代数幾何学シンポジウム記録
1987年度 pp.37-63

Another approach to the rationality of moduli of hyperelliptic curves

広島大 理 前田高士

上の題名の another というのは Bogomolov, Katysilo 氏の論文[K], [B]での方法と異なるという意味ですが、講演で申しましたように、彼らのその後の共著の論文[B.K]の方法とは本質的に same であることに気づきました。御容赦下さい。最後の§5では5次の対称群 S_5 と交代群 A_5 に対する、2つのパラメータをもつ generic polynomial を具体的にかきました。

§1.

この§では[B.K]の Theorem 2.1 (descent についての定理)の証明をします。

Theorem 2.1 体 k 上の線形代数群 G の線形表現 $\rho_{1/k}: G \to GL(V_1)$

に対して 次の条件(1)〜(3)をみたすGの別の線形表現"$\rho_2 : G \longrightarrow GL(V_2)$"と、G-submodule "$W$" of $V_1 \otimes_k V_2$ をみつける:

(1) $\dim V_1 \geq \dim V_2 = \dim W + 1$

(2) V_2 に associate する k 上の射影空間 $\mathbb{P}(V_2)$ の上への、ρ_2 によって induce されるGの作用は generically free。(じつはGの affine space V_2 への作用が generically free という、もっと弱い条件で十分。)

(3) V_1, V_2 の k-basis を各々 $\{a_i\}_{i=1}^{n}$, $\{b_j\}_{j=1}^{m}$ ($n = \dim V_1, m = \dim V_2$), W の k-basis を $\{f_k\}_{k=1}^{m-1}$ として、

$$(1.1) \qquad \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{m-1} \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = B \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

と展開する。(ここで A は $(m-1)\times m$ 行列で成分は V_1 の元, B は $(m-1)\times n$-行列で成分は V_2 の元。) $\mathbb{P}(V_1)$, $\mathbb{P}(V_2)$ の同次座標を各々 $(a_1 : \cdots : a_n)$, $(b_1 : \cdots : b_m)$ とするとき、$\mathbb{P}(V_1) \times \mathbb{P}(V_2)$ の点 (a, b) で

$$f_k(a, b) = 0 \quad (1 \leq {}^{\forall} k \leq m-1), \quad \operatorname{rank} A(a) = \operatorname{rank} B(b) = m - 1$$

なるものが存在する。

$\Longrightarrow$ 結論: G-同変 dominant 有理写像 $\varphi : \mathbb{P}(V_1) \longrightarrow \mathbb{P}(V_2)$ で、$\overline{\varphi} : \mathbb{P}(V_1)/G \longrightarrow \mathbb{P}(V_2)/G$ が $(n-m)$-rational (つまり関数体の不変体の拡大 $k(\mathbb{P}(V_1))^G \xhookleftarrow{\varphi^*} k(\mathbb{P}(V_2))^G$ が $(n-m)$-次元純超越拡大) になるものが存在する。よって、もし、$\mathbb{P}(V_2)/G$ が有理多様体であることがわかっていれば $\mathbb{P}(V_1)/G$ も有理的であることが結論できる。

(証明) $X := \{(a,b) \in \mathbb{P}(V_1) \times \mathbb{P}(V_2) \mid f_k(a,b) = 0,\ 1 \le {}^{\forall}k \le m-1\} \overset{\text{clos.}}{\subset} \mathbb{P}(V_1) \times \mathbb{P}(V_2)$

$\cup$ open

$U := \{(a,b) \in X \mid \operatorname{rank} A(a) = \operatorname{rank} B(b) = m-1\}$

とおくと、条件(3)より $U \neq \phi$ である。X から各成分への射影 $\pi_i : X \to \mathbb{P}(V_i)$ $(i=1,2)$ とすると、X, 及び、A, B の定義より、

$$U = \left\{x = (a,b) \in X \mid \pi_1^{-1}\pi_1(x) = \{x\},\ \pi_2^{-1}\pi_2(x) \cong \mathbb{P}^{n-m}_{k(b)}\right\}$$

である。次に

$\mathbb{P}(V_2) = \operatorname{Proj} S$, $S = k[b_1, \cdots, b_m] = \bigoplus_{d \ge 0} S_d$, S_d は k 上の V_2 の symm. alg. の d 次部分.

とおく。inclusion $W \hookrightarrow V_1 \otimes V_2 = V_1 \otimes S_1$ に $\otimes_k S_{d-1}$ を施して、$W \otimes S_{d-1} \hookrightarrow V_1 \otimes S_1 \otimes S_{d-1} \twoheadrightarrow V_1 \otimes S_d$ を作る $(d \ge 1)$。d について和をとると、graded S-module の完全列

$$W \otimes S(-1) \xrightarrow{\psi} V_1 \otimes S \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

ができる。(ここで、$M = \operatorname{Cok}(\psi)$ とおいた。) よって、これを sheafify して、$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_2)}$-module の完全列

(1.2) $$W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_2)}(-1) \to V_1 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_2)} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0, \qquad \mathcal{F} = \widetilde{M}$$

ができる。W の basis は $\{f_k\}$ であるから、この完全列によって induce される $\mathbb{P}(V_1 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_2)}) \cong \mathbb{P}(V_1) \times \mathbb{P}(V_2)$ の closed sub scheme $\mathbb{P}(\mathcal{F}) = \operatorname{Proj}(S^{\cdot}\mathcal{F})$ ($S^{\cdot}\mathcal{F}$ は symm. alg. of $\mathcal{F}$ over $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_2)}$) は scheme として、同次イデアル $(f_1, \cdots, f_{m-1})$ で定義される。(i.e. $\mathbb{P}(\mathcal{F})_{red} = X$) X の既約成分 X_0 で $X_0 \cap U \neq \phi$ なるものをとり、$X_0 \cap U = U_0$ とおく。X は $(m-1)$ 枚の超曲面 $\{f_k = 0\}$ の完全交叉 in $\mathbb{P}(V_1) \times \mathbb{P}(V_2)$ であるから $\dim X_0 \ge n$ は明らかであるが、$U_0 \neq \phi$ と、fibre の次元の上半連続性

から $\dim X_0 \leq n$ がわかる。よって $\dim X_0 = m$ で $\pi_1|_{X_0} : (X_0)_{red} \longrightarrow \mathbb{P}(V_1)$ は双有理になる。 $X = \mathbb{P}(\mathcal{F})_{red} \left(\subset \mathbb{P}(V_1)\times\mathbb{P}(V_2)\right)$ の affine cone の上の点 (a,b) での Jacobian は、

$$\frac{\partial(f_1,\cdots,f_{m+1})}{\partial(b_1,\cdots,b_m,a_1,\cdots,a_n)} = \left(A(a)\ \ B(b)\right)$$

であるから、$\mathcal{U}$ の定義より $\mathcal{U}$ (よって $\mathcal{U}_0$) は Jacobian criterion により非特異で、$\mathcal{U}_0$ は reduced である。また $\pi_2|_{\mathcal{U}_0} : \mathcal{U}_0 \to \mathbb{P}(V_2)$ は smooth であるから、$\pi_2(\mathcal{U}_0)$ は $\mathbb{P}(V_2)$ の open set である。以上より次の可換図式が得られる。

(1.3)
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}(V_1) & X \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, phantom, "="] & \mathbb{P}(\mathcal{F})_{red} \arrow[r, "\pi_2"] & \mathbb{P}(V_2) & \mathcal{F} \\
 & \mathcal{U}_0 \arrow[ul, "\pi_1'"] \arrow[u, hook] \arrow[r, hook, "\iota_1"'] & \mathbb{P}(\mathcal{F}|_{\pi_2\mathcal{U}_0}) \arrow[u, hook, "\iota_2"'] \arrow[r] & \pi_2(\mathcal{U}_0) \arrow[u, hook, "\iota_3"'] & \mathcal{F}|_{\pi_2\mathcal{U}_0}
\end{tikzcd}$$

ここで $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ は open immersion で π_1' は birational morphism。 $\mathcal{F}|_{\pi_2\mathcal{U}_0}$ は rank$(n-m+1)$ の locally free sheaf で、完全列 (1.2) の左端も完全

(1.4)
$$0 \longrightarrow W\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_2)}(-1) \longrightarrow V_1\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_2)} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

であることは容易にわかる。今、G の regular action をもつ variety $\mathbb{P}(V_2)$ に対して、G-modules W と V_1 は $W\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_2)}(-1)$ と $V_1\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_2)}$ に自然な G-linearlization を与える。よって完全列 (1.4) は $\mathcal{F}$ に G-linearlization を induce する。そして、この G-linearlization によって induce される G の $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ への作用は、もともとの G の作用と一致する。つまり closed immersion $\mathbb{P}(\mathcal{F}) \hookrightarrow \mathbb{P}(V_1\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_2)}) = \mathbb{P}(V_1)\times\mathbb{P}(V_2)$ は G-同変である。 $\mathcal{U}$ と X_0 は G-不変で、π_2 は G-同変なので

