

Picard群に自明に作用する K3曲面の自己同型

東京電機大学・理工 金剛誠之

§0. はじめに

K3曲面に自己同型として作用する有限群は、Torelli型定理[6]によつて、K3曲面上の剰余所消しといふ holomorphic 2-form に自明に作用する部分群と Picard群に自明に作用する部分群 a extension として記述される。前者の部分群は、Nikulin[3]、向井[5]によつて完全に分類されていいる。

ここでは、後者の Picard群に自明に作用する部分群を問題とする。Nikulin[3]により、この部分群は巡回群とよぶが、知られており、また Vorontsov[10]による円分体との関連した研究がある。本論では、複円曲面の理論を用ひることで、Picard群に自明に作用する K3曲面の分類と、その具体的構成を与えることを目標とする。

§1. K3曲面の自己同型

この節では、K3曲面の自己同型に関する知られている結

果、及び得られた結果を述べる。

定義 2次元コンパクト連結複素多様体 X は次の2条件

(i) $K_X \sim 0$ (K_X : X の標準準東), (ii) $\dim H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ を満たす時、K3曲面と呼ばれる。

$H^2(X, \mathbb{Z})$ 上には cup 積 \langle , \rangle により、2 symmetric bilinear form の構造がはいるが、以後、これを lattice と呼ぶ。 X の Picard群 $\in S_X$ で表わすと、条件(ii) より S_X は $(H^2(X, \mathbb{Z}), \langle , \rangle)$ の sub-lattice の構造がはいる。 S_X を algebraic lattice と呼ぶ。また S_X の \langle , \rangle に関する直交補空間を T_X で表わし、transcendental lattice と呼ぶ。Torelli 型定理より次が従う：

命題1. X の自己同型群を $\text{Aut}(X)$ と表わすとき、 $\text{Aut}(X)$ の $S_X \oplus T_X$ 上への自然な作用により、 $\text{Aut}(X) \hookrightarrow O(S_X) \times O(T_X)$ と見ることができる。但し $O(S_X), O(T_X)$ は、それらの cup 積を保つ \mathbb{Z} -module S_X, T_X の同型全体より成る群とする。

$\text{Ker} \{ \text{Aut}(X) \rightarrow O(T_X) \}$ に含まれる自己同型を symplectic automorphism と呼ぶ。有限 symplectic automorphism group の Abel群の場合、Nikulin [3] が、一般の場合、向井氏 [5] が分類を与えている。

以下、 $H_X := \text{Ker} \{ \text{Aut}(X) \rightarrow O(S_X) \}$ を問題とする。

命題2 ([3]). (i) X が algebraic の場合. H_X は有限巡回群。

(ii) X が non-algebraic の場合. H_X の各元は、無限位数である。

上の命題より有限群を問題にすら限り X は algebraic と仮定しこそ。

命題3 ([3]). $m_X := |H_X|$ とする。この時. $\varphi(m_X) \mid \text{rank } T_X$, ここで $\varphi(\cdot)$ は Euler 様数を表す。更に \mathbb{Q} 上の表現 $H_X \rightarrow O(T_X \otimes \mathbb{Q})$ は巡回群 D_{m_X} の \mathbb{Q} 上の既約表現 τ . non-trivial 且 fixed vector ε も下述のものと同型である。また. $H_X = \langle g \rangle$, $\omega_X \in X$ 上の non-zero holomorphic 2-form とするとき. $g^* \omega_X = e_{m_X} \omega_X$, 但し. e_{m_X} は 1 の原始 m_X 乗根である。

系4 ([3]). $m_X \leq 66$.

系4 1). $\text{rank } T_X \leq \text{rank } H^2(X, \mathbb{R}) - 1 = 22 - 1 = 21$ に注意すれば、命題3 より従う。

定理. S_X が unimodular (i.e. $|\text{discr } S_X| = 1$) と仮定する。

この時.

(i) $m_X \mid 66, 44, 42, 36, 28$ or 12 .

