代数幾何学シンポジウム記録
1987年度　pp.65-71

モンジエ・アンペル方程式

阪大・理　角田秀一郎

1. Introduction.　標数正の代数多様体上に，（リーマン）計量，曲率，リッチ曲率等を定義し，それから得られる微分方程式を解いてみようという一つの試みをここで述べてみる。筆者は上の試みが，代数幾何に新しい幾何を生み出すと信じるが，単なる幻想かもしれないし，幸運にも上記のような概念が存在したとしても，これから述べる定義とは全く異なるかもしれない．読者はひとつの試みとしてとらえてくれることを筆者は望む．なお，我々は標数正の多様体上に"微分幾何的類似物"としてクリスタル・コホモロジーを持っているが，これと以下の諸概念との関係ははっきりしていない．したがって以下述べる事がらすべて既知の事実のやき直しという可能性もあることに注意されたい．

2. Definition.　V を標数正の代数閉体 k ($k=\bar{k}$, $ch(k)=p>0$) 上の非特異代数多様体とする．閉点 $P\in V$

の局所環の完備化 $\widehat{\mathcal{O}}_{p,V}$, $n=\dim V$ 変数の形式的巾級数環に同型である。Witt ベクトルの環 $R=W(\bar{k})$ 上の n 変数形式的巾級数環 $R[[T_1,\ldots,T_n]]$。ここで R の複素数体 $\mathbb{C}$ への埋め込みをひとつ固定し，$R\{T_1,\ldots,T_n\}$ を $R[[T_1\cdots T_n]]$ と $\mathbb{C}\{T_1,\ldots,T_n\}$ (収束巾級数環) の共通部分とする．ここで，自然な準同型 $R\{T_1\ldots T_n\}\overset{\pi_p}{\twoheadrightarrow}\widehat{\mathcal{O}}_{p,V}$ をひとつとり，固定する．自然な単射準同型 $\{V$上の正則関数$\}\longrightarrow\{\mathbb{V}\longrightarrow\coprod_{p\in V}\widehat{\mathcal{O}}_{p,V}\}$ ($\mathbb{V}=\{V$の閉点$\}$) により V上の正則関数を $\mathbb{V}$から $\coprod_{p\in V}\widehat{\mathcal{O}}_{p,V}$ への写像とみなす．ここで，正則関数の持ち上げを定義する．正則関数の持ち上げ $\varphi:\mathbb{V}\to R\{T_1,\ldots,T_n\}$ とは，$\pi_p(\varphi(p))$ で定義した $\mathbb{V}\to\coprod_{p\in V}\widehat{\mathcal{O}}_{p,V}$ が上の意味で正則関数になっていることをいう．直観的にいえば，この $\mathbb{V}\longrightarrow R\{T_1,\ldots,T_n\}$ を"正則関数"と思って議論を進めていくということである．ここで $R\{T_1\cdots T_n\}$ は $\dim\mathbb{C}$ 上の解析関数の集まりと思って"値"を考えることができることに注意する(後で極限操作のとき有効となる)．上の議論と全く同様に，正則関数の微分の持ち上げ，標準層 (canonical bundle) の持ち上げ，可逆層，ベクトルバンドルの持ち上げを定義できる．残念なことにこれだけでは充分な議論が展開できず，有限射を使ってより多くの"関数"を考慮に入れなければならない．

まず，$k[[T_1,\dots,T_n]]$の商体の代数閉包内の整閉包を$S = k[[T_1 \cdots T_n]]'_{Q(k[[T_1 \cdots T_n]])}$とおく．これに対し，$S$の持ち上げが存在する．すなわち．$T'$という整域で，$T=R\{T_1 \cdots T_n\}$上整で$T'$から$S$へ自然な準同型がある．$\{U_\alpha \to V\}$を$V$のある開集合への分離有限射の集まりとして，上と同様に持ち上げを定義する．その際局所環の持ち上げは，T'の中で作り，$T' \to S$とcompatibleになるようにとる．

$f_{\alpha i}$, $g_{\alpha i}$をU_α上の正則関数の持ち上げとすると，"関数"$\sum f_{\alpha i} \bar{g}_{\alpha i}$を考えることができる．ここで$\bar{g}_{\alpha i}$は$g_{\alpha i}$の共役である$(T=R\{T_1 \cdots T_n\} \hookrightarrow \mathbb{C}\{T_1,\dots,T_n\})$ この$\sum f_{\alpha i} \bar{g}_{\alpha i}$が，各点，$p \in \mathrm{image}(U_\alpha)$で，$\mathbb{C}\{T_1 \cdots T_n\}$に対応する$disc$上の関数となるとき，$\sum f_{\alpha i} \bar{g}_{\alpha i}$を擬連続関数と呼び，これが，$r$回微分可能のとき，擬$C^r$関数と呼ぶ．擬$C^\infty$関数の列$\{F_n\}$があって．任意の$r \geq 0$に対して，$F_n$の$r$回微分が，$n \to \infty$のとき，収束するとき，$\lim F_n$を擬$\hat{C}$関数と呼び，擬$\hat{C}$関数については，その関数の値，微分を定義できることに注意されたい．