$\pi_2(\mathcal{U}_0)$ は $\mathbb{P}(V_2)$ の G-不変 open set である。よって (1.4) の、$\pi_2(\mathcal{U}_0)$ への制限も G-linearlization をもつ。一方、条件 (2) より $\pi_2(\mathcal{U}_0)$ の G-不変 open set $\mathcal{U}_1$ と、geometric quotient $\mathcal{U}_1/G$ が存在して、$\tau : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_1/G$ は principal G-bundle in etale topology となる。ゆえに descent によって、G-linearlized locally free sheaf $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}_1}$ は $\mathcal{U}_1/G$ からやってくる。つまり locally free sheaf $\mathcal{F}'$ on $\mathcal{U}_1/G$ で、$\tau^*\mathcal{F}' \cong \mathcal{F}|_{\mathcal{U}_1}$ となるものが存在する。よって次の可換図式

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbb{P}(\mathcal{F}) & \supseteq & \mathbb{P}(\mathcal{F}|_{\mathcal{U}_1}) & \longrightarrow & \mathbb{P}(\mathcal{F}') \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu} \\
\mathbb{P}(V_2) & \supseteq & \mathcal{U}_1 & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{U}_1/G
\end{array}
\tag{1.5}
$$

が得られる。(1.3) と (1.5) より、

$$
\mathbb{P}(V_1)/G \sim \mathcal{U}_0/G \sim \mathbb{P}(\mathcal{F}|_{\mathcal{U}_1})/G \cong \mathbb{P}(\mathcal{F}') \xrightarrow{\mu} \mathcal{U}_1/G \sim \mathbb{P}(V_2)/G
$$

となり、μ は Zariski topology で locally trivial だから、結局、$\mathcal{U}_0$ の閉包をグラフとする有理写像を φ とすればよい。

<u>Remark</u> (1) §2, §3 で使う idea はこの定理だけです。

(2) φ は $(1.1)=0$ から $\{b_j\}$ を消去すればよいので、具体的には

$$
\varphi : \mathbb{P}(V_1) \ni (a) \mapsto (A_1 : -A_2 : \cdots : (-1)^{m+1} A_m) \in \mathbb{P}(V_2)
$$

となる。ここで A_i は A から第 i 列を除いた $m \times m$ 行列の行列式。

(3) G-同変 bilinear map $V_1 \otimes V_2 \longrightarrow W$ を彼らは "double bundle" と呼んでいる [B.K]。

§2. hyperelliptic curve の moduli の有理性の証明 (genus≧3. char(k)=0のとき)

§2 では kの標数は 0とする。($k=\mathbb{Q}$ でよい。)

射影直線 $\mathbb{P}^1$ 上の相異なる $(2g+2)$ 個の点 $\{a_i\}_{i=1}^{2g+2}$ に対して、平面曲線 $y^2=\prod_{i=1}^{2g+2}(x-\alpha_i)$ ($a_i\neq\infty$ とした) の正規化 $C_{(a)}$ は genus g の hyperelliptic curve であり、$C_{(a)}\cong C_{(b)}$：同型 $\leftrightarrow$ $\{a_i\}$ と $\{b_i\}$ は $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ で同値。また任意の hyperelliptic curve は上のようにして得られる。よって $\mathbb{P}^1$ の $(2g+2)$ 個の symmetric product modulo $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)=PGL(2.k)$ は genus g の hyperelliptic curve の moduli space $M_{g.\mathrm{hyell}}$ と birational になる：$M_{g,\mathrm{hyell}}\sim(\mathbb{P}^1)^{(2g+2)}/PGL(2.k)$。

一方、$(n+1)$ 次元ベクトル空間 $V(n)$ を $SL(2.k)$ の n-th. 対称テンソル表現空間とすると、$\mathbb{P}(V(2g+2))$ と $(\mathbb{P}^1)^{(2g+2)}$ は $PGL(2.k)$-同変に同型だから $\mathbb{P}(V(2g+2))/PGL(2.k)$ が有理多様体であることを示すことに帰着した。以下、これを示す。 Remark：n が even のとき $V(n)$ は $PGL(2.k)$-moduleとみなせる。

(1) $n=2g+2\geqq 10$ のとき. §1の定理で $G=PGL(2.k)$, $V_1=V(n)$, $V_2=V(n-2)$ とする。Clebsch-Gordan の定理より. G-module $V_1\otimes V_2$ の既約成分への分解は

$$V_1\otimes V_2=V(2n-2)\oplus V(2n-4)\oplus\cdots\oplus V(n-6)\oplus\cdots\oplus V(4)\oplus V(2)\ (2\text{づつ下る})$$

となる。そこで $W=V(n-6)\oplus V(2)$ とおくと、定理の条件 (1)~(3) をみたすことがわかる。条件(1) は明らかで (2) も $n\geqq 10$ だから成立つ。(3) に

ついては §4 で説明します。よって G-同変有理写像 $\varphi: \mathbb{P}(V(n)) \longrightarrow \mathbb{P}(V(n-2))$（つまり 2元 n 形式の共変式であるが、これは具体的にわかる。cf. §1の Remark (2)）で、$\mathbb{P}(V(n))/G \longrightarrow \mathbb{P}(V(n-2))/G$ が 2-rational となるものが存在する。よって induction on n により、

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & M_{4.\mathrm{hy.ell.}} & & M_{3.\mathrm{hy.ell.}} \\
 & & & & & & \wr & & \wr \\
\mathbb{P}(V(n))/G & \xrightarrow{②} & \mathbb{P}(V(n-2))/G & \xrightarrow{②} & \cdots & \xrightarrow{②} & \mathbb{P}(V(10))/G & \xrightarrow{②} & \mathbb{P}(V(8))/G
\end{array}
$$

で、結局、$M_{3.\mathrm{hy.ell}} \sim \mathbb{P}(V(8))/G$ の有理性を示すことに帰着した。

(2) $n=8$ のときは、定理で $V_1=V(8)$, $V_2=V(4)\oplus V(2)$ とおく。$V(8)\otimes V(4)$ と $V(8)\otimes V(2)$ は各々、G-submodule $V(6)$ を含んでいるので、W として、

$$
V_1 \otimes V_2 \supset V(6) \oplus V(6) \xhookleftarrow{\text{diagonal}} V(6) := W
$$

とすると、やはり定理の条件 (1)〜(3) をみたすことがわかる。よって $\mathbb{P}(V(8))/G \longrightarrow \mathbb{P}(V(4)\oplus V(2))/G$ は 1-rational になる。右辺の有理性は次のようにして、容易にわかる。右辺には $G_m = k^*$ が $V(4)$ の座標へのスカラ倍として作用して、$\mathbb{P}(V(4)\oplus V(2))/G \longrightarrow {}_{G_m}\backslash \mathbb{P}(V(4)\oplus V(2))/G = \mathbb{P}(V(4)) \overset{G}{\times} \mathbb{P}(V(2))$ は Rosenlicht の定理から、1-rational である。次に $\mathbb{P}(V(2))$ は G の open orbit を含み、その各点での G の stabilizer は G の極大 torus の normalizer $N \cong G_m \rtimes \{\pm 1\}$ と同型であるから、$\mathbb{P}(V(4)) \overset{G}{\times} \mathbb{P}(V(2)) \sim \mathbb{P}(V(4)) \overset{G}{\times} G/N \sim \mathbb{P}(V(4))/N$ となる。$\mathbb{P}(V(4))/N$ の有理性は、invariant を具体的に調べることにより容易にわかる。よって、

$$
\mathbb{P}(V(8))/G \xrightarrow{①} \mathbb{P}(V(4)\oplus V(2))/G \xrightarrow{①} \mathbb{P}(V(4)) \overset{G}{\times} \mathbb{P}(V(2)) \sim \mathbb{P}(V(4))/N \sim \mathbb{P}^3
$$

で $n=8$ の場合は示された。よって任意の n even の場合についても示された。

<u>Remark</u> (1) $g=2$ i.e. $\mathbb{P}(V(6))/G \sim \mathbb{P}^3$ については、Clebsch, Gordan によって、具体的な生成元まで調べられている。

(2) $g=3$ について、binary 8-form の <u>不変式環</u> は、塩田先生により、完全に決定されている [S]。しかし、その結果から、$\mathbb{P}(V(8))/G$ の有理性は読みとることができない (筆者には)。

(3) §1 の定理の証明で descent を使っているので、上の方法では、具体的な生成元 (で代数的に独立なもの) は わからないと思う。($g=3$ のときでも)

(4) char(k) > 0 の場合も、条件 (3) が確認できれば成立つ。上の証明で使った V_2, W ではあやしいと思う。

(5) Bogomolov. Katysilo 氏の論文 [B.K] では次のようにしている (cf. §4)。$P \geq 0$ として、

$$\begin{cases} \text{(i)} & V_1 = V(6P+8), \quad V_2 = V(2P+2) \oplus V(2P+4), \quad W = V(4P+6) \\ \text{(ii)} & V_1 = V(6P+10), \quad V_2 = V(2P+2) \oplus V(2P+6), \quad W = V(4P+8) \\ \text{(iii)} & V_1 = V(6P+12), \quad V_2 = V(2P+2) \oplus V(2P+8), \quad W = V(4P+10), \end{cases}$$

ここで、例えば (i) では、$V(6P+8) \otimes V(2P+2)$ と $V(6P+8) \otimes V(2P+4)$ は $V(4P+6)$ を含むので $V_1 \otimes V_2 \supseteq V(4P+6) \oplus V(4P+6) \overset{\text{diagonal}}{\supseteq} V(4P+6) := W$ とする。(ii), (iii) の W についても同様。

(6) Katysilo, Bogomolov 氏の最初の論文 [K], [B] では、4次の対称群 S_4 による、ある不変体を計算することに帰着させていた。

(7) n:odd のときの $\mathbb{P}(V(n))/G \sim \mathbb{P}^{n-2}$ は Katsylo 氏の論文[ ]にある。

§3. 有限群への応用

この§では、係数体 k は $\mathrm{char}(k)=0$ の代数閉体とする。次の問題を考える:

(*) 有限群 G に対して、G の任意の線形表現 $\rho_k: G \to GL(V)$ に対して、$\mathbb{P}(V)/G$ は有理多様体か?