(ii) $m = 66, 44, 42, 36, 28$ or 12 とする。この時. $m_X = m$

を満たす algebraic K3 曲面 ザ同型を除いて一意的に存在する。

注意1. Vorontsov は、[10] の中で、上記定理の(i) 及び、 S_x が non-unimodular の場合の(i), (ii) にあたる結果を主張している。彼は、円分体 $\mathbb{Q}(m_x)$ の理論を用いている（証明は publish されていない）。

注意2. 上記定理(ii)においては、我々は具体的に K3 曲面 を構成することで存在を証明している。また、 S_x が non-unimodular の場合も、具体的構成を与えることができる。

§2. 例

(I) S_x が unimodular の場合。

以下、 e_v は 1 の原始レギュラ根とする。

$$1^{\circ}) \quad m_x = 66$$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 - u \prod_{i=1}^{11} (u - e_{11}^i) \\ g: (x, y, u) \longmapsto (e_{66}^2 x, e_{66}^3 y, e_{66}^6 u) \end{cases}$$

$\Delta = u^2 \prod (u - e_{11}^i)^2$ とする。 $\Delta = 0$ i.e. $u = 0, u^{11} = 1$ 上で。

II型 singular fibre をもつ 楕円曲面である。 $u = \infty$ 上では。

$\text{ord}_{u=\infty}(\Delta) = \text{order}_{u=\infty} \left(\frac{1}{(1/u)^2} \cdot \frac{1}{(1/u)^{22}} \cdot \prod (1 - e_{11}^i (1/u))^2 \right) = -24 \equiv 0 \pmod{12}$ たり。 smooth fibre である。構成方法より、

$h^1(\emptyset_X) = 0$ であり、 $C_2(X) = 12 \times e(\mathbb{II}) = 24$ である。 X は $K3$ 曲面 と なり。但し、 $e(T)$ は、T型 singular fibre の topological Euler 数 ε を 表す。 fibre のコホモロジー数 χ 、section のコホモロジー数 ε が S_X を生成し、 χ の支点行列は $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で与えられ S_X は unimodular となる。以後、lattice $(\mathbb{Z}^2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$ を U と表す。

2°) $m_X = 44$

$$\left\{ \begin{array}{l} X: y^2 = x^3 + x + t^{11} \\ g: (x, y, t) \mapsto (e_{44}^{22} x, e_{44}^{11} y, e_{44}^2 t) \end{array} \right.$$

$t = \infty$ 上 II型 singular fibre, $t^{22} = -\frac{4}{27}$ 上 I₁型 singular fibre で構成される。横円 $K3$ 曲面 \mathbb{II} : S_X は section と fibre のコホモロジー類で生成される。

3°) $m_X = 42$

$$\left\{ \begin{array}{l} X: y^2 = x^3 - u^5 \prod_{i=1}^7 (u - e_i^i) \\ g: (x, y, u) \mapsto (e_{42}^{10} x, e_{42}^{15} y, e_{42}^6 z) \end{array} \right.$$

$u = 0$ 上 II*型 singular fibre, $u^7 = 1$ 上 II型 singular fibre で構成される。横円 $K3$ 曲面 \mathbb{II} : S_X は section, general fibre と II*型 singular fibre の components で生成される $S_X \cong U \oplus E_8$ である。但し、 E_8 は negative definite, rank = 8, even, unimodular である。

lattice Σ 、交点行列は、 E_8 型の Dynkin matrix である。

4) $m_x = 36$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 - u^5 \prod_{i=1}^6 (u - e_i^i) \\ g: (x, y, u) \mapsto (e_{36}^2 x, e_{36}^3 y, e_{36}^{30} u) \end{cases}$$

$u=0$ 上 II^* 型 singular fibre, $u=\infty$, $u^6=1$ 上 II^* 型 singular fibre

をもつ 素因 K3 曲面 Σ $S_x \cong U \oplus E_8$.

5) $m_x = 28$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 + x + t^7 \\ g: (x, y, t) \mapsto (e_{28}^{14} x, e_{28}^7 y, e_{28}^2 t) \end{cases}$$

$t=\infty$ 上 II^* 型 singular fibre, $t^{14}=-\frac{4}{27}$ 上 I_1 型 singular fibre

をもつ 素因 K3 曲面 Σ $S_x \cong U \oplus E_8$.

6) $m_x = 12$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 - u^5(u-1)(u+1) \\ g: (x, y, u) \mapsto (e_{12}^2 x, e_{12}^3 y, -u) \end{cases}$$

$u=0, \infty$ 上 II^* 型 singular fibre, $u=\pm 1$ 上 II^* 型 singular fibre

をもつ 素因 K3 曲面 Σ $S_x \cong U \oplus E_8 \oplus E_8$.

