

discrete valuation ring の上の group scheme の拡大について

東京電機大学工学部 諏訪紀幸

本稿では関口力氏との共同研究から discrete valuation ring の上の group scheme の拡大の一例について述べる。

参考文献

[1] 関口,Oort,諏訪 - On the deformation of Artin-Schreier to Kummer, to appear in Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.
[2] 関口,Oort - On the deformation of Witt groups to tori, Algebraic and topological theories to the memory of Dr. Miyata, Kinokuniya (1985) 283-298
[3] 関口 - On the deformation of Witt groups to tori II, Chuo Univ. Preprint series No. 1 , 1988, submitted to J. of Alg.
[4] 関口,諏訪 - A case of extensions of group schemes over a discrete valuation ring, Chuo Univ. Preprint series No. 5, 1988, submitted to Trans. Am. Math. Soc.

A を discrete valuation ring, Kを A の分数体、kを A の剰余体とする。$S = \mathrm{Spec}A$ のうえの smooth affine commutative S-group $\mathcal{G}^{(\lambda)}$を

$$\mathcal{G}^{(\lambda)} = \mathrm{Spec}A[X_0, 1/(\lambda X_0 + 1)]$$

1) 乗法

$$X_0 \mapsto \lambda X_0 \otimes X_0 + X_0 \otimes 1 + 1 \otimes X_0;$$

2) 単位元

$$X_0 \mapsto 0;$$

3) 逆元

$$X_0 \mapsto -X_0/(\lambda X_0 + 1)$$

で定義する。さらに S-homomorphism $\alpha^{(\lambda)} : \mathcal{G}^{(\lambda)} \longrightarrow \mathbf{G}_{m,S}$ を

$$T \mapsto \lambda X_0 + 1 : A[T, T^{-1}] \longrightarrow A[X_0, 1/(\lambda X_0 + 1)]$$

によって定義する。

このとき、$\alpha_K^{(\lambda)} : \mathcal{G}_K^{(\lambda)} \longrightarrow \mathbf{G}_{m,K}$ は同型。一方、$\mathcal{G}_k^{(\lambda)}$は $\mathbf{G}_{a,k}$に同型。これは上林達治氏と宮西正宜氏による $\mathbf{G}_m$-fibration から $\mathbf{G}_a$-fibration への変形の研究に際して現われている (On flat fibrations by the affine line. Illinois J. Math. 22, 1978)。さらに、generic fiber が乗法群 $\mathbf{G}_m$ に同型、closed fiber が加法群 $\mathbf{G}_a$に同型であるような Sの上の group scheme は $\mathcal{G}^{(\lambda)}$の形をしている (Waterhouse,Weisfeiler- One-dimensional affine group schemes, J. of Alg. 66, 1980; [1])。

今、kの標数が$p > 0$, Aが1のp乗根ζを含んでいると仮定する。$\lambda = \zeta - 1$, $\Psi(x) = (\lambda x + 1)/\lambda^p$ とすると S-group の exact sequence

$$0 \to (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})_S \to \mathcal{G}^{(\lambda)} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{G}^{(\lambda^p)} \to 0 \tag{1}$$

を得る。このとき、generic fiber は

$$1 \to \mu_p \to \mathbf{G}_m \xrightarrow{p} \mathbf{G}_m \to 1,$$

また、closed fiber は

$$0 \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to \mathbf{G}_a \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbf{G}_a \to 0$$

となる。すなわち、(1) は Kummer theory と Artin-Schreier theory の変形を与えている。このような変形は本質的にこれに限る ([1])。

さてこの議論をより一般化することは興味深いことであろうし、また意義のあることであろう。手始めに2次元の場合が問題になるが、それには generic fiber が $\mathbf{G}_m^2$、closed fiber が W_2であるような Sの上の group scheme がどれだけあるのかということをはっきりしておかなければならない。[2] での試みのあと、関口氏は [3] で $\mathcal{G}^{(\lambda)}$の $\mathcal{G}^{(\mu)}$による拡大が

$$\mathcal{E}^{(\lambda,\mu;F)} = \mathrm{Spec}A[X_0, X_1, 1/(\lambda X_0 + 1), 1/(\mu X_1 + F(X_0))] ,$$

ここで、群の演算は

1) 乗法

$$X_0 \mapsto \lambda X_0 \otimes X_0 + X_0 \otimes 1 + 1 \otimes X_0 ,$$

$$\begin{aligned} X_1 \quad \mapsto \quad & \mu X_1 \otimes X_1 + X_1 \otimes F(X_0) + F(X_0) \otimes X_1 \\ & + \frac{1}{\mu}[F(X_0) \otimes F(X_0) - F(\lambda X_0 \otimes X_0 + X_0 \otimes 1 + 1 \otimes X_0)] ; \end{aligned}$$