この問題には別に深い意味や応用はない (G がある P-群 (Pは素数) について反例も知られている) が、講演の最後で触れた S. Barron 氏と、Miroshnichenko 氏の結果を認めると、正二十面体群 $\widetilde{A_5}$ (5次の交代群 A_5 の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ による中心拡大) と、5次の対称群 S_5 について、(*) が成立つことを説明する。なお descent により、G の任意の既約表現について示せばよいことは容易にわかる。

5次の交代群 A_5 は単位表現 1_{A_5} の他に4つの既約表現 $\rho_3^+, \rho_3^-, \rho_4, \rho_5$ をもつ (ここで $\dim \rho_d = d$)。 ρ_4 と ρ_5 は具体的には、

$\rho_4 \oplus 1_{A_5} = (1_{A_4})^{A_5}$: 4次交代群と同型な A_5 の部分群 A_4 の A_5 への誘導表現
(つまり、ふつうの置換表現)

$\rho_5 = \chi^{A_5}$: χ は A_4 の non-trivial 指標 (よって単項表現)

$\rho_5 \oplus 1_{A_5} = (1_{D_{10}})^{A_5}$: $1_{D_{10}}$ は位数10の正二面体群と同型な A_5 の部分群 D_{10} の単位表現。

$\rho_5 : A_5 \xrightarrow{\theta} PGL(2,k) \overset{\Delta^{(4)}}{\hookrightarrow} SL(V(4)) = SL(5,k)$: θ は A_5 の2次元射影表現，
$\Delta^{(4)}$ は $SL(2,k)$ の4-th 対称テンソル表現

などと表わされる。そこで§1の定理で $G=A_5$, $V_1=V(\rho_5)$ (ρ_5 の表現空間) $V_2=V(\rho_4)$ とおく。A_5 の character table はすぐ調べられて $\rho_5\otimes\rho_4 = \rho_3^+\oplus\rho_3^-\oplus\rho_4\oplus\rho_5\oplus\rho_5$ となる。そこで $W=V(\rho_3^+)$ とおくと再び条件(1)~(3)をみたすことがわかる。条件(3)についてはあとで具体的な形を与える。よって $\mathbb{P}(V(\rho_5))/A_5 \longrightarrow \mathbb{P}(V(\rho_4))/A_5$ は1-rational となる。次に去年の1月の東大でのシンポジウムで本質的には話したことであるが，$\mathbb{P}(V(\rho_4))/A_5 \sim \mathbb{P}^3$ となることを説明する。$G=PGL(2,k)$ として、$A_5\times G$ を $(\mathbb{P}^1)^5$ へ

$$\begin{cases} \sigma.(z_0,\cdots,z_4) = (z_{\sigma(0)},\cdots,z_{\sigma(4)}) & \text{for } \sigma\in A_5 \\ g.(z_0,\cdots,z_4) = \left(\dfrac{\gamma+\delta z_0}{\alpha+\beta z_0},\cdots,\dfrac{\gamma+\delta z_4}{\alpha+\beta z_4}\right) & \text{for } g=\begin{bmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{bmatrix}\in G \end{cases}$$

と作用させた。ここで z_i は i-th factor の非同次座標。すると $\sum_{i=0}^{4} z_i$ は、A_5-不変 linear form (つまり，$V(1_{A_5})$ の base) なので，$(\mathbb{P}^1_{z_i})^5 \overset{open}{\supset} (\mathbb{A}^1_{z_i})^5 \cong V(\rho_4\oplus 1_{A_5})$ の 4-dim. linear sub space $V(\rho_4)$ は $\sum_{i=0}^{4} z_i = 0$ で定義される。次に G の下三角行列 $B=G_a \rtimes G_m$, $G_a=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\ \gamma&1\end{bmatrix}\right\}$, $G_m=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\ 0&\delta\end{bmatrix}\right\}$ とおく。$z=(z_0,\cdots,z_4)\in V(\rho_4)$, $\begin{bmatrix}1&0\\ \gamma&1\end{bmatrix}.z=(\gamma+z_0,\cdots,\gamma+z_4)\in V(\rho_4)$ とすると、$0=5\gamma+\sum_{i=0}^{4} z_i = 5\gamma$ よって $\gamma=0$, よって $\forall z\in V(4)$ に対して $\{z$ の G_a-orbit$\}\cap V(\rho_4)=\{z\}$ となり、$V(\rho_4)$ は $G_a\backslash(\mathbb{P}^1)^5$ の rational section である。よって $V(\rho_4) \dashrightarrow G_a\backslash(\mathbb{P}^1)^5$ は双有理

になるが、これは $G_m\times A_5$-同変なので、$\mathbb{P}(V(\rho_4))/A_5 \sim G_m\backslash(G_a\backslash(\mathbb{P}^1)^5)/A_5 = B\backslash(\mathbb{P}^1)^5/A_5$ となる。一方、1月に話したように $(\mathbb{P}^1)^5/A_5$ は principal G-bundle in Zariski topology と birational $(\mathbb{P}^1)^5/A_5 \sim G\times G\backslash(\mathbb{P}^1)^5/A_5$ だった。よって、

$$\mathbb{P}(V(\rho_4))/A_5 \sim B\backslash(\mathbb{P}^1)^5/A_5 \sim (B\backslash G)\times\left(G\backslash(\mathbb{P}^1)^5/A_5\right) \sim \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2$$

で $\mathbb{P}(V(\rho_4))/A_5$ の有理性がわかった。よって $\mathbb{P}(V(\rho_5))/A_5$ も有理的になる。

あまり意味はないと思いますが、$\mathbb{P}(V(\rho_4))/A_5$ の4個の生成元を書いておきます。まず、A_5 は2つの元 σ と τ で生成される。(関係式は $\sigma^5=\tau^2=(\sigma\tau)^3=1$)

以下、ζ を1の原始5乗根として、$b=\zeta+\zeta^4=(-1+\sqrt{5})/2$, $b^*=\zeta^2+\zeta^3=(-1-\sqrt{5})/2$ とおく。$\rho_5 : A_5 \xrightarrow{\theta} PGL(2,k) \xrightarrow{A^{(4)}} SL(5,k)$ により ρ_5 の行列を計算すると、$V(\rho_5)$ の basis $x_0,\cdots,x_4$ に対して、

$$\begin{pmatrix} x_0\\ \vdots\\ x_4\end{pmatrix}^{\sigma} = \begin{pmatrix} \zeta^2 &&&& \\ & \zeta &&& \\ && 1 && \\ &&& \zeta^4 & \\ &&&& \zeta^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0\\ \vdots\\ x_4\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0\\ \vdots\\ x_4\end{pmatrix}^{\tau} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} b^{*2} & b^* & 1 & b & b^2\\ 4b^* & b^2 & 2 & b^{*2} & 4b\\ 6 & 3 & -1 & 3 & 6\\ 4b & b^{*2} & 2 & b^2 & 4b^*\\ b^2 & b & 1 & b^* & b^{*2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0\\ \vdots\\ x_4\end{pmatrix}$$

と表わされる。次に $V(\rho_4\oplus 1_{A_5})=V((1_{A_4})^{A_5})$ の basis $z_0,\cdots,z_4$ として permutation basis をとり、

$$\begin{pmatrix} Y_0\\ Y_1\\ \vdots\\ Y_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ \zeta^2 & \zeta & 1 & \zeta^4 & \zeta^3\\ \zeta^2 & 1 & \zeta^3 & \zeta & \zeta^4\\ \zeta^2 & \zeta^4 & \zeta & \zeta^3 & 1\\ \zeta^2 & \zeta^3 & \zeta^4 & 1 & \zeta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_0\\ z_1\\ \vdots\\ z_4\end{pmatrix}$$