3. 計量，曲率．任意の階数のベクトルバンドルについて定義できるが，記号が複雑になるだけなので，ラインバンドルのときに説明する．擬C^∞関数が局所的に，$\sum |f_{\alpha i}|^2$とかけかつ各点で値が

正のとき，正と呼ぶ。同様に $\Sigma|f_i|^2$ の形の擬 C^∞ 関数の極限となる擬 C^∞ 関数は値（各点での）が正のとき，正と呼ぶ。開被覆 $\{U_\alpha\}$ に対して，U_α 上定義された擬 C^∞ 関数 F_α が，正擬 C^∞ 関数の比であらわされ，かつ line bundle L の変換と compatible のとき，$\{F_\alpha\}$ を L の計量とよぶ。このとき，$\partial\bar{\partial}\log F_\alpha$ が well-defined でこれを Ricci 曲率と呼ぶ。ここで well-defined は自明ではないことに注意する。実際，$ch(k)\neq 2$ のとき，

$\partial\bar{\partial}\log\Sigma|f_i|^2=\frac{1}{2}\Sigma(f_i df_j-f_j df_i)\wedge(\bar{f}_i d\bar{f}_j-\bar{f}_j d\bar{f}_i)$ という公式を使う。

$ch(k)=2$ のとき，及び詳細は[1]を参照されたい。

4. 予想（あるいは期待）．ここでは V は非特異射影多様体とする。接ベクトルバンドル T_V の計量（正確には定義していないのであるから推測していただきたい）ω が局所的に $\partial\bar{\partial}\log$(正擬 C^∞ 関数の商）とかけるとき，ω を Kähler 計量と呼ぶ。

予想 1．V は上の通り．もし 1) K_V ample 2) $K_V\sim 0$（あるいは 3) $-K_V$ ample $Pic(V)=1$）ならば，V は Einstein Kähler 計量をもつ，すなわち，Kähler 計量 ω が存在して，

$$\partial\bar\partial \log \det \omega = c\omega \quad (c\text{は定数})$$

予想2. Hをample line bundleとして、EがH-stable vector bundleであれば、Eはhermitian-Einstein計量をもつ。

5. 結果

定理. $\dim V=1$のとき、予想1,2は正しい。

証明をここで述べる事はできないが簡単にいえば、予想1,2に関して標数$=0$のときは、具体的な解がかけている事をつかう。つまり$\mathbb{P}^1$のとき、E.K.計量は非同次座標zをつかって$\frac{dz\wedge d\bar z}{(1+|z|^2)^2} = \partial\bar\partial\log(1+|z|^2)$，$E$楕円曲線のときは、普遍被覆$\mathbb{C}\to E$の座標$z$をつかって$dz\wedge d\bar z = \partial\bar\partial\log e^{|z|^2}$，$g\geq 2$の曲線$C$では、普遍被覆$D=\{|z|<1\}\to C$を使って$\frac{dz\wedge d\bar z}{1-|z|^2} = (\sum|z^{\nu}|^2)\,dz\wedge d\bar z = \partial\bar\partial\log(\sum|z^{\nu}|^2)$. 予想2に関しては、stable vector bundleはユニタリ表現からくるという有名な定理に注目する

標数正>0の場合普遍被覆は存在しないが、有限被覆は"充分"存在するのでそれを使って、E.K.計量あるいは、H.E.計量に収束する列を

を見つけることができる．

6. 蛇足．城ノ崎でもお話したことですが，通常の C^∞ 関数，正則関数についても，擬 C^∞ 関数から，擬 C^∞ 関数をつくる操作を考えることができる．そこでここで問題として下にまとめておく．

問題1．C^∞ 関数の列が各点収束し，すべての偏導関数も各点収束するとき，極限関数についてどんなことがいえるか．

問題2．正則関数の列について問題1と同様のことを問う．

最後に，表題の Monge-Ampere 方程式
説明しますと，予想1の ω を見つけることと，上の意味での微分方程式を解くこととは同等で，その微分方程式が，複素数体上では，Monge-Ampere の一種となっているので，Monge-Ampere という名を使ったのですが，擬 Monge-Ampere などと呼ぶ方が適切かもしれません．（擬氏の注意）．

文献

[1] S. Tsunoda. Monge-Ampère equations on an algebraic variety with positive characteristic, Algebraic and Topological Theories — to the memory of Dr. Takehiko Miyata, Kinokuniya, 1985.