of minimal models for 3-fold, preprint (1986/01/23).

[3] T. Ohsawa, On analytic families of submanifolds and holomorphical convexity of neighbourhoods of $\mathbb{P}^1$, J. Math. Soc. Japan 33 (1981), 711-731.

[4] H. Pinkham, Factorization of birational maps in dimension 3, Proc. of A.M.S. Summer Inst. on Singularities, Arcata, 1981, Proc. symposia in Pure Math., A.M.S., 40 (1983), Part 2, 343-371.

[5] M. Reid, Minimal models of canonical 3-folds, Advanced Studies in Pure Math., 1 (1983), Algebraic Varieties and Analytic Varieties, Kinokuniya, 131-180.