とおくと、Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 が $V(\rho_4)\ (\subset V(\rho_4\oplus 1_{A_5}))$ の basis になる。すると、

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix}^{\sigma} = \begin{pmatrix} \zeta & & & \\ & \zeta^2 & & \\ & & \zeta^3 & \\ & & & \zeta^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix}^{\tau} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & b & -b^* & -1 \\ b & -1 & 1 & -b^* \\ -b^* & 1 & -1 & b \\ -1 & -b^* & b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix}$$

となる。そこで 20-dim. vector space $V(\rho_5)\otimes V(\rho_4) = \langle x_i \otimes Y_j \rangle_k$ の 3-dim sub space で、σ と τ で stable なものを とにかく計算して探す。

$$\begin{cases} f_1 = x_2 Y_1 - x_3 Y_2 - 3x_4 Y_2 + x_0 Y_4 \\ f_2 = x_3 Y_1 - x_4 Y_2 + x_0 Y_3 - x_1 Y_4 \\ f_3 = x_4 Y_1 - 3x_0 Y_2 - x_1 Y_3 + x_2 Y_4 \end{cases}$$

とおくと

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}^{\sigma} = \begin{pmatrix} \zeta & & \\ & 1 & \\ & & \zeta^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}^{\tau} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} b^* & 2 & -b \\ 1 & 1 & -1 \\ -b & -2 & b^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

となることがわかる。つまり

$$A = \begin{pmatrix} x_2 & -x_3 & -3x_4 & x_0 \\ x_3 & -x_4 & x_0 & -x_1 \\ x_4 & -3x_0 & -x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} Y_4 & 0 & Y_1 & -Y_2 & -3Y_3 \\ Y_3 & -Y_4 & 0 & Y_1 & -Y_2 \\ -3Y_2 & -Y_3 & Y_4 & 0 & Y_1 \end{pmatrix}$$

で、A_5-同変有理写像 $\varphi : \mathbb{P}^4_X = \mathbb{P}(V(\rho_5)) \longrightarrow \mathbb{P}^3_Y = \mathbb{P}(V(\rho_4))$ は、

$$\varphi(x) = (A_1 : -A_2 : A_3 : -A_4)$$

(3.1)
$$= \left(\begin{vmatrix} -x_3 & -3x_4 & x_0 \\ -x_4 & x_0 & -x_1 \\ -3x_0 & -x_1 & x_2 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} x_2 & -3x_4 & x_0 \\ x_3 & x_0 & -x_1 \\ x_4 & -x_1 & x_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_2 & -x_3 & x_0 \\ x_3 & -x_4 & -x_1 \\ x_4 & -3x_0 & x_2 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} x_2 & -x_3 & -3x_4 \\ x_3 & -x_4 & x_0 \\ x_4 & -3x_0 & -x_1 \end{vmatrix} \right)$$

と表わされる。一方、$\mathbb{P}(V(\rho_4))/A_5 \sim B\backslash G \times G\backslash(\mathbb{P}^1)^5/A_5$ より、

$$k(\mathbb{P}(V(\rho_4))/A_5) = k(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)^{G_m \times \rho_4(A_5)} = k(z_0, z_1, \cdots, z_4)^{B \times A_5}$$

$$= k\left(I_4/\Delta,\ I_{12}/\Delta^3,\ B_0/\Delta^2 \cdot A_0 \right)$$

ここで、

$$\Delta = \prod_{i<j} (z_i - z_j),$$

$$I_4 = \sum_{\sigma \in S_5} \left\{ (z_0-z_1)^2 (z_0-z_2)^2 (z_1-z_2)^2 (z_3-z_4)^4 \right\}^\sigma,$$

$$I_{12} = \sum_{\sigma \in S_5} \left\{ (z_0-z_1)^2 (z_0-z_2)^2 (z_1-z_2)^2 (z_0-z_1)^4 (z_0-z_2)^4 (z_0-z_3)^4 (z_0-z_4)^4 (z_1-z_4)^4 (z_2-z_4)^4 \right\}^\sigma,$$

$$A_0 = \sum_{\sigma \in S_5} \left\{ (z_0-z_1)(z_0-z_2)(z_0-z_3)(z_0-z_4)(z_1-z_2)^4 (z_3-z_4)^4 \right\}^\sigma,$$

$$B_0 = \sum_{\sigma \in S_5} \left\{ (z_0-z_1)^3 (z_0-z_2)^3 (z_0-z_3)^3 (z_0-z_4)^3 (z_1-z_2)^{10} (z_3-z_4)^{10} \right\}^\sigma.$$

よって、$k(\mathbb{P}(V(\rho_5))/A_5) = k(x_0, \cdots, x_4)^{G_m \times \rho_5(A_5)}$ の4個の生成元のうちの3個は、I_4/Δ, I_{12}/Δ^3, $B_0/\Delta^2 A_0$ の $\{z_i\}_{i=0}^4$ に、

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & \zeta^3 & \zeta^3 & \zeta^3 & \zeta^3 \\ 1 & \zeta^4 & 1 & \zeta & \zeta^2 \\ 1 & 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \zeta \\ 1 & \zeta & \zeta^4 & \zeta^2 & 1 \\ 1 & \zeta^2 & \zeta & 1 & \zeta^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix}$$

を代入して、$\{Y_i\}_{i=1}^4$ の有理関数として、そして、$Y_i \mapsto A_i$ ((3.1)) として、x_i の有理関数としたものである。$\bar{\varphi}: \mathbb{P}(V(\rho_5))/A_5 \longrightarrow \mathbb{P}(V(\rho_4))/A_5$ は 1-rat. であったが、これが残りの1つの生成元である。これも次のように 1-cocycle が具体的にわかるのでほぼ explicit にわかる。行列 B の第 i 列、第 j 列、第 k 列を左から順に並べてできる3次正方行列の行列式を B_{ijk} とすると、$f_i = 0$ $(i=1,2,3)$ から、

$$
\begin{cases}
B_{234}\, x_1 + B_{134}\, x_0 + B_{523}\, x_4 = 0 \\
B_{123}\, x_2 + B_{103}\, x_0 + B_{143}\, x_4 = 0 \\
B_{123}\, x_3 + B_{120}\, x_0 + B_{124}\, x_4 = 0
\end{cases}
$$

となるので

$$
(3.2) \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-B_{234}} \begin{bmatrix} B_{023} & B_{234} \\ -B_{013} & -B_{134} \\ B_{012} & B_{124} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_4 \end{bmatrix}
$$

である。A_5の2次元射影表現をθとして．$A_5 \ni \nu \mapsto \theta(\nu) = \begin{bmatrix} \alpha_\nu & \beta_\nu \\ \gamma_\nu & \delta_\nu \end{bmatrix} \in PGL(2, k)$,

$\alpha_\nu\delta_\nu - \beta_\nu\gamma_\nu = 1$，とおくと．

$$
\rho_5(\nu) = \Delta^{(4)}(\theta(\nu)) = \begin{bmatrix} \alpha_\nu^4 & \alpha_\nu^3\beta_\nu & \alpha_\nu^2\beta_\nu^2 & \alpha_\nu\beta_\nu^3 & \beta_\nu^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_\nu^4 & \gamma_\nu^3\delta_\nu & \gamma_\nu^2\delta_\nu^2 & \gamma_\nu\delta_\nu^3 & \delta_\nu^4 \end{bmatrix} \in SL(5, k)
$$

であるから．

$$
\begin{bmatrix} x_0 \\ x_4 \end{bmatrix}^\nu = \begin{bmatrix} \alpha_\nu^4, & \alpha_\nu^3\beta_\nu, & \cdots & \beta_\nu^4 \\ \gamma_\nu^4, & \gamma_\nu^3\delta_\nu, & \cdots & \delta_\nu^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_\nu^4 & \beta_\nu^4 \\ \gamma_\nu^4 & \delta_\nu^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_\nu^3\beta_\nu, & \alpha_\nu^2\beta_\nu^2, & \alpha_\nu\beta_\nu^3 \\ \gamma_\nu^3\delta_\nu, & \gamma_\nu^2\delta_\nu^2, & \gamma_\nu\delta_\nu^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
$$

ここで．(3.2)を(x_1, x_2, x_3)に代入すると．

$$
\begin{bmatrix} x_0 \\ x_4 \end{bmatrix}^\nu = A_\nu \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_4 \end{bmatrix}
$$

$$
A_\nu = \frac{1}{B_{234}} \begin{pmatrix} (B_{123}, -B_{023}, B_{013}, -B_{012}, 0)^t (\alpha_\nu, \beta_\nu)^4. & (0, -B_{234}, B_{134}, -B_{124}, B_{123})^t (\alpha_\nu, \beta_\nu)^4 \\ (B_{123}, -B_{023}, B_{013}, -B_{012}, 0)^t (\gamma_\nu, \delta_\nu)^4. & (0, -B_{234}, B_{134}, -B_{124}, B_{123})^t (\gamma_\nu, \delta_\nu)^4 \end{pmatrix}
$$