注意 以上の積円 K3 曲面はすべて section Σ を有する。
 Mordell-Weil rank は 0 である。更に、 X 上の有理曲線は、section (unique)
 と reducible singular fibre の component は限ることも示す
 ことができる。

(II) S_X が non-unimodular の場合

Σ の場合、§3 で示すが、 $m_X = 2^k$ ($1 \leq k \leq 4$), 3^ℓ ($1 \leq \ell \leq 3$),
 $5, 5^2, 7, 11, 13, 17, 19$ が起り得る。

1°) $m_X = 19$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 + t^7 x + 1 \\ g: (x, y, t) \mapsto (e_{19}^7 x, e_{19} y, e_{19}^2 t) \end{cases}$$

$t=0$ 上 II 型 singular fibre, $t=\infty$ 上 III 型 singular fibre,
 $t^{19} = \left(-\frac{4}{27}\right)^{-1}$ 上 I₁ 型 singular fibre をもつ積円 K3 曲面 Z 。

χ の Mordell-Weil rank = 1, $\text{rk } S_X = 4$ 。

2°) $m_X = 17$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 + t^7 x + t^2 \\ g: (x, y, t) \mapsto (e_{17}^7 x, e_{17}^2 y, e_{17}^2 t) \end{cases}$$

$t=0$ 上 IV 型, $t=\infty$ 上 III 型, χ の他 17 個の I₁ 型 singular fibre をもつ積円 K3 曲面 Z 。
 $\text{Mordell-Weil rank} = 1, \text{rk } S_X = 6$ 。

3°) $m_x = 13$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 + t^5 x + t \\ g: (x, y, t) \mapsto (e_{13}^5 x, e_{13} y, e_{13}^2 t) \end{cases}$$

$t=0$ 上 II型, $t=\infty$ 上 III^* 型, 他 13 個の I₁ 型 singular fibre と \rightarrow 横円 K3 曲面 $\tilde{\tau}$. Mordell-Weil rank = 1, $\text{rk } S_x = 10$.

3°' $m_x = 13$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 + t^7 x + t^8 \\ g: (x, y, t) \mapsto (e_{13}^7 x, e_{13}^4 y, e_{13} t) \end{cases}$$

$t=0$ 上 III型, $t=\infty$ 上 IV^* 型, 他 13 個の I₁ 型 singular fibre と \rightarrow 横円 K3 曲面 $\tilde{\tau}$. Mordell-Weil rank = 1, $\text{rk } S_x = 10$.

4°) $m_x = 11$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 + t^5 x + t^2 \\ g: (x, y, t) \mapsto (e_{11}^5 x, e_{11}^2 y, e_{11}^2 t) \end{cases}$$

$t=0$ 上 IV型, $t=\infty$ 上 III^* 型, 他 11 個の I₁ 型 singular fibre と \rightarrow 横円 K3 曲面 $\tilde{\tau}$. Mordell-Weil rank = 1, $\text{rk } S_x = 12$.

5°) $m_x = 7$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 + t^3 x + t^8 \\ g: (x, y, t) \mapsto (e_7^3 x, e_7 y, e_7^2 t) \end{cases}$$

$t=0$ 上 III^* 型, $t=\infty$ 上 IV^* , 他 7 個の I₁ 型 singular fibre

$\Sigma \rightarrow$ 純円 K3 曲面 $\tilde{\Sigma}$. Mordell-Weil rank = 1, $\text{rk } S_x = 16$.

6') $m_x = 5$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 + t^3 x + t^7 \\ g: (x, y, t) \mapsto (e_5^3 x, e_5^2 y, e_5^2 t) \end{cases}$$

$t=0$ 上 II^* 型, $t=\infty$ 上 III^* 型, その他 5 個の I_1 型 singular fibre

$\Sigma \rightarrow$ 純円 K3 曲面 $\tilde{\Sigma}$. Mordell-Weil rank = 1, $\text{rk } S_x = 1$.

7') $m_x = 3^2$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 + t^5 x + t^3 \\ g: (x, y, t) \mapsto (e_9^5 x, e_9^3 y, e_9^2 t) \end{cases}$$

$t=0$ 上 I_0^* 型, $t=\infty$ 上 III^* 型, その他 9 個の I_1 型 singular

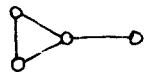
fibre $\Sigma \rightarrow$ 純円 K3 曲面 $\tilde{\Sigma}$. Mordell-Weil rank = 3, $\text{rk } S_x = 16$.