2) 単位元

$$X_0 \mapsto 0, \ X_1 \mapsto \frac{1}{\mu}[1 - F(0)] ;$$

3) 逆元

$$X_0 \mapsto -X_0/(\lambda X_0 + 1) ,$$

$$X_1 \mapsto \frac{1}{\mu}[1/(\mu X_1 + f(X_0)) - F(-X_0/(\lambda X_0 + 1))] .$$

で定義され、また、$F(T)$ は関数等式

$$F(T) \equiv 1 \bmod \mathfrak{m} \ ; \ F(X)F(Y) \equiv F(\lambda XY + X + Y) \bmod \mathfrak{m}^m$$

を満たす $A[T]$ の多項式、の形をしていることを示された。さらに、kの標数が 0 、あるいは kの標数が $p > 0$ でμが p を割るわるときに完全に決定された。これを足場に、[4] で上の関数等式を満たす多項式がすべて与えられた。

まず、$\mathcal{G}^{(\lambda)}$の $\mathcal{G}^{(\mu)}$による拡大が上の形で与えられることを [3] とは異なった方法で説明し、次に [4] の主結果の一つである 関数等式

$$F(T) \equiv 1 \bmod \mathfrak{m} \ ; \ F(X)F(Y) \equiv F(\lambda XY + X + Y) \bmod \mathfrak{m}^m$$

を満たす $A[T]$ の多項式 $F(T)$ について略述する。

以下、kの標数は $p > 0$ と仮定する。また、λ, μは $\mathfrak{m}$ の元$\neq 0$ とし、$m = v(\mu)$ とする。

1 . $\mathrm{Ext}^1_S(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathcal{G}^{(\mu)})$ の計算

G を Sの group scheme 、Hを G が作用する Sの上の commutative group scheme と する。G の Hによる拡大の同値類のなす群を $\mathrm{Ext}^1_S(G, H)$ で表わす。G が Sの上に affine のとき、$\mathrm{Ext}^*_S(G, H)$ と Hochschild cohomology $H^*_0(G, H)$ を結び付ける spectral sequence

$$E_2^{ij} = H_0^{i+1}(G, \check{\mathcal{H}}^j(H)) \Rightarrow \mathrm{Ext}_S^{i+j}(G, H)$$

が存在する。ここで、$\check{\mathcal{H}}^j(H)$ は $X \mapsto H^j(X, H)$ によって定義される Sの上の fppf-presheaf 。特に、最初の項を見ると、exact sequence

$$0 \to H_0^2(G, H) \to \mathrm{Ext}^1_S(G, H) \to H_0^1(G, \check{\mathcal{H}}^1(H)) \to H_0^3(G, H)$$

を得る 。 今、$G = \mathcal{G}^{(\lambda)}$、$H = \mathcal{G}^{(\mu)}$とすると、$\mathcal{G}^{(\lambda)}$の $\mathcal{G}^{(\mu)}$の上への作用は自明なものに限り、exact sequence

$$\begin{aligned} 0 \to H_0^2(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathcal{G}^{(\mu)}) \to \mathrm{Ext}^1_S(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathcal{G}^{(\mu)}) \to \\ H_0^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \check{\mathcal{H}}^1(\mathcal{G}^{(\mu)})) \to H_0^3(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathcal{G}^{(\mu)}) \end{aligned}$$

を得る。ここで、

補題 1 . $i > 1$ なら $H_0^i(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathcal{G}^{(\mu)}) = 0$。したがって、$\mathrm{Ext}^1_S(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathcal{G}^{(\mu)})$ は $H_0^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \check{\mathcal{H}}^1(\mathcal{G}^{(\mu)}))$ に同型。

補題1は $H_0^i(\mathbf{G}_{m,S},\mathbf{G}_{m,S})$ あるいは $H_0^i(\mathbf{G}_{a,S},\mathbf{G}_{m,S})$ の計算に帰着して証明する。

補題1から、$\mathcal{G}^{(\lambda)}$ の $\mathcal{G}^{(\mu)}$ の上への作用は自明なものに限るので、$H_0^1(\mathcal{G}^{(\lambda)},\tilde{\mathcal{H}}^1(\mathcal{G}^{(\mu)}))$ は $H^1(\mathcal{G}^{(\lambda)},\mathcal{G}^{(\mu)})$ の primitive element のなす部分群に同型であることが従う。次に、