となる。すると．$(x)^{\sigma\tau} = (A_\sigma \cdot (x))^\tau = A_\sigma^\tau \cdot A_\tau \cdot (x)$ より．$A_\sigma^\tau \cdot A_\tau = A_{\sigma\tau}$．つまり．$\{A_\sigma\}_{\sigma \in A_5}$は

1-cocycle of A_5 with value in $GL(2, F)$である。（ここで $F := k(\mathbb{P}(V(\rho_4))) =$

$k(y_2/y_1, y_3/y_1, y_4/y_1))$．$M(2, F)$の元$C$に対して．$\hat{C} = \sum_{\sigma \in A_5} C^\sigma \cdot A_\sigma$ $(\in M(2, F))$

とおくと．$\hat{C}^\tau = \sum_\sigma C^{\sigma\tau} \cdot A_\sigma^\tau = \sum_\sigma C^{\sigma\tau} \cdot A_{\sigma\tau} \cdot A_\tau^{-1} = \hat{C} \cdot A_\tau^{-1}$ であるから．$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_4' \end{pmatrix} = \hat{C} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_4 \end{pmatrix}$

とおけば $(x')^{\sigma}=\hat{C}^{\sigma}(x)^{\sigma}=\hat{C}\cdot A_{\sigma}^{-1}\cdot A_{\sigma}(x)=(x')$ で x_0', x_4' は A_5 不変である。そこで $\hat{C}\in GL(2,F)$ なる C をとれば x_0'/x_4' が残りの1つの生成元である。

なお、A_5 の2次元射影表現 θ の image in $PGL(2,k)$ は、次のように、似たような元たちが現われて、それほど複雑なものではない。($\det=1$ とする)

ζ：1の原始5乗根，$\lambda=\zeta-\zeta^4$，$\mu=\zeta^3-\zeta^2$ として

$$\sigma=\begin{bmatrix}\zeta^3 & 0\\ 0 & \zeta^2\end{bmatrix},\quad \tau=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}\lambda & \mu\\ \mu & -\lambda\end{bmatrix},\quad \tau_0=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\quad \nu=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}\lambda\zeta^2 & \mu\zeta\\ \mu\zeta^4 & -\lambda\zeta^3\end{bmatrix}$$

とすると、

$$\theta(A_5)=\left\{\sigma^i\tau_0^j\tau^k,\ \sigma^i\tau_0^j\nu\cdot\tau_0^k,\ \sigma^i\tau_0^j\cdot({}^t\nu)\cdot\tau_0^k \;\middle|\; 0\le i\le 4,\ 0\le j,k\le 1\right\}$$

となる。ここで ${}^t\nu$ は ν の転置行列。

正二十面体群 $\widetilde{A}_5$ の既約表現は、A_5 の既約表現 1_{A_5}, ρ_3^+, ρ_3^-, ρ_4, ρ_5 の他に、4つの忠実な既約表現 θ_2^+, θ_2^-, θ_4, θ_6 ($\dim\theta_d=d$) をもつ。$\mathbb{P}(V(\rho))/\widetilde{A}_5=\mathbb{P}(V(\rho))/A_5$ の有理性について、ρ_4 と ρ_5 は、今示した。$\theta_2^{\pm}$, $\rho_3^{\pm}$ については、Klein の本 Icosa… の中で生成元の形まで explicit に調べられていて、有理性は容易にわかる。残るのは θ_4 と θ_6 だけであるが、これらは具体的には

$$\begin{cases}\theta_4:\ \widetilde{A}_5 \xrightarrow{\theta_2^+} SL(2,k) \xrightarrow{\Delta^{(3)}} SL(V(3))=SL(4,k)\\ \theta_6:\ \widetilde{A}_5 \xrightarrow{\theta_2^+} SL(2,k) \xrightarrow{\Delta^{(5)}} SL(V(5))=SL(6,k)\end{cases}$$

と表わされることが指標を調べて確認できる。(ここで $\Delta^{(r)}$ は $SL(2,k)$ の r-th 対称テンソル表現) まず θ_6 について：$\mathbb{P}(V(5))$ は principal $PGL(2,k)$-bundle in Zariski Topology $\mathbb{P}(V(\theta_6))=\mathbb{P}(V(5))\sim PGL(2,k)\times{}_{PGL(2,k)}\backslash\mathbb{P}(V(5))$ であった。

これは $\widetilde{A}_5\,(\overset{\theta_2^+}{\curvearrowleft}\, SL(2,k))$-同変であるから ${}_{\widetilde{A}_5}\backslash^{\mathbb{P}(V(\theta_6))} = {}_{\theta_6(\widetilde{A}_5)}\backslash^{\mathbb{P}(V(5))} \sim$

${}_{\widetilde{A}_5}\backslash^{PGL(2,k)} \times {}_{PGL(2,k)}\backslash^{\mathbb{P}(V(5))} = {}_{\widetilde{A}_5}\backslash^{\mathbb{P}(V(\theta_2^+ \oplus \theta_2^+))} \times {}_{PGL(2,k)}\backslash^{\mathbb{P}(V(5))}$ となり、

最後の式の有理性は容易にわかるので θ_6 については示された。

次に $\mathbb{P}(V(\theta_4))/A_5$ については、Miroshnichenko 氏からの手紙で $k=\mathbb{C}$ のとき示されている。証明の概略：$\mathbb{P}(V(\theta_4))/A_5$ は一変数有理関数体 $\mathbb{C}(x)$ 上の smooth complete rational surface S with a morphism $\varphi : S \longrightarrow C$ over $\mathbb{C}(x)$, where C is a smooth curve over $\mathbb{C}(x)$ with genus 0 and the generic fibre of φ is a smooth curve of genus 0 and $\varphi \otimes \overline{\mathbb{C}(x)}$ (代数閉包) has <u>three</u> degenerate fibres と birational over $\mathbb{C}(x)$ になることを示す。このような rational surface S は birationally trivial over $\mathbb{C}(x)$ であることが Iskovskih 氏による rational surface の分類でわかっている。

最後に5次の対称群 S_5 について考える。S_5 は単位表現 ε と交代表現 ε^- の他に5つの既約表現 $\rho_4^+, \rho_4^-, \rho_5^+, \rho_5^-, \rho_6$ ($\dim \rho_d^{\pm} = d$ で $\rho_d^- = \rho_d^+ \otimes \varepsilon^-$) をもつ。まず ρ_d^+ と ρ_d^- は射影表現としては等しいので $\mathbb{P}(V(\rho_d^+)) \cong \mathbb{P}(V(\rho_d^-))$ は S_5-同変である。よって $\rho_4^+, \rho_5^+, \rho_6$ について調べればよい。

(1) ρ_4^+ について：$\rho_4^+ \oplus \varepsilon$ は5次元置換表現であり、$\mathbb{P}(V(\rho_4^+ \oplus \varepsilon))/S_5 \cong (\mathbb{P}^1)^5/S_5 \cong \mathbb{P}(V(5))$ であった。すると $\mathbb{P}(V(\rho_4))/A_5$ の証明と同様の推論により、$\mathbb{P}(V(\rho_4^+))/S_5 \sim {}_{B}\backslash^{\mathbb{P}(V(5))}$ となる。ここで B は連結可解線形群なので ${}_{B}\backslash^{\mathbb{P}(V(5))}$ の有理性は容易にわかる。具体的には binary 5-form の semi-invariant field (これは G_a-inv.) の G_m-invariant field である。

(2) ρ_5^+ について：これは講演のとき述べたように S. Barron 氏によって示されたそうですので認めさせていただきます。

(3) ρ_6 について：S_5 の指標表を調べることにより，$\rho_6 \otimes \rho_5^+ = \rho_4^+ \oplus \rho_4^- \oplus \rho_5 \oplus \rho_5^- \oplus \rho_6 \oplus \rho_6$ となる。そこで再び §1 の定理を $G = S_5$, $V_1 = V(\rho_6)$, $V_2 = V(\rho_5^+)$, $W = V(\rho_4^+)$ として使う。条件 (3) が成立つことは確認しましたが，筆者には長い計算を要しましたので省略させていただきます。

以上により，正二十面体群 $\widetilde{A_5}$ と 5 次対称群 S_5 についてはすべての既約線形表現 ρ（よってすべての線形表現）について，$\mathbb{P}(V(\rho))/A_5$，及び $\mathbb{P}(V(\rho))/S_5$ は有理的であることがわかりました。

§4.