8') $m_x = 3^3$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 + u \prod_{r=1}^9 (u - e_{27}^{3r}) \\ g: (x, y, u) \mapsto (e_{27}^2 x, e_{27}^3 y, e_{27}^6 u) \end{cases}$$

$u=0, u^9=1$ 上 II 型 singular fibre, $u=\infty$ 上 IV 型 singular fibre を持つ 純円 K3 曲面 $\tilde{\Sigma}$. Mordell-Weil rank = 0. g は到達不能消えなさい X 上の holomorphic 2-form $\omega = 1 \wedge 27$ 複根(原始) $\tilde{\Sigma}$ 作用してあり. $\omega(3^3) = 18$ で $\text{rk } S_x = 22 - \text{rk } T_x = 22 - 18 = 4$. 更に S_x は.

橋円曲面の unique section 及び IV 型 singular fibre の component から生成されることがわかる。 X 上の smooth rational curves の dual graph は $\mathbb{Z}/2$ の通り：



\simeq a diagram of symmetry by $\mathbb{Z}/2$ であることから、 g は S_x に自明に作用することが解る。

9°) $m_x = 3$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 - u^5(u-1)^5(u+1)^2 \\ g: (x, y, u) \mapsto (e_3 x, y, u) \end{cases}$$

$u=0, 1$ 上で II* 型、 $u=-1$ 上で IV 型 singular fibre E を持つ。橋円 K3 曲面で unique section を持つ。

10°) $m_x = 5^2$

\simeq a 場合、 $\varphi(5^2) = 20$ で、 $\text{rk } S_x = 22 - \text{rk } T_x = 2$ 。§3, 補題 9 より S_x の discriminant group は $\mathbb{Z}/5$ or $\mathbb{Z}/5^2$ 。ところが、indefinite symmetric bilinear form の reduction E による $\mathbb{Z}/5^2$ が解り、 S_x が not represent zero (i.e. $\nexists c \in S_x$ with $c^2 = 0$) が直接確かめられる。従って、 $m_x = 5^2$ の自己同型をもつ K3 曲面は、橋円曲面の構造をもたない。この場合、 \mathbb{P}^2 の分歧被覆として例を構成する。

$\mathbb{P}^2 \ni C := \{x_0^6 + x_0x_1^5 + x_1x_2^5 = 0\}$ とすると、 C は非特異。

$g = \begin{pmatrix} 1 & \\ & e_{25}^5 \\ & e_{25}^{+5} \end{pmatrix}$ は、 C が invariant に \mapsto transformation。

$X \in \mathbb{P}^2$ の C で分歧点は重被覆とすると、 X は K3 曲面で g a lifting が、求めることである。

§3. Picard 群に自明に作用する自己同型

この節では、二次形式論、楕円曲面論を用いて、Picard 群に自明に作用する自己同型を分類する。前半(I) で S_X が unimodular の場合と、後半(II) で S_X が non-unimodular の場合を扱う。

(I) S_X が unimodular の場合

補題5. S_X : unimodular $\Rightarrow S_X \cong U, U \oplus E_8$ or $U \oplus E_8 \oplus E_8$,
但し $U = (\mathbb{Z}^2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$, E_8 は negative definite unimodular lattice で
交点行列は E_8 型 Dynkin matrix に対応するものとする。

証明. S_X が even (i.e. $\forall x \in S_X, x^2 = \langle x, x \rangle \equiv 0 \pmod{2}$) 且
indefinite (by Hodge index thm) に注意すると、[7] より従う。

補題6. $S_x : \text{unimodular} \Rightarrow \exists \pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ elliptic pencil
with a section s.t. π は II^* 型 singular fibre だけは reducible
singular fibre を持つ。

証明. 補題より. S_x は represent zero. より [6], §3, Cor. 3
より X は 楕円曲面の構造を持ち. $S_x \cong U$ が component として
もつことから. この椭円曲面は section Σ を持つことが解る。更に.
 $\underbrace{\text{fiber}}_{\text{と section}}$ に直交する singular fibre の components に対応する 支点行列
は II^* 型に限ることが従う。

§1 で述べた定理は. より正確に次の形で述べられる:

- 定理7. (i) $S_x \cong U \Rightarrow m_x | 66, 44 \text{ or } 12$ 。更に $\varphi(m_x) = \text{rk } T_x$
 $= 20$ ならば $m_x = 66$ or 44 。
(ii) $S_x \cong U \oplus E_8 \Rightarrow m_x | 42, 36 \text{ or } 28$ 。
(iii) $S_x \cong U \oplus E_8 \oplus E_8 \Rightarrow m_x | 12$ 。

証明. (i), (ii), (iii) とも 同様であるので. ここでは. 一番
複雑な (i) の場合を証明する。

補題6 の elliptic pencil Σ $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ とする。この場合、

$S_x \cong U$ より、 π の singular fibre はすべて既約で、I型とII型のみが現われる。今、 r, A をそれぞれ I型、II型の singular fibre の個数を表めると次が成り立つ：

$$24 = \text{euler number of } X = \sum_{F_i: \text{singular fibre}} \text{euler number of } F_i.$$

I型、II型の singular fibre の Euler 数は、 A が x に 1, 2 である場合

$$2A + r = 24$$

を得る。 A, r の可能性は次の通り：

A	12	14	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
r	0	r	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24

一方、 $q(m_x) | \text{rank } T_x = 20$ より $5|m_x, 8|m_x$ を示せば (1) の前半が証明工である。

(A) $m_x \neq 25$ ： S_x に自明に作用する自己同型は section を保つから、fibre への作用は 6 or 4 の約数を位数にもつ。従って $25|m_x$ ならば section は order 25 で作用するが、上記表より、 χ の様な作用は不可能。 $\therefore m_x$ は 25 で割り切れない。

(B) $5|m_x$ とする。 $g \in H_x$ で $|g| = 5$ とする。 (A) と同様に g は section は位数 5 で作用し、上記表より。

$$(A, r) = (12, 0), (7, 10) \text{ or } (2, 20)$$

しか起り得ない。いずれの場合も、 g の固定点は II型 singular

fibre 上にある。従つ, 2. fixed curve があれば、 χ の Euler 数は、正であることに注意し、Lefschetz fixed p.t. formula (cf. [9]) を適用すると

$$0 \leq \# \text{isolated fixed pts.} + \text{fixed curves} \circ \text{Euler 数}$$

$$\begin{aligned} &= \sum \text{trace } g^*|H^i(x, \mathbb{Q}) = 2 + \text{trace } g^*|S_{x \in \Theta} + \text{trace } g^*|T_{x \in \Theta} \\ &= 2 + 2 + \frac{(-20)}{4} = -1 \end{aligned}$$

より矛盾を得る (最後の $\text{trace } g^*|T_{x \in \Theta} = -5$ は、 $g^*|T_{x \in \Theta}$ が $\mathbb{Z}/5$ の fixed vector Σ もたらす Θ 上の irred. representation の直和となることから従う)。

(C) $g|m_x$ を仮定する。
 $g \in H_x, |g|=8 \neq 8$
もし g が base に 位数 2 で作用する。 g^2 は fibre に 位数 4 の倍数で作用する。ところが singular fibre は I₁ 型, II 型 だけであるので、この場合は起こらない。
さて、 g は base に 位数 8 または 4 で作用し、上記表より、 $(\Delta, r) = (12, 0), (10, 4), (8, 8), (6, 12), (4, 16), (2, 20)$ or $(0, 24)$ が起り得る。

Claim 1 g は base に 位数 8 で作用でない。

∴ g が base に 位数 8 で作用していると、 $(r, \Delta) = (8, 8)$ or $(24, 0)$ 。
 g^4 は base に 位数 2 で作用し、 g^4 の invariant たゞ 2 つ \rightarrow fibre は smooth elliptic curve。 g^4 の fixed points はこの 2 つ \rightarrow fibre 上にあり、(B) と同様に Lefschetz fixed pts. formula より

$$0 \leq \# \text{isolated fixed points of } g^4 + \sum \text{Euler number of fixed curves of } g^4 \\ = 2 + 2 - 20 = -16$$