補題2. $H^1(\mathcal{G}^{(\lambda)},\mathcal{G}^{(\mu)})$ は $1+\sum_{i>0}c_iT^i \bmod m^m$ 、c_i は m の元、のなす乗法群の $1+\lambda T$ の生成する部分群による剰余群に同型。

補題2は、S の上のétale sheaf の exact sequence

$$0\to\mathcal{G}^{(\lambda)}\to\mathbf{G}_{m,S}\to i_*\mathbf{G}_{m,S_m}\to 0\ ,$$

$i: S_m=\mathrm{Spec}(A/\boldsymbol{m}^m)\to S=\mathrm{Spec}(A)$ は自然な埋め込み、を用いて示される。

補題2から、$H^1(\mathcal{G}^{(\lambda)},\mathcal{G}^{(\mu)})$ の primitive element は 関数等式

$$F(T)\equiv 1 \bmod \boldsymbol{m}\ ;\ F(X)F(Y)\equiv F(\lambda XY+X+Y) \bmod \boldsymbol{m}^m$$

を満たす $A[T]$ の多項式に他ならないことが分かる。
$F(T)$ に対応する S-group は乗法が

$$X_0\mapsto \lambda X_0\otimes X_0+X_0\otimes 1+1\otimes X_0,$$

$$\begin{aligned}X_1 \quad\mapsto\quad & \mu X_1\otimes X_1+X_1\otimes F(X_0)+F(X_0)\otimes X_1\\ &+\frac{1}{\mu}[F(X_0)\otimes F(X_0)-F(\lambda X_0\otimes X_0+X_0\otimes 1+1\otimes X_0)];\end{aligned}$$

によって定義される S-group

$$\mathcal{E}^{(\lambda,\mu;F)}=\mathrm{Spec}A[X_0,X_1,1/(\lambda X_0+1),1/(\mu X_1+F(X_0))]$$

によって与えられる。また、closed fiber $\mathcal{E}_k^{(\lambda,\mu;F)}$ は 2-cocycle

$$g(X,Y)=\frac{1}{\mu}[F(X)F(Y)-F(\lambda XY+X+Y)] \bmod \boldsymbol{m}$$

によって定義される $\mathbf{G}_{a,k}$ の $\mathbf{G}_{a,k}$ による拡大。

2. $F(T)$ の決定

補題3. $F(T)=1+\sum_{i>0}c_iT^i$ を $A[T]$ の多項式とする。このとき、次の条件は同値。

(a) $F(T)$ は関数等式

$$F(X)F(Y)\equiv F(\lambda XY+X+Y) \bmod \boldsymbol{m}^m$$

を満たす。
(b)$\mathrm{ord}_p j = r, j \neq p^r$ のとき、

$$c_{p^r} c_{j-p^r} \equiv \sum_{i=0}^{p^r} \binom{j-p^r+i}{j-2p^r+2i} \binom{j-2p^r+2i}{i} c_{j-p^r+i} \lambda^{p^r-i} \bmod \boldsymbol{m}^m$$

が成立し、$j = p^r > 1$ のとき、

$$c_{p^{r-1}} c_{j-p^{r-1}} \equiv \sum_{i=0}^{p^{r-1}} \binom{j-p^{r-1}+i}{j-2p^{r-1}+2i} \binom{j-2p^{r-1}+2i}{i} c_{j-p^{r-1}+i} \lambda^{p^{r-1}-1} \bmod \boldsymbol{m}^m$$

が成立する。

補題3は、次の Lazard の comparison lemma を用いて示される：

$$g(X,Y) = g(Y,X)\ ;\ g(X+Y,Z) + g(X,Y) = g(X,Y+Z) + g(Y,Z)$$

を満たす k の上の n 次同次多項式は n が p 巾のとき、

$$g(X,Y) = \frac{c}{p}\{X^n + Y^n - (X+Y)^n\},$$

n が p 巾でないとき、

$$g(X,Y) = c\{X^n + Y^n - (X+Y)^n\},$$

c は k の元、の形のものに限る。
$A[T]$ の多項式 $F(\lambda, a_0, a_1, \cdots, a_\ell; T) = 1 + \sum_{i>0} c_i T^i$ を初期条件

$$c_1 = a_0, c_p = a_1, \cdots, c_{p^\ell} = a_\ell$$

および、漸化式

$$c_j = \frac{1}{\binom{j}{p^r}} \left\{ c_{p^r} c_{j-p^r} - \sum_{i=0}^{p^r-1} \binom{j-p^r+i}{j-2p^r+2i} \binom{j-2p^r+2i}{i} c_{j-p^r+i} \lambda^{p^r-i} \right\}$$