この § では，§1 の定理の条件 (3) が $V_1 = V(2\ell)$, $V_2 = V(2\ell-2)$, $W = V(2\ell-6) \oplus V(2)$ $(\ell \geqq 5)$ としたとき成立つことを説明します。

$SL(2, k)$ の n-th 対称テンソル表現は，$V(n)$ の basis $\{a_i\}_{i=0}^{n}$ と $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL(2, k)$ に対して，

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i^{\sigma} x_0^{n-i} x_1^{i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i (\alpha x_0 + \gamma x_1)^{n-i} (\beta x_0 + \delta x_1)^{i}$$

によって定義される。このような $V(n)$ の basis $\{a_i\}$ を standard ということにする。$V(n)$, $V(m)$ の standard basis を各々 $\{a_i\}_{i=0}^{n}$, $\{b_j\}_{j=0}^{m}$ として

$$f=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_i x_0^{n-i}x_1^{i}\ ,\quad g=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}b_j x_0^{m-j}x_1^{j}$$

とおく。 $0\leq d\leq n, m$ なる整数 d に対して

$$(4.1)\quad \frac{(n-d)!}{n!}\cdot\frac{(m-d)!}{m!}\sum_{p=0}^{d}(-1)^p\binom{d}{p}\frac{\partial^d f}{\partial x_0^{d-p}\partial x_1^{p}}\cdot\frac{\partial^d g}{\partial x_0^{p}\partial x_1^{d-p}}=\sum_{k=0}^{n+m-2d}\binom{n+m-2d}{k}c_k\, x_0^{n+m-2d-k}x_1^{k}$$

とおくと、$\{c_k\}_{k=0}^{n+m-2d}$ は、$V(n)\otimes V(m)$ の $SL(2,\mathbb{C})$-submodule $V(n+m-2d)$ の standard basis になることが知られている [K]。 (4.1) の左辺を正直に計算すると

$$(4.2)\qquad \sum_{p,i,k\in\mathbb{Z}}(-1)^p\binom{d}{p}\binom{n-d}{i-p}\binom{m-d}{k-i+p}a_i\, b_{d+k-i}\, x_0^{n+m-2d-k}x_1^{k}$$

となる。(ここで $p, q\in\mathbb{Z}$ に対して $\binom{p}{q}=0$ unless $0\leq q\leq p$)

まず Bogomolov. Katysilo 氏による (i) $V_1=V(6p+8)$, $V_2=V(2p+2)\oplus V(2p+4)$, $W=V(4p+6)$ $(p\geq 0)$ の場合について述べます [B.K]。(§2. Remark (5) の (ii)(iii) についても方法は同じ) $V(6p+8)$, $V(2p+2)$, $V(2p+4)$ の standard basis を各々 $\{a_i\}_{i=0}^{6p+8}$, $\{b_j\}_{j=0}^{2p+2}$, $\{b'_k\}_{k=0}^{2p+4}$, $V_1\otimes V_2$ の G-submodule $W=V(4p+6)$ のそれを $\{f_l\}_{l=0}^{4p+6}$ とする：

$$\begin{bmatrix}f_0\\ \vdots\\ f_{4p+6}\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}b_0\\ \vdots\\ b'_{2p+4}\end{bmatrix}=B\begin{bmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_{6p+8}\end{bmatrix}\qquad \left\{\begin{array}{l}A\text{ は }(4p+7)\times(4p+8)\text{-行列}\\ B\text{ は }(4p+7)\times(6p+9)\text{-行列}\end{array}\right.$$

$\mathbb{P}(V_1)\cong\mathbb{P}^{6p+8}$, $\mathbb{P}(V_2)\cong\mathbb{P}^{4p+7}$ の同次座標を各々 $(a_0:\cdots:a_{6p+8})$, $(b_0:\cdots:b'_{2p+4})$ として、

$$X:=\left\{(a,(b,b'))\in\mathbb{P}(V_1)\times\mathbb{P}(V_2)\;\middle|\; f_k(a,b)=0\quad 0\leq k\leq 4p+6\right\}$$

とおき、X から各成分への射影を $\pi_i : X\longrightarrow\mathbb{P}(V_i)$ とする $(i=1,2)$。π_1 は全射

であるから $\pi_1(Y)=\mathbb{P}(V_1)$ なる X の既約成分 Y をとり $\pi_i|_Y=\tau_i$ とおく。(下図)

このとき、$\dim Y=6P+8$、かつ $\pi_2(Y)=\mathbb{P}(V_2)$ なることを示せば定理の条件(3)が成立つことがわかるので以下これを示す。

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^{6P+8}=\mathbb{P}(V_1) & \mathbb{P}(V_1)\times\mathbb{P}(V_2) \arrow[l] \arrow[r] & \mathbb{P}(V_2)=\mathbb{P}^{4P+7} \\
 & X \arrow[ul, "\pi_1"] \arrow[ur, "\pi_2"'] \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] & \\
 & Y \arrow[uul, bend left, "\tau_1"] \arrow[uur, bend right, "\tau_2"'] \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] &
\end{tikzcd}$$

彼らは次の簡単な事実に注目したので証明に計算が殆ど不要になった:

<u>Fact</u> $\mathbb{P}(V_2)$ の任意の点 $x=(b,b')$ に対して、x の $G:=PGL(2,k)$-orbit の閉包は、

(1) $b'=0$ ならば点 $P=(0:0:\cdots:0:b_{2P+2}:0:\cdots:0)$ を含む。

(2) $b'\neq 0$ ならば点 $Q=(0:0:\cdots:0:0:0:\cdots:0:b'_{2P+4})$ を含む。

一方、(4.2)から容易に、$f_\ell(a,P)=\lambda_\ell a_\ell$ $(0\leq \ell\leq 4\ell+6,\ 0\neq\lambda_\ell\in k)$, $f_\ell(a,Q)=0\ (\ell=0)$, $=\mu_\ell a_{\ell-1}$ $(1\leq\ell\leq 4P+6,\ 0\neq\mu_\ell\in k)$ の形になることがわかる。つまり

$$B(P)=\begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ & \lambda_1 & & \Large 0 \\ & & \ddots & \\ \Large 0 & & & \lambda_{4P+6} \end{pmatrix},\quad B(Q)=\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ \mu_1 & & & & \\ & \mu_2 & & & \Large 0 \\ & & \ddots & & \\ \Large 0 & & & \mu_{4P+6} & \end{pmatrix}$$

となる。よって $\pi_2^{-1}(P)\cong\mathbb{P}^{(6P+8)-(4P+7)}=\mathbb{P}^{2P+1}$, $\pi_2^{-1}(Q)\cong\mathbb{P}^{(6P+8)-(4P+6)}=\mathbb{P}^{2P+2}$ である。

(i) $\tau_2(Y)\ni P$ とすると fibre の次元の上半連続性より $\dim Y\leq\dim\tau_2(Y)+\dim\tau_2^{-1}(P)\leq(4P+7)+(2P+1)=6P+8$ であるが、$\pi_1(Y)=\mathbb{P}(V_1)\cong\mathbb{P}^{6P+8}$ より、$\dim Y=6P+8$, $\dim\tau_2(Y)=4P+7$ となり ok。

(ii) $\tau_2(Y)\not\ni P$ とすると、Fact (1) より、$\tau_2(Y)\ni{}^{\forall}(b,b')$ に対して $b'\neq 0$ である。よって Fact (2) より、$\tau_2(Y)\ni Q$。また $L:=\{(b,0)\in\mathbb{P}(V_2)\mid b\in V(2P+2)\}\cong\mathbb{P}^{2P+2}$ とおくと、$\tau_2(Y)\cap L=\emptyset$ in $\mathbb{P}^{4P+7}=\mathbb{P}(V_2)$ であるから、$\dim\tau_2(Y)\leq(4P+7)-(2P+2)-1=2P+4$。

よって (i) と同じ推論により、$6P+8 \le \dim Y \le \dim \tau_2(Y) + \dim \tau_2^{-1}(Q) \le (2P+4)+(2P+2)$ $=4P+6$ よって $2P+2 \le 0$ となり、$P \geq 0$ に矛盾。

次に (4.2) で $(n,m,d)=(2\ell, 2\ell-2, \ell+2), (2\ell, 2\ell-2, 2\ell-2)$ として、$V(2\ell)\otimes V(2\ell-2)$ の $G:=PGL(2,k)$-sub module $W:=V(2\ell-6)\oplus V(2)$ の basis $\{f_k\}_{k=0}^{2\ell-3}$ を計算すると

$$
(4.3)\quad \begin{cases} f_k = \sum_i \lambda_{ki}^{(\ell)} a_i \otimes b_{\ell+2+k-i}, \quad \lambda_{ki}^{(\ell)} = \sum_p (-1)^p \binom{\ell+2}{p}\binom{\ell-2}{i-p}\binom{\ell-4}{k-i+p} & \text{for } 0 \le k \le 2\ell-6 \\ f_{2\ell-5+k} = \sum_p \mu_p^{(\ell)} a_{k+p} \otimes b_{2\ell-2-p}, \quad \mu_p^{(\ell)} = (-1)^p \binom{2\ell-2}{p} & \text{for } k=0,1,2 \end{cases}
$$

となる。$\mathbb{P}(V(2\ell))$ の点 $(a)=(a_0:\cdots:a_{2\ell})$ として

$$
(4.4)\quad \begin{cases} a_i = 0 \quad \text{for } i \neq 2,\ \ell+1,\ 2\ell \\ a_2,\ a_{\ell+1},\ a_{2\ell} \text{ は } k \text{ の一般的な元} \end{cases}
$$

