

Complete intersection の Generic Torelli について.

学術振興会 寺松 友秀

§ 0 Introduction.

1. Generic Torelli Theorem.

まず, Generic Torelli Theorem とは, どの様な m の T のか. 述べたい. もともと Torelli の定理は, 曲線について知られているものであ, したが, その心は, "果して, 周期によつて, もとの代数多様体が復元できるのか" という様なものであ. 一応 Griffith により, formalism らしきものは, 存在するといつてもよいが必ずしも成り立つわけでもない (Griffith 流では) ので, あらたに formalism が必要とされているのかもしない. といは, 白井, 斎藤, 清水, 今野氏らの今後の研究が大変期待である.

P^n 内の Complete intersection に限しては, 中間次元以外の cohomology は, 周期としてみればもとの P^n に由来するものらしいものであるから, Torelli の定理を考える上で, 中間次元の cohomology のみを考えるという方向が自然で

あると思ひます。

今、 $d \geq 2$ 以上、 $m \geq 1$ 以上とし、 $n \geq m+1$ 以上大きい自然数として、固定した時、 \mathbb{P}^n 内の (d, \dots, d) - $\frac{(m+1)}{\text{区}}$ complete intersection の moduli 空間 \mathcal{M} を、

$$\mathcal{M} = \left\{ X \subset \mathbb{P}^n \mid X \text{ は } (d, \dots, d) \text{ complete intersection } \right\} / (\text{projective equivalence})$$

で定義した時、周期写像 τ 、以下定義可。 $p \in \mathcal{M}$ に対応する complete intersection X_p とした時、 X_p の $(n-m-1)$ 次元 primitive cohomology $H_{\text{prim}}^{(n-m-1)}(X_p, \mathbb{Z})$ には、自然に polarized Hodge structure の構造がはいるので、これは、Hodge 構造の分類空間 D/Γ 上の点を決める。これによ、 τ 定まる写像 $\mathcal{M} \rightarrow D/\Gamma$ が周期写像である。Generic Torelli は、この写像が generic に injective である、というのを問題にするのである。

2. Main Theorem の Statement

Theorem. m, n, d を自然数とする。 $d \geq 2$ とする。次の条件 (i) (ii) が成り立つ時、generic Torelli Theorem が成立可。

(i) $n > m+1$

(ii) $d \leq 2 \left\{ (m+1)d - (n+1) \right\} \leq \min \left((d-1)m + (d-2), md \right)$

(注) 実用上の定理は, Variational Torelliを示すというテクニクを使うのが。(2.2.2)完全交叉(ex. degree = 8のK3曲...) について。Variational Torelliは成立しない。もちろん、 \mathbb{P}^5 内の(2.2.2) complete intersectionはK3曲だが、Torelliは成立する。))

3. Hyper surface の時の結果 (Donagi の方法)

$m=0$ にあたる時のことをわけて超曲面の場合は、Donagiにより、いくつかの例外を除いて、Generic Torelliが成立することが知られている。これを示すのは、いわゆる Variational Torelliを使うことである。大きく3つのステップに分けてみると、次の様になる。1つめのステップは、超曲面の Infinitesimal Variation of Hodge Structure (以下 IVHS と略記する。)を、超曲面 X の方程式 F (ie $X = \{F=0\}$) のことばで書き表わす。すなわち、 F の Jacobian ring が、わかれば、これを便して、IVHS が記述できることを考察する。第2ステップは、 X の IVHS と、 X' の IVHS が同型ならば、超曲面 X の方程式 F の Jacobian ring と、 X' の方程式 F' の Jacobian ring が同型になることを、証明する。これは、Symmetrizer Lemma は役に立つ。 F の Jacobian ring と、 F' の Jacobian ring の同型性は、 F と F' の projective equivalence を imply する。そして最後のステップは、

Variational Torelli, 可成り. IVHSの情報が. ほと
 の為様体を復元可子のに十分であることがわかれば. 之れか
 ら. Torelliの定理が従うことをみるのである.

4. Complete intersection の場合の方針

超曲面の場合. 1つの方程式が. 最終的に projective
 equivalent であるかどうかをみればよいわけだが. Complete
 intersection の時. 方程式が2個以上あるので. 少し工夫を
 したほうがいい. 以下. この報告で. やることを. 簡単に
 述べる.

- a) Complete intersection の IVHS がある algebraic
 correspondence を通って. $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ 内の hyper surface
 の IVHS と同型であることを見る. (μ -ring)
- b) Special な場合には帰着されることをみる.
- c) V -ring という ring を考え. 之れに関与する duality
- d) Fermat hyper surface の special to complete
 intersection の時の計算.