で矛盾を得る。

$\mathcal{F} \rightarrow \mathbb{P}^1$. g は base に 位数 4 で作用しているらしい。

(d) $(\Delta, r) = (12, 0), (8, 8), (4, 16), (0, 24)$ の場合. g が invariant である \mathbb{P}^1 上の fibre は共に smooth elliptic curve である。
 g は non-zero holomorphic form $\lambda = 1$ の原始 8 乗根で作用するので、 g が section (base) 上の fixed pts. の tangent space T_x に作用を考慮することで、上記の smooth elliptic curve には 位数 8 で作用することになり矛盾を得る。

(e) $(\Delta, r) = (10, 4), (6, 12), (2, 20)$ の場合。 $\lambda = g^4$ とおくと $\lambda|_{S_x} = 1_{S_x}$, $\lambda|_{T_x} = -1_{T_x}$. Nikulin の定理 ([4], Thm. 4.2.2.) より、 λ の fixed pts set は

$C + E$, C は genus 10 の smooth curve, $E \cong \mathbb{P}^1$ (section) である。 g は base に 位数 4 で作用しているから, $|g|_C| = 4$ が従う。更に g の C 上の fixed points は g の invariant fibre との交点、すなはち、2つの II型 singular fibre と C との交点である。 \geq 2つの II型 singular fibre と E は一点で交わるから、 C と II型 singular fibre は 1 点 (重複度をもつ) で交わらなければならぬ。

実際、そうでもないとする。この II型 singular fibre は、 C の fixed curve は f で、 ∞ しまう。以上から $g \circ C$ 上の fixed points は丁度 2 個 (g^2 の fixed pts も変わらない) で、 λ の ramification index が 4 であることが従う。 C と g は Hurwitz の公式を適用すると

$$18 = 2g(C) - 2 = 4(2g(C/g)) - 2 + (4-1) \times 2$$

で矛盾を得る。

注意(i) $m_x = 66$ ならば $(A, r) = (12, 0)$ である。実際、 g は base に 位数 11 の倍数で作用するが、上記表より、general fibre は、位数 3 の自己同型(固定点をもつ)をもたらさず、I型 singular fibre は現われない。

(ii) $m_x = 44$ ならば $(A, r) = (1, 22)$ である。実際、general fibre は、位数 4 の固定点をもつ自己同型をもたらすから、上記表より、 g は base $\in 22$ で作用し、 $(A, r) = (1, 22)$ or $(0, 24)$ である。この場合 (B) と全く同様の議論で Hurwitz の公式より矛盾が導かれる。すなはち $(A, r) = (0, 24)$ ならば

また、 $m_x = 42$ ならば $(A, r) = (7, 0)$ 、 $m_x = 36$ ならば $(A, r) = (7, 0)$ 、 $m_x = 28$ ならば $(A, r) = (0, 14)$ 、 $m_x = 12$ ならば $(A, r) = (2, 0)$ が成り立つ。

(II) S_x が non-unimodular の場合：

まず lattice $H^2(x, \mathbb{Z})$ の準備をする。

$M \in \text{lattice}$ (i.e. non-degenerate symmetric bilinear form) とする。 M が non-degenerate であることをから、 M から $M^* := \text{Hom}(M, \mathbb{R})$ への自然な map は単射である。 $A_M := M^*/M$ とおくと、 A_M は finite abelian group である。 M が unimodular であることを。

$A_M = \{1\}$ であることは同値である。

S_x, T_x は unimodular lattice $H^2(x, \mathbb{Z})$ の sublattice で直交していることから $A_{S_x} \cong A_{T_x}$ が従う。次に補題が成り立つ。

補題 8. $g \in H_x$ とする。 g^* は A_{T_x} に自明に作用する。

補題 9. ([10], Thm. 4) $A_{S_x} \neq \{1\}, m_x = |H_x|$ とする。

(i) $m_x = p^k$ for some prime p .

(ii) A_{S_x} は p -elementary abelian group.