をとる。この (a) に対して $\mathbb{P}(V(2\ell-2))$ の点 $(b)=(b_0:\cdots:b_{2\ell-2})$ として

$$
(4.5)\quad \begin{cases} b_j = 0 \quad \text{for } j \neq 0,\ \ell-1,\ 2\ell-2 \\ (b_0:b_{\ell-1}:b_{2\ell-2}) = \left[\left\{\lambda+(-1)^\ell\binom{\ell-2}{2}\binom{2\ell-2}{\ell-1}\right\}a_2 a_{\ell+1} : \left\{\binom{\ell-2}{2}-(-1)^\ell\right\}a_2 a_{2\ell} : \left\{\lambda+\binom{2\ell-2}{\ell-1}\right\}a_{\ell+1}a_{2\ell}\right] \\ \text{ここで } \lambda := \lambda_{\ell-2,\ell+1}^{(\ell)} = \sum_p (-1)^p \binom{\ell+2}{p}\binom{\ell-2}{p-3}\binom{\ell-4}{p-3} \end{cases}
$$

をとる。すると、$f_k(a,b)=0$ $(0 \le k \le 2\ell-3)$ で、$\operatorname{rank} A(a) = \operatorname{rank} B(b) = 2\ell-2$ となることを、以下説明しよう。(行列 A, Bの定義は §1 の定理を参照)

と思ったけれども この証明には、筆者には長い計算を要しましたし、しかも先に示しましたように、Bogomolov, Katysilo 氏による殆んど計算を要しない証明がありましたので、概略だけを述べさせていただきます。

まず

Lemma 1 $\lambda^{(\ell)}_{k.2} \neq 0$ for ${}^{\forall}\ell \geqq 5,\ 0 \leqq {}^{\forall}k \leqq \ell-2$ except $(\ell.k)=(5.1),(8.2)$

となる。ここで $\lambda^{(\ell)}_{k.2} := \binom{\ell+2}{2}\binom{\ell-4}{k} - (\ell^2-4)\binom{\ell-4}{k-1} + \binom{\ell-2}{2}\binom{\ell-4}{k-2}$

Lemma 2 $\mathbb{P}(V(2\ell))$ の点 (a) で (4.4) をみたすものに対して，$(2\ell-2)\times(2\ell-1)$-行列 $A(a)$ の第 $(2\ell-2)$ 列を除いた，$(2\ell-2)$ 次行列の行列式 Δ は

$$\Delta = \prod_{k=0}^{\ell-5} \begin{vmatrix} \lambda_{k.\ell+1} a_{\ell+1} & \lambda_{k.2} a_2 \\ (-1)^{\ell} \binom{\ell-4}{k+1} a_{2\ell} & \lambda_{\ell-1+k.\ell+1} a_{\ell+1} \end{vmatrix} \cdot \nabla_1(\ell) \cdot \{-\nabla_2(\ell)\} \cdot \{-\nabla_3(\ell)\} \cdot a_2^2 a_{\ell+1}^2 a_{2\ell}^2$$

となる。ここで

$$\begin{cases} \nabla_1(\ell) = \binom{2\ell-2}{2} \lambda_{\ell-4.\ell+1} + (-1)^{\ell} \binom{2\ell-2}{\ell-3} \lambda_{\ell-4.2} \\ \nabla_2(\ell) = (2\ell-2) \cdot \lambda_{\ell-3.2} + (-1)^{\ell} \binom{2\ell-2}{2} \lambda_{\ell-3.2} \\ \nabla_3(\ell) = \lambda_{\ell-2.\ell+1} + \binom{2\ell-2}{\ell-1} \qquad (\lambda_{..} \text{ の定義は } (4.3)) \end{cases}$$

すると，Lemma 1 より $\lambda_{k2} \neq 0$ $(0 \leqq k \leqq \ell-5)$ で $a_2, a_{\ell+1}, a_{2\ell}$ は general としていたので

$$\prod_{k=0}^{\ell-5} \begin{vmatrix} \lambda_{k.\ell+1} a_{\ell+1} & \lambda_{k.2} a_2 \\ (-1)^{\ell} \binom{\ell-4}{k+1} a_{2\ell} & \lambda_{\ell-1+k.\ell+1} a_{\ell+1} \end{vmatrix} \neq 0$$

がわかる。$\nabla_i(\ell) \neq 0$ はあとで示す。

Lemma 3 $\mathbb{P}(V(2\ell-2))$ の点 (b) で (4.5) をみたすものに対して，

$$\begin{cases} b_0,\ b_{\ell-1},\ b_{2\ell-2} \neq 0 \\ f_k(a.b) = 0 \quad (0 \leqq {}^{\forall}k \leqq 2\ell-3) \end{cases}$$

が直接計算してわかる。

Lemma 4　$\mathbb{P}(V(2\ell-2))$ の点(b) で (4.5) をみたすものに対して、$(2\ell-2)\times(2\ell+1)$-行列 $B(b)$ の第$(2\ell-1)$-, 第2ℓ-, 第$(2\ell+1)$-列を除いてできる $(2\ell-2)$次行列の行列式 Δ' は、

$$\Delta' = \prod_{k=0}^{\ell-5} \begin{vmatrix} \lambda_{k,3+k} b_{\ell-1} & (-1)^{\ell}\binom{\ell-2}{k} b_0 \\ \binom{\ell-2}{3+k} b_{2\ell-2} & \lambda_{\ell-1+k,\ell+2+k} b_{\ell-1} \end{vmatrix} \cdot \nabla_1'(\ell)\cdot\nabla_2'(\ell)\cdot\nabla_3'(\ell)\cdot b_{\ell-1}^3 b_{2\ell-2}^3$$

となる。ここで

$$\begin{cases} \nabla_1'(\ell) = \lambda_{\ell-4,\ell-1} + (-1)^{\ell}\binom{2\ell-2}{\ell-1} \\ \nabla_2'(\ell) = \lambda_{\ell-3,\ell} + (-1)^{\ell}(\ell-2)\binom{2\ell-2}{\ell-1} \\ \nabla_3'(\ell) = \lambda_{\ell-2,\ell+1} + (-1)^{\ell}\binom{\ell-2}{2}\binom{2\ell-2}{\ell-1} \end{cases}$$

すると、$b_0, b_{2\ell-2} \neq 0$ ($\because$ Lemma 3) と、$a_2, a_{\ell+1}, a_{2\ell}$ は general であることから

$$\prod_{k=0}^{\ell-5} \begin{vmatrix} \lambda_{k,3+k} b_{\ell-1} & (-1)^{\ell}\binom{\ell-2}{k} b_0 \\ \binom{\ell-2}{3+k} b_{2\ell-2} & \lambda_{\ell-1+k,\ell+2+k} b_{\ell-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

がわかる。よって結局、$\nabla_i(\ell)\neq 0$, $\nabla_i'(\ell)\neq 0$ $(i=1,2,3)$ を示すことに帰着する。$(\forall\ell\geq 5)$. $\nabla_i(\ell)$, $\nabla_i'(\ell)$ を少し簡単にすると、

$$\begin{cases} \nabla_1(\ell) = \binom{2\ell-2}{2}\cdot\tau(\ell) + (-1)^{\ell}\binom{2\ell-2}{\ell-3}\cdot(\ell-1)(\ell-5)(\ell^2-12\ell+12)/4 \\ \nabla_2(\ell) = (2\ell-2)\cdot\nu(\ell) + (-1)^{\ell}\binom{2\ell-2}{\ell-2}\binom{\ell-1}{2}(\ell-8) \\ \nabla_3(\ell) = \lambda(\ell) + \binom{2\ell-2}{\ell-1} \\ \nabla_1'(\ell) = (-1)^{\ell}\cdot\nabla_3(\ell) \\ \nabla_2'(\ell) = \mu(\ell) + (-1)^{\ell}\binom{2\ell-2}{\ell-1}(\ell-2) \\ \nabla_3'(\ell) = \lambda(\ell) + (-1)^{\ell}\binom{2\ell-2}{\ell-1}\binom{\ell-2}{2} \end{cases}$$

ここで
$$\begin{cases} \tau(\ell) := \lambda_{\ell-4,\ell+1} = \sum_{p\in\mathbb{Z}} (-1)^p \binom{\ell+2}{p}\binom{\ell-2}{p-3}\binom{\ell-4}{p-5} \\ \nu(\ell) := \lambda_{\ell-3,\ell+1} = \sum_{p} (-1)^p \binom{\ell+2}{p}\binom{\ell-2}{p-3}\binom{\ell-4}{p-4} \\ \lambda(\ell) := \lambda_{\ell-2,\ell+1} = \sum_{p} (-1)^p \binom{\ell+2}{p}\binom{\ell-2}{p-3}\binom{\ell-4}{p-3} \\ \mu(\ell) := \lambda_{\ell-3,\ell} = \sum_{p} (-1)^p \binom{\ell+2}{p}\binom{\ell-2}{p}\binom{\ell-4}{p-3} \end{cases}$$