§ 1. Complete intersection of IVHS \Rightarrow 1.2.

$d \in \mathbb{Z}$ 以上の自然数. $n \in m+2$ 以上の自然数と可なり.

$X \subset \mathbb{P}^n$ 内の (d, \dots, d) complete intersection, 可なり.

$(m+1)$ 個の d 次超曲面の完全交叉と可なり. $\mathbb{P}^n = X$ かつ.

smooth であるとして. $F_0, \dots, F_m \in \text{degree } d \text{ of } X$ の定義方程式と可なり. 可なり X かつ. $X = \{F_0 = \dots = F_m = 0\}$ と \mathbb{P}^n 内で表わし可なり. n の時. 可なり $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ 内の超曲面 \mathcal{X} .

$\mathcal{X} = \{(\mu, x) \in \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \mid \mu_0 F_0(x) + \dots + \mu_m F_m(x) = 0\}$ で定義可なり. n かつ. $pr_1^* \mathcal{O}(1) \otimes pr_2^* \mathcal{O}(d)$ の section $\mu_0 F_0(x) + \dots + \mu_m F_m(x)$ の 0 点と可なり.

Proposition 1 $\mathbb{P}^m \times X \hookrightarrow \mathcal{X}$ かつ induce 可なり map

$$j^* : H^{h+m-1}(\mathcal{X}, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{h-m-1}(X, \mathbb{Q}) \otimes H^{2m}(\mathbb{P}^m, \mathbb{Q})$$

可なり. 同型:

$$H_{\text{prim}}^{h+m-1}(\mathcal{X}, \mathbb{Q}) \cong H_{\text{prim}}^{h-m-1}(X, \mathbb{Q}) \otimes H^{2m}(\mathbb{P}^m, \mathbb{Q})$$

可なり \mathbb{Z} かつ n 可なり. $n = 2$.

$$H_{\text{prim}}^{h+m-1}(\mathcal{X}, \mathbb{Q}) := \text{Coker} \left(\begin{array}{l} H^{h+m-1}(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n, \mathbb{Q}) \\ \rightarrow H^{h+m-1}(\mathcal{X}, \mathbb{Q}) \end{array} \right)$$

$$H_{\text{prim}}^{h-m-1}(X, \mathbb{Q}) := \text{Coker} \left(\begin{array}{l} H^{h-m-1}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Q}) \\ \rightarrow H^{h-m-1}(X, \mathbb{Q}) \end{array} \right)$$

可なり.

証明. 2nd projection から誘導される map $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^n$

と対応する. $R^{2m}\varphi_*\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}_X$ と対応する. $\Rightarrow a = c$ と.

Leray の spectral sequence for φ から出る. //

\Rightarrow X から complete intersection X' の誘導. hyper surface X の誘導に帰着して $1 < 2c$ が成り立つ. 次の long exact sequence を考えよ

$$\begin{aligned} \rightarrow H^{h+m}(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\alpha} H^{h+m}(U, \mathbb{Q}) \rightarrow H_{X'}^{h+m+1}(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n, \mathbb{Q}) \\ \rightarrow H^{h+m+1}(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n, \mathbb{Q}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Lemma α は 0-map.

Corollary $H^{h+m}(U, \mathbb{Q}) \cong H_{\text{prim}}^{h+m-1}(X, \mathbb{Q})$ は同型.

ここで, \pm の Corollary の同型を考察する. $H^{h+m}(U, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}$ は De Rham の定理より $H_{\text{DR}}^{h+m}(U/\mathbb{C})$ と同型に一致する.

これは, $H_{\text{DR}}^{h+m}(U/\mathbb{C}) \cong H^0(U, \Omega^{h+m}) / dH^0(U, \Omega^{h+m-1})$

と対応する同型を通じて. X に添った F = pole の order $= r$ の filtration が成り立つ. \Rightarrow $H^{h+m}(U, \mathbb{Q})$ 上の Hodge Structure を定める. \Rightarrow Corollary の同型は Hodge structure と (2) の同型であることが容易にわかる. 以下, \Rightarrow Hodge Structure を計算する.

F を μ と λ の多項式 $F = \mu_0 F_0(x) + \dots + \mu_m F_m(x)$ と対応する. $S \in \mathbb{C}[\mu_0, \dots, \mu_m, \lambda_0, \dots, \lambda_n]$ とし, $J \in$.