によって定義する。
定義からただちに次のことが分かる。

系4. $F(T) = F(\lambda, a_0, a_1, \cdots, a_\ell; T) = 1 + \sum_{i>0} c_i T^i$, c_i は m の元、とする。
(a) $F(T)$ は関数等式

$$F(X)F(Y) \equiv F(\lambda XY + X + Y) \bmod \boldsymbol{m}^m$$

を満たす。
(b) $j = p^r > 1$ のとき、とき、

$$c_{p^{r-1}} c_{j-p^{r-1}} \equiv \sum_{i=0}^{p^{r-1}} \binom{j - p^{r-1} + i}{j - 2p^{r-1} + 2i} \binom{j - 2p^{r-1} + 2i}{i} c_{j-p^{r-1}+i} \lambda^{p^{r-i}-1} \bmod m^m$$

が成立する。

補題5. $a_0, a_1, \cdots, a_\ell \in m$ で $b_0, b_1, \cdots, b_\ell \in \boldsymbol{m}^s$ なら

$$\begin{aligned} &F(\lambda, a_0 + b_0, a_1 + b_1, \cdots, a_\ell + b_\ell; T) \\ &\quad \equiv F(\lambda, a_0, a_1, \cdots, a_\ell; T) + \sum_{0 \le i \le \ell} b_i T^{p^i} \bmod \boldsymbol{m}^{s+1}. \end{aligned}$$

が成立する。

定理6. $F(T)$ を関数等式

$$F(T) \equiv 1 \bmod \boldsymbol{m} \ , \ F(X)F(Y) \equiv F(\lambda XY + X + Y) \bmod \boldsymbol{m}^m$$

を満たす $A[T]$ の多項式とする。このとき、m の元 $a_0, a_1, \cdots, a_\ell$ が存在して

$$F(T) \equiv F(\lambda, a_0, a_1, \cdots, a_\ell; T) \bmod \boldsymbol{m}^m.$$

となる。
定理6は、$\mathbf{G}_{a,k}$ の自己準同型は $\sum_{i \ge 0} c_i T^{p^i}$ の形の多項式で与えられる事実と補題5を用いて、$F(T)$ を $F(\lambda, a_0, a_1, \cdots, a_\ell; T)$ の形の多項式で順次近似していくことによって証明される。

$\mu \mid p$, $\mu \mid \lambda$ のとき、

$$F(T) = F(\lambda, a_0, a_1, \cdots, a_\ell; T) \equiv \prod_{r=0}^{\ell} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{i!} (a_r T^{p^r})^i \bmod \boldsymbol{m}^m$$

が成立する。さらに、$F(T) = F(\lambda, a_0, a_1, \cdots, a_\ell; T)$ が関数等式

$$F(T) \equiv 1 \bmod \boldsymbol{m} \ ; \ F(X)F(Y) \equiv F(\lambda XY + X + Y) \bmod \boldsymbol{m}^m$$

を満たすためには、$a_r^p \equiv 0 \bmod \boldsymbol{m}^m$ が成立することが必要十分。
$F(T) = F(\lambda, a_0, a_1, \cdots, a_\ell; T)$ を $(a_0, a_1, \cdots, a_\ell, 0, \cdots)$ に対応させることによって、同型

$$\mathrm{Ext}^1_S(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathcal{G}^{(\mu)}) \xrightarrow{\sim} (\boldsymbol{m}^s/\boldsymbol{m}^m)^{(\mathrm{N})} \ ,$$

$$s = \begin{cases} [m/p] + 1 & (\mathbf{p},\mathbf{m}) = \mathbf{1} \\ m/p & p \mid m \end{cases}$$

を得る。

またこのとき、closed fiber$\mathcal{E}_k^{(\lambda,\mu;F)}$は 2-cocycle

$$\sum_{i>0} \xi_i \frac{X^{p^i} + Y^{p^i} - (X+Y)^{p^i}}{p}\ ,\ \xi_i = \frac{1}{\mu} a_{i-1}^p \bmod \boldsymbol{m}$$

によって定義される $\mathbf{G}_{a,k}$の $\mathbf{G}_{a,k}$による拡大。したがって、自然な写像

$$\mathrm{Ext}_S^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathcal{G}^{(\mu)}) \to \mathrm{Ext}_k^1(\mathbf{G}_{a,k}, \mathbf{G}_{a,k})$$

は $(p,m) = 1$ なら零射、また、$p \mid m$ で kが完全なら全射であることが分かる。