とおいた。つまり 2項係数の3つの積の交代和 がでてくる。これは、

組合論の恒等式 $(a,b,c\in\mathbb{N})$

$$\sum_{k=-p}^{p} (-1)^k \cdot k^r \binom{a+b}{b+k}\binom{b+c}{c+k}\binom{c+a}{a+k} = \begin{cases} \dfrac{(a+b+c)!}{a!\,b!\,c!} & \text{for } r=0 \\ -\dfrac{(a+b+c-1)!}{(a-1)!\,(b-1)!\,(c-1)!} & \text{for } r=2 \\ 0 & \text{for } r=1,3 \end{cases}$$

$$\sum_{k=-p}^{p+1} (-1)^k \cdot k^r \binom{a+b+1}{b+k}\binom{b+c+1}{c+k}\binom{c+a+1}{a+k} = \begin{cases} 0 & \text{for } r=0 \\ -\dfrac{(a+b+c+1)!}{a!\,b!\,c!} & \text{for } r=1,2 \\ \dfrac{(a+b+c)!}{(a-1)!\,(b-1)!\,(c-1)!} - \dfrac{(a+b+c+1)!}{a!\,b!\,c!} & \text{for } r=3 \end{cases}$$

を使うことにより、$\forall m \geqq 2$ について

$$\tau(2m+1) = (-1)^{m+1} \binom{3m}{m+1,\, m-1,\, m-1} \cdot \frac{3\,(2m+3)}{(m+1)(2m+1)(2m-1)}$$

$$\tau(2m+2) = (-1)^{m+1} \binom{3m+1}{m+1,\, m+1,\, m} \frac{4m^3+8m^2-11m-6}{(2m+1)(2m+3)}$$

$$\nu(2m+1) = (-1)^{m} \binom{3m-1}{m+1,\, m-1,\, m-1} \frac{3}{2} \cdot \frac{(2m+3)}{(2m+1)}$$

$$\nu(2m+2) = (-1)^{m+1}\binom{3m-1}{m+1,m-1,m-1}\frac{3(m+4)(3m+1)}{(m+1)(2m-1)}$$

$$\lambda(2m+1) = (-1)^{m}\binom{3m-1}{m+1,m-1,m-1}\frac{3(2m+3)}{2(2m-1)}$$

$$\lambda(2m+2) = (-1)^{m}\binom{3m+1}{m+1,m,m}\frac{2m^2+m+2}{(2m-1)(2m+1)}$$

$$\mu(2m+1) = 0$$

$$\mu(2m+2) = (-1)^{m}\binom{3m-1}{m+1,m-1,m-1}\frac{6(2m+3)(3m+1)}{(2m-1)(2m+1)}$$

となる。ここで $a,b,c\in\mathbb{N}$ に対して $\binom{a}{b,c,d} = a!/b!c!d!$ とした。よって

$$\nabla_1(2m+1) = \binom{4m}{2}(-1)^{m+1}\binom{3m}{m+1,m-1,m-1}\frac{3(2m+3)}{(m+1)(2m-1)(2m+1)} - \binom{4m}{2m-2}m(m-2)(4m^2-20m+1),$$

$$\nabla_1(2m+2) = \binom{4m+2}{2}(-1)^{m+1}\binom{3m+1}{m+1,m+1,m}\frac{4m^3+8m^2-11m-6}{(2m-1)(2m+3)} + \binom{4m+2}{2m-1}(2m+1)(2m-3)(m^2-4m-2),$$

$$\nabla_2(2m+1) = 4m\cdot(-1)^{m}\binom{3m-1}{m+1,m-1,m-1}\frac{3(2m+3)}{2(2m+1)} - \binom{4m}{2m}\binom{2m}{2}(2m-7),$$

$$\nabla_2(2m+2) = (4m+2)(-1)^{m+1}\binom{3m-1}{m+1,m-1,m-1}\frac{3(m+4)(3m+1)}{(m+1)(2m-1)} + \binom{4m+2}{2m}\binom{2m+1}{2}(2m+6),$$

$$\nabla_3(2m+1) = (-1)^{m}\binom{3m-1}{m+1,m-1,m-1}\frac{3(2m+3)}{2(2m-1)} + \binom{4m}{2m},$$

$$\nabla_3(2m+2) = (-1)^{m}\binom{3m+1}{m+1,m,m}\frac{2m^2+m+2}{(2m-1)(2m+1)} + \binom{4m+2}{2m+1},$$

$$\nabla_1'(2m+1) = -\nabla_3(2m+1),$$

$$\nabla_1'(2m+2) = \nabla_3(2m+2),$$

$$\nabla_2'(2m+1) = -(2m-1)\binom{4m}{2m},$$

$$\nabla_2'(2m+2) = (-1)^{m}\binom{3m-1}{m+1,m-1,m-1}\frac{6(2m+3)(3m+1)}{(2m-1)(2m+1)} + 2m\binom{4m+2}{2m+1},$$

$$\nabla_3'(2m+1)=(-1)^m\binom{3m-1}{m+1,m-1,m-1}\frac{3(2m+3)}{2(2m-1)}-\binom{4m}{2m}\binom{2m-1}{2}$$

$$\nabla_3'(2m+2)=(-1)^m\binom{3m+1}{m+1,m,m}\frac{2m^2+m+2}{(2m-1)(2m+1)}+\binom{4m+2}{2m+1}\binom{2m}{2}$$

となる。そこで $l\leq 40$ ぐらいまでの $\nabla_1(l),\cdots,\nabla_3'(l)$ の値を計算機で出してみると、確かに 0 となることはなかった。最後に

Lemma 5　有理数係数の、任意の有理関数 $F(x)\in\mathbb{Q}(x)$ に対して、

$$\binom{3m}{m,m,m}>F(m)\cdot\binom{4m}{2m}\quad \text{for}\quad m\gg 0$$

であることに注意すれば、すべての $l\geq 5$ に対して、0 にならないことは、容易に想像がつく。

§5. S_5 と A_5 の generic polynomial について

無限体 k と有限群 G が given とする。k 上の m 変数有理関数体 $k(x_1,\cdots,x_m)$ を係数とする、$\overbrace{\text{既約、分離多項式}}^{k(x_1,\cdots,x_m)\text{上で}}$ $P(t)\in k(x_1,\cdots,x_m)[t]$ の、$k(x_1,\cdots,x_m)$ 上の Galois 群は G に同型とする。このとき、

Def [D]　$P(t)$ が generic polynomial for G over k とは、

For any extension field K of k and any Galois field extension L of K whose Galois group H is a subgroup of G, there is a substitution $x_i \mapsto \beta_i$ with $\beta_i \in K$ sending $P(t)$ to a separable polynomial $g(t) \in K[t]$ such that L is the splitting field of $g(t)$ over K. とする。

例えば、$k = \mathbb{Q}$ 有理数体とすると、$P(t) = t^m + x_1 t^{m-1} + x_2 t^{m-2} + \cdots + x_m$ は m 次対称群 S_m に対する generic polynomial over $\mathbb{Q}$ の1つである。このことと、$\mathbb{P}^5 \longrightarrow \mathbb{P}^5/PGL(2,k)$ の rational section を具体的に書下すことにより、次のことがわかる。(計算は省略)

$$
(1)\quad t^5 + \frac{\frac{-5}{4}(a^2+3b)}{a(1-3a)}\cdot t^4 + \frac{-a^3b + \frac{a(a^2-b)}{2} - 9b}{a^2(1-3a)}\cdot t^3 + \frac{\frac{-a^2(a^2-b)}{4} + \frac{(a^2-b)^2}{4^2} + 6ab}{a^3(1-3a)}\cdot t^2
$$
$$
+ \frac{\frac{a(a^2-b)^2}{4^2} + \frac{(3a^2-b)b^2}{2}}{a^4(1-3a)}\cdot t + \frac{\frac{(a^2-b)^3}{4^3} + \frac{ab^2(a^2-b)}{2} + 9\cdot b^4}{a^5(1-3a)}
$$

は、5次対称群 S_5 の generic polynomial over $\mathbb{Q}$ で、2つのパラメータ a, b をもつもの(つまり $m=2$)の、1つである。

(2) (1) で、$a \mapsto (1-a^2)/27$ としたものは、5次交代群 A_5 の generic polynomial over $\mathbb{Q}$ の1つである。

1つのパラメータをもつ5次式で、上の性質をものものがあるかどうか筆者にはわからない。

文 献

[K] P.I. Katysilo, The rationality of moduli spaces of hyperelliptic curves Math. USSR. Izv. 25 (1985) 45-50

[B] F.A. Bogomolov, Rationality of the moduli of hyperelliptic curves of arbitrary genus, preprint

[B, K] F.A. Bogomolov, P.I. Katysilo, Rationality of some quotient varieties, Math. USSR Sbornik 54 (1986) 571-576

[S] T. Shioda, On the graded ring of invariants of binary octavics, Amer. J

[D] F. DeMeyer, Generic Polynomials, J. of Alg. 84 (1983) 441-448