$\partial F / \partial x_i$ ($i=0, \dots, m$), $\partial F / \partial x_j$ ($j=0, \dots, n$) で生成される。
 S an ideal, $R \in S/J$ と可なり。 J は \mathbb{C} -homogeneous ideal with respect to (μ, x) と可なり。

$R = \bigoplus_{a \geq 0, b \geq 0} R(a, b)$, ($R(a, b)$ は (μ, x) に関する degree a の (a, b) と可なり),
 と可なり。 Differential の計算と可なり (= 可なり)。 次の Proposition を得る。

Proposition

$$\text{Gr}_F^{h+m-p} H_{DR}^{h+m}(U/\mathbb{C}) \cong R(p-(m+1), pd-(n+1))$$

Corollary

$$\begin{aligned} H_{\text{prim}}^{p,q}(X) &\cong H_{\text{prim}}^q(X, \Omega^p) \\ &\cong R(q, (m+q+1)d-(n+1)). \end{aligned}$$

これは $IVHS$ と可なり (= 可なり)。 $H^1(X, \mathbb{C})$ と可なり。
 う。

Proposition

$$H^1(X, \mathbb{C}) \cong R(1, d)$$

これは自然同型可なり。 Kodaira-Spencer map 可なり。

$$H^q(X, \Omega^p) \otimes H^1(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^{q+1}(X, \Omega^{p-1})$$

これは ring R の ring multiplication を可なり (= 可なり) map

$$R(q, (m+q+1)d-(n+1)) \otimes R(1, d) \rightarrow R(q+1, (m+q+2)d-(n+1))$$

ϵ compatible である。

Remark moduli 上の点 $X = \{F_0 = \dots = F_m = 0\}$ の

tangent $G = \mu_0 G_0(x) + \dots + \mu_m G_m(x) \in R(1, d)$

方向への X の deformation 1 階. $F_0 + \epsilon G_0 = \dots = F_m + \epsilon G_m = 0$

で与えられる。

次に, cup product が induce した \mathbb{C} の polarization に対応する記述を \mathbb{C} の ring R の言葉で書くと出来る。

Proposition (Cup product)

標準的に $R(n-m-1, (n+m+1)d-2(n+1))$ から \mathbb{C} への map

$$t: R(n-m-1, (n+m+1)d-2(n+1)) \rightarrow \mathbb{C}$$

が存在し、次の図式を commute できる。 ($p+q=n-m-1$.)

$$H_{\text{prim}}^p(X, \Omega^q) \otimes H_{\text{prim}}^q(X, \Omega^p) \rightarrow H^{p+q}(X, \Omega^{p+q}) \cong \mathbb{C}$$

|||

$\uparrow t$

$$R(p, (m+p+1)d-(n+1)) \otimes R(q, (n+q+1)d-(n+1)) \rightarrow R(n-m-1, (n+m+1)d-2(n+1))$$

§ 2. Special case \sim a reduction.

$S(1, d)^\circ$ は $(1, d)$ polynomial であり、これに対応する 0 次元の variety X は $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ である。smooth であることが出来る。

\cong 4-1 1 階. $GL(m+1) \times GL(n+1)$ が作用できる。これは 4-1 1 階。

$M = S(1, d)^\circ / GL(m+1) \times GL(n+1)$ とおくと。

§ 0 で定義した同型写像 $m \rightarrow D/T$ は, 必ず Peters に等しい. quasi-finite であることが知られている.

Variational Torelli と. Weak global Torelli (= generic Torelli) の関係は. 次の principle に等しいことが知られている.

Principle M がある open set M^0 が存在して. 次の性質を満たすことができる.

(i) $M^0 \rightarrow D/T$ は étale.

(ii) $X_1, X_2 \in M^0$ の IVHS: $(H^1(X_i), H^{1,0}(X_i), \mathcal{V}_i, \mathcal{Q}_i)$ が同型であるならば. $X_1 \cong X_2$

この時. Weak global Torelli theorem が成り立つ.

すなわち. 我々の場合 (i) が成り立つことが保証されているから. (ii) の条件を確かめればよい. (ii) については. 次の reduction theorem が知られている.

Reduction Theorem m, d, n を前の様に fix する. 今.

$\lambda = (m+1)d - (n+1)$ とおいたとき. $d \leq 2\lambda$ が成り立つと仮定する. § 1 で定義した ring R について.

(*) $R(0, 2\lambda) \rightarrow \text{Hom}(R_{(n-m-1)(1,d)}, H^{n-m-1, n-m-1}(X))$
 は injective

が成り立つ様だ. $F = M_0 F_0 + \dots + M_m F_m$ が $S(1, d)$ 中に存在してよい.