証明. $p \mid m_x$ とする prime $p \in \mathbb{Z}$ を固定する。 $g \in H_x$ で $|g| = p$ とする \mathbb{Z} による \mathbb{Z} 選ぶ。 $\forall x^* \in T_x^*$ に付し

$$x^* + g^*(x^*) + \cdots + (g^{p-1})^*(x^*)$$

は $T_x \otimes \mathbb{Q}$ の中の g^* -invariant vector。 g^* は $T_x \otimes \mathbb{Q}$ 上、non-trivial な vector $v \in T_x$ から (命題 3 参照)、

$x^* + g^*(x^*) + \cdots + (g^{p-1})^*(x^*) = 0$ 。他方、補題 8 より、 g^* は、 A_{T_x} に自明に作用しないから、

$$x^* + g^*(x^*) + \cdots + (g^{p-1})^*(x^*) \equiv px^* \pmod{T_x}.$$

以上より

$$px^* \equiv 0 \pmod{T_x}.$$

したがって、 A_{T_x} は p -elementary で、 $m_x = p^\ell$ とす。

補題 10. ([10], Thm. 4). $\ell(T_x) \leq 2$, 2. A_{T_x} a minimal generator の個数を表す。このとき

$$\ell(T_x) \leq \frac{\text{rank } T_x}{\varphi(m_x)}$$

が成立する。

系 11. $A_{S_x} \cong A_{T_x} + \{1\} \Rightarrow m_x = 2^k (1 \leq k \leq 4), 3^\ell (1 \leq \ell \leq 3), 5, 5^2, 7, 11, 13, 17 \text{ or } 19$ 。

証明. 補題 9, 及び $\varphi(m_x) \mid \text{rank } T_x$, $\text{rank } T_x \leq 21$ より。 m_x は上のいずれかである。もし $m_x = 2^5$ とす。 $m_x = 2^5$ とす。 $\varphi(m_x) = 2^4$ より。 $\text{rank } T_x = 16$ 。補題 10 より。 $\ell(T_x) = 1$ 。このとき。 $\text{rank } S_x = 6$, $\ell(S_x) = 1$, S_x : 2-elementary lattice (i.e. A_{S_x} : 2-elementary) である。このとき Nikulin の定理 ([4], Thm. 4.3.2)、 $\text{rank } S_x + \ell(S_x) \equiv 0 \pmod{2}$ に反する。

§4. 一意性について

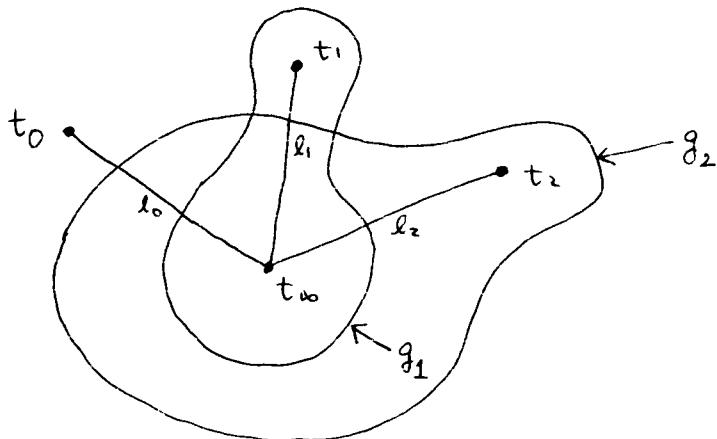
以下、 S_x は unimodular と仮定する。このとき、 $H^2(X, \mathbb{Z})$ は S_x と T_x の直和となる。まず次を示す。

補題12. X, Y が algebraic K3 surfaces で $|H_X| = |H_Y| = m$, 且 $g(m) = \text{rank } T_X (= \text{rank } T_Y)$ とする。 $H_X = \langle g \rangle$, $H_Y = \langle h \rangle$ とする。このとき、cup 繼 Σ 保つ \mathbb{Z} -module の同型 $\Psi: H^2(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(Y, \mathbb{Z})$ で次の満たすものが存在する：

- ① $\Psi(S_X) = S_Y$, $\Psi(T_X) = T_Y$,
- ② Ψ は effective divisor の class を保つ,
- ③ $\Psi \circ g^* = h^* \circ \Psi$.

証明. ① 由(I)の最後の注意より、 X, Y には、共に、同じ型の singular fibres Σ で複数の曲面の構造が入る。 S_X, S_Y は $\chi_{\text{gen}} \neq 0$. \exists an elliptic pencil a section & singular fibre or components, 及び general fibre の class で生成される。更に X, Y 上の非特異有理曲線は、これらに限られることが解り。② Σ 満たす同型 $S_X \cong S_Y$ が存在する。 g, h は、この elliptic pencil への作用の仕方を解くから、 T_X, T_Y が base Σ の singular fibre の vanishing cycles Σ 用いて記述される。十分である。今、 $S_X \cong U \oplus E_8 \oplus E_8$, $T_X \cong U \oplus U$, $m_X = 12$ の場合 Σ 。