二の時. Principle a (ii) を成り立たせよ。

$$(*) \text{ 1} \quad R(1, d)^{\otimes (n-m-1)} \rightarrow \text{Hom}(R(2, \lambda), R_p),$$

$p = (n-m-1, (n+m+1)d - 2(n+1))$ への surjective 写像 τ がある。

と τ である。十分である。

証明. $X \xrightarrow{f} S$ は smooth 写像。 \mathbb{P}^n 内の $(\underbrace{d, \dots, d}_{m+1})$ complete

intersection の family である。 $s \in X$ の fiber X_s と

$\mathbb{C} \subset H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ である。 $R^1 f_* \mathcal{O}_{X/S}$ は locally

free sheaf である。ゆえに。

$$(R^1 f_* \mathcal{O}_{X/S})^{\otimes (n-m-1)} \rightarrow \text{Hom}(f_* (\omega_{X/S}^{\otimes 2}), R^{n-m-1} f_* \omega_{X/S})$$

が τ である surjective 写像である。ある s を含んだ open set U があり、 τ

任意の $s' \in U$ 上 τ surjective である。二つの条件が成り立つ時。

$$\ker(\text{Sym}^2 H^0(X_s, \Omega^{n-m-1}) \rightarrow \text{Hom}(H^1(X_s, \mathcal{O})^{\otimes (n-m-1)}, \mathbb{C}))$$

$$\cong \ker(\text{Sym}^2 H^0(X_s, \Omega^{n-m-1}) \rightarrow H^0(X_s, (\Omega^{n-m-1})^{\otimes 2}))$$

である。 $\Omega^{n-m-2} \cong \mathcal{O}(\lambda)$ である。今、 $d \leq 2\lambda$ である。

X の λ -ple embedding の relation は τ の kernel である。

生成される。ゆえに、 τ から X_s を recover できる。

Q.E.D.

ゆえに以下、ある特殊な場合について reduction

theorem を示す。 τ が τ の前 = V -ring 及び U 。 τ は a duality

について考察しよう。

§ 3 U -ring a duality theorem

$n, m \in \mathbb{N}$, $n > m+1$ とする。 $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

\mathbb{C} 上の T の元とする。 $L_j, f_i \in \mathbb{C}$.

$$L_j = \sum_{i=0}^m \lambda_j^i \mu_i, \quad f_i = \sum_{j=0}^n \lambda_j^i u_j$$

とする。 $\mathcal{S} = \mathbb{C}[\mu_0, \dots, \mu_m, u_0, \dots, u_m]$, $\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{S} / (L_j u_j, f_i)_{i=0, \dots, m, j=0, \dots, n}$ とする。 $(L_j u_j, f_i)_{i=0, \dots, m, j=0, \dots, n}$ は homogeneous ideal である。 $\tilde{\mathcal{R}}$ は bigraded with respect to (μ, u) である。

$$\tilde{\mathcal{R}} = \bigoplus_{a \geq 0, b \geq 0} \tilde{\mathcal{R}}(a, b) \quad (= \mathbb{C} \text{ 上の } (a, b) \text{ に関する } \tilde{\mathcal{R}} \text{ の } (a, b) \text{ 成分})$$

Definition-Proposition (Residue-map)

$\xi_i = \prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j) u_i$ とする。 $\tilde{\mathcal{V}} : \tilde{\mathcal{R}}(n-m-1, m) \rightarrow \mathbb{C}$

$$\tilde{\mathcal{V}} \left(\prod_{i=0}^n L_i^{a_i} \prod_{j=0}^m \xi_j^{b_j} \right) = \prod_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j)^{a_i b_j} \quad \left(\begin{array}{l} \sum a_i = n-m-1 \\ \sum b_i = m \end{array} \right)$$

で定義すると、well-defined であり、しかも $\tilde{\mathcal{V}}$ は isomorphism である。

証明 には λ_i ($i=0, \dots, n$) の対称式に関する関係式を用い、直接計算により、2 得らる。

±2. $\tilde{R}(n-m-1, 0)$ (resp $\tilde{R}(0, m)$) は, $(m+1)$ 変数, $(n-m-1)$ 次 (resp $(n-m)$ 変数, m 次) 多項式の空間と同型であり, 同じ次元である。

Theorem (duality)

自然に pairing $\tilde{R}(n-m-1, 0) \otimes \tilde{R}(0, m) \rightarrow \tilde{R}(n-m-1, m) \cong \mathbb{C}$ が, \tilde{R} の積から induce される。これは perfect.