証明する。 $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^1 E$ 上の elliptic pencil ε で、 t_0, t_{∞} 上で II^* 型 singular fibres, t_1, t_2 上で I^* 型 singular fibres が ε に含まれる。今、 t_0 から t_i への path l_i ($i=0, 1, 2$) を取る。下図を参考して、closed path g_i ($i=1, 2$) を考えよ:



今、 π が general fibre F の $H^1(F, \mathbb{Z})$ の base $\varepsilon \{g_1, g_2\}$ とする。
 t_1, t_2 (resp. t_0, t_{∞}) の回りで monodromy が $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
であることに注意すると g_1 は沿 $\gamma_1 \varepsilon$, g_2 は沿 $\gamma_2 \varepsilon$ 動かすと closed
2-cycle が得られる。これが G_1 で表される。同様に $(-g_1)$ は沿
 $\gamma_2 \varepsilon$, $(-g_2)$ は沿 $\gamma_1 \varepsilon$, $(-g_1)$ は沿 $\gamma_2 \varepsilon$, $(-g_2)$ は沿 $\gamma_1 \varepsilon$ 動かして、
 ε は closed 2-cycles ε で表される。これが G_2, G_3, G_4 で表される。但し
 $(-g_i)$ は g_i の逆向きである。 $\{G_1, G_2, G_3, G_4\}$ の交点行列は

$$\left[\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

となり、これが T_X の base となる。

- 貞性の証明

補題12と同一記号の下で考える。必要ならば、 f^k を考慮す
ることで、 g, h は non-zero holomorphic 2-forms ω_X, ω_Y に
おれり $e^{\frac{2\pi i}{12}}$ で作用しているとしてよい。 ω_X, ω_Y が、 g^*, h^*
の固有 vector (一次元固有空間) であるから、 $\Psi \otimes \mathbb{C}(\omega_X) = \lambda \omega_Y$,
 $\lambda \in \mathbb{C}^*$ が直り立つ。Torelli 型定理より、 Ψ は 同型写像
 $Y \xrightarrow{\sim} X$ より引き起こされている。

注意 S_X が non-unimodular の場合、§2, (II), $3^\circ), 3^\circ)$ の
様に、墨田 \mathfrak{f} が singular fibre となる複角曲面で、同じ位数の
自己同型 $\mathfrak{f} \rightarrow K3$ 曲面が存在し、上の方法は 直接適用
できない。Vorontsov [10] の結果(§1. 注意1 参照)を認めれば、
 S_X が non-unimodular の場合も、§2 と §3 に限ることが解る。

最後に、 $m_X = 66$ の $K3$ 曲面は、私の他に、independent に、
Dolgachev ら、塙田徹治氏、齋藤恭司氏が構成していることを
注意しておく。

参考文献

- [1] K. Kodaira , On compact analytic surfaces, II-II, Ann. of Math., 77 (1963), 563-626 ; 78 (1963), 1-40.
- [2] S. Kondō , On automorphisms of algebraic K3 surfaces which act trivially on Picard groups, Proc. Japan Acad. Vol.62, Ser.A (1986), 356-359 .
- [3] V.V. Nikulin , Finite automorphism groups of Kähler surfaces of type K3 , Proc. Moscow Math. Soc. 38 (1979), 75-137.
- [4] V.V. Nikulin , On the quotient groups of the automorphism group of hyperbolic forms by the subgroups generated by 2-reflections, I Soviet Math. 22 (1983), 1401 - 1476.
- [5] S. Mukai , preprint (1985)
- [6] I.Piatetskii-Shapiro , I.R. Shafarevich , A Torelli theorem for algebraic surfaces of type K3 , Math. USSR-Izv. 35 (1971), 530-572.
- [7] J.P. Serre , A course in arithmetics , Springer.
- [8] K. Shiga , One attempt to the K3 modular function II , Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa , Cl. Sci. (4), 8, no.1, 157-182 (1981)
- [9] K. Ueno , A remark on automorphisms of Enriques surfaces , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo , vol.23, no.1 (1976), 149-165 .
- [10] S.P. Vorontsov , Automorphisms of even lattices that arise in connection with automorphisms of alg. K3 surfaces , Vestnik Mosk. Univ. Matematika , 38, 19-21 (1983).