Remark \mathbb{C}^2 を $sl(2, \mathbb{C})$ の表現と見ると, $S^n S^m(\mathbb{C}^2)$ と $S^m S^n(\mathbb{C}^2)$ は同型であるが, この間にある同型は, 上の duality は関数がある様に思われる。(実は著者は, この同型を使, 2 上の duality が示せられるか, $T = \alpha$ に, と思, ている。)

§4. Special complete intersection of Fermat hyper surface

$\lambda_0, \dots, \lambda_n$ を §3 と同様に, \mathbb{C} の相異なる元とする。

Special to. Fermat hyper surface の complete intersection X と。

$$X : \begin{cases} \lambda_0^d + \dots + \lambda_n^d = 0 \\ \lambda_0 \lambda_0^d + \dots + \lambda_n \lambda_n^d = 0 \\ \vdots \\ \lambda_0^m \lambda_0^d + \dots + \lambda_n^m \lambda_n^d = 0 \end{cases} \quad (\text{in } \mathbb{P}^n)$$

で定義する。 $\chi \in \mathcal{C}$ の性質がわかるといふ。 χ は \mathbb{C} 上の線形写像。 χ は \mathbb{C} 上の線形写像。 χ は \mathbb{C} 上の線形写像。

$$F_i = \sum_{j=0}^n \lambda_j^i x_j^d, \quad F(\mu, \chi) = \sum_{i,j} \lambda_j^i \mu_i x_j^d \quad \text{etc.}$$

\mathbb{C} 上で計算し $T = \text{ring } R$ で計算する。 χ は \mathbb{C} 上の線形写像。

$\mathbb{C}[\mu_0, \dots, \mu_m, x_0, \dots, x_n] / J$ であり J は F_i 及び χ 。

$L_j x_j^{d-1}$ ($L_j = \sum_{i=0}^m \lambda_j^i \mu_i$, $j=0, \dots, n$) で生成された ideal

である。以下、条件 $\#$ の $T = R(0, 2\lambda) \rightarrow \text{Hom}(R_{(n-m-1)(1,d)}, R_p)$

($p = (n-m-1, (n+m+1)d - 2(n+1))$) が injective であることを見る。

$$\# \quad d \leq 2\lambda \leq \min((d-1)m + (d-2), md)$$

$\mathbb{C}[\mu_0, \dots, \mu_m, x_0, \dots, x_n]$ 上に χ は x_i に 1 の d 乗根を χ する。 $G = (\mathbb{C}^*)^{n+1}$ の action が定義される。

χ の時、ideal J は G -stable である。 χ は \mathbb{C} 上の線形写像。 χ は \mathbb{C} 上の線形写像。 χ は \mathbb{C} 上の線形写像。

$R_{(a,b)} = \bigoplus_{\chi \in \hat{G}} R_{(a,b)}(\chi)$, $\chi \in \hat{G}$ 。 \hat{G} は G の character group, $R_{(a,b)}(\chi) = \{r \in R_{(a,b)} \mid g(r) = \chi(g)r \forall g \in G\}$

である。 $\chi_0 \in \hat{G} \cong (\mathbb{C}^*)^{n+1}$ と $\chi_0 = (-2, \dots, -2)$ で定義する。

$R_p \cong R_p(\chi_0) \cong \mathbb{C}(\chi_0)$ である。 χ は \mathbb{C} 上の線形写像。 χ は \mathbb{C} 上の線形写像。 χ は \mathbb{C} 上の線形写像。

$$R(0, 2\lambda)(\chi) \rightarrow \text{Hom}(R_{(n-m-1)(1,d)}(\chi^{-1}\chi_0), R_p(\chi_0))$$

が injective であることを見る。

$$\begin{array}{ccc}
 & \times (\text{is monomial}) & \\
 \tilde{R}(0, a) & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}(\tilde{R}(n-m-1, l), \tilde{R}(n-m-1, m)) \\
 \times (\text{is monomial}) \downarrow & & \downarrow \times (\text{is monomial}) \\
 \tilde{R}(0, m) & \xrightarrow[\cong]{} & \text{Hom}(\tilde{R}(n-m-1, 0), \tilde{R}(n-m-1, m))
 \end{array}$$

$$= \text{a 可換図式 84. } \tilde{R}(0, a) \rightarrow \text{Hom}(\tilde{R}(n-m-1, l), \tilde{R}(n-m-1, m))$$

(\neq injective \neq あり。 = U ?) Main theorem の $\frac{1}{2}$ 証明 3 行 20