代数幾何学シンポジウム記録
1988年度　pp.199-210

代数曲面の3次被覆

高知大、理　徳永浩雄

§0. Introduction.

与えられたvarietyの上にdouble coverを構成して，新しいvarietyを作るという方法は，一般型代数曲面などを構成したりする場合には，非常にpopularな方法である．このような場合にdouble coverが有用な理由とは，

① coveringが全てGalois

② 構成法が容易で，色々な不変量などの計算が楽に出来る

ということが考える．ところが，triple coverを用いようとすると，話は一気にややこしくなる．その大きな理由は，coveringが一般にnon-Galoisであるということである．さて，triple coveringを考える上で，方法は2通りある．それは，

① rank 2 vector bundleを用いる

② 3次方程式を解くという観点から考える

である．①は，double coverとline bundleの関係のアナロジーをtriple coveringとrank 2 vector bundleの間に見出して

それらを用いてTriple coverの研究を行うもので，この方面では，R. Miranda，藤田氏の結果がある．([1]，[2]) ここでは，②の方向に沿ってtriple coveringを考えてゆきたいと思う．

§1 Triple coveringsと3次方程式

以下 varietyは全て$\mathbb{C}$上とする．

体K上の3次方程式

$$x^3 + ax + b = 0 \quad , a, b \in K, \quad \text{------} \quad (1,1)$$

Kは1のべき根を含む

に関するK上の最小分解体LのK上のGalois群が$\mathfrak{S}_3$の時，LとK上の二次拡大体$K(\sqrt{R})$が存在して，

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & L \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
K(\theta) \arrow[dr, dash] & & K(\sqrt{R}) \arrow[dl, dash] \\
 & K &
\end{tikzcd}$$

θ : (1.1) の1つの解 $\qquad R = \dfrac{a^3}{27} + \dfrac{b^2}{4}$

をみたす．

さて，X，Yはnormal algebraic variety，$p : X \longrightarrow Y$ はY上のfinite triple coveringとする．X，Yの有理函数体をそれぞれ，$\mathbb{C}(X)$，$\mathbb{C}(Y)$とすると，これらの間には，

$$\mathbb{C}(X) = \mathbb{C}(Y)(\theta)$$

ただし、θ はある3次方程式

$$\xi^3 + 3a\xi + 2b = 0 \qquad \text{-------} \quad (1.2)$$

$$a, b \in \mathbb{C}(Y)$$

の根とする。

ρ が cyclic でないとき、(1.2)の $\mathbb{C}(Y)$上 の最小分解体の Galois群は $\mathfrak{S}_3$ であるから、上述のように $\mathbb{C}(X)$, $\mathbb{C}(Y)$に対応して、unique に、

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \widehat{\mathbb{C}(X)} \arrow[dl, dash, "\text{2次拡大}"'] \arrow[dr, dash, "\text{3次巡回拡大}"] & \\
\mathbb{C}(X) \arrow[dr, dash] & & \mathbb{C}(Y)(\sqrt{R}) \arrow[dl, dash, "\text{2次拡大}"] \\
 & \mathbb{C}(Y) &
\end{tikzcd}$$

をみたす体が存在する。そこで、Y の $\widehat{\mathbb{C}(X)}$-normalization を $\hat{X}$、$\mathbb{C}(Y)(\sqrt{R})$-normalization を $D(X/Y)$ と表わすことにすると、X, Y, $\hat{X}$, $D(X/Y)$ の間には次のような関係が存在する。

$$\begin{tikzcd}
 & \hat{X} \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dd, "\rho_1"] \arrow[dr, "\beta_2"] & \\
X \arrow[dr, "\rho"'] & & D(X/Y) \arrow[dl, "\beta_1"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

$\rho_1 : \hat{X} \longrightarrow Y$ finite Galois covering, Galois群 $\cong \mathfrak{S}_3$

$\beta_1 : D(X/Y) \longrightarrow Y$ finite double covering

$\beta_2 : \hat{X} \longrightarrow D(X/Y)$ finite cyclic triple covering

$$\alpha : \hat{X} \longrightarrow X \quad \text{finite double covering}$$

従って，p の構造を調べるには，p_1, p_2, α と $\hat{X}$ 上の $\mathfrak{S}_3$ の作用をみればよいことがわかる．

以下，Y : smooth と仮定する．

branch locus の purity により，p と p_1 の branch locus は共に，Y 上の divisor になるがこれらについて，次の命題が成立する．

<u>Proposition 1.3.</u> $\Delta(X/Y)$: p の branch locus, $\Delta(\hat{X}/Y)$: p_1 の branch locus とすると，

$$\Delta(X/Y) = \Delta(\hat{X}/Y)$$

(= は set theoretic にという意味)

証) $\Delta(X/Y) \subset \Delta(\hat{X}/Y)$ は明らか．$\Delta(X/Y) \subsetneqq \Delta(\hat{X}/Y)$ とする．$x \in \Delta(\hat{X}/Y) \setminus \Delta(X/Y)$ とすると，p は x の近傍では étale．従って，$p^{-1}(x) = \{x_1, x_2, x_3\}$ である．一方，$x \in \Delta(\hat{X}/Y)$ と，p_1 が finite Galois covering であることを考えると $\alpha^{-1}(x_i) = y_i$ (一点) である．$p_1 : \hat{X} \longrightarrow Y$ の Galois 群は $\mathfrak{S}_3$ ゆえ，3点 $\{y_1, y_2, y_3\}$ に $\mathfrak{S}_3$ が作用するが，上記の事実は，各点 y_i を fix する，位数 2 の元が存在することを示す．これより $\mathfrak{S}_3$ に order 2 の normal subgroup が存在することになるが，これは矛盾である．

Q. E. D.

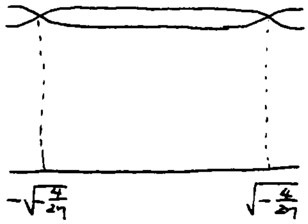
ここで簡単な例を挙げる

<u>Example 1.4.1</u> $p : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ $\mathbb{P}^1$上の triple covering, Cは$\mathbb{P}^1$の $\mathbb{C}(\mathbb{P}^1)(\theta)$-normalization とする. (但し, θは3次方程式, $X^3+X+t=0$ の解. (tは$\mathbb{P}^1$の inhomogeneous coordinate) この場合,

$$R = \frac{1}{27} + \frac{t^2}{4}$$

であり, $\mathbb{C}(D(C/\mathbb{P}^1)) = \mathbb{C}(\mathbb{P}^1)(\sqrt{R})$ であるから, $\beta_1 : D(C/\mathbb{P}^1) \longrightarrow \mathbb{P}^1$ は以下のようになる:

$$\begin{array}{c} D(C/\mathbb{P}^1) \\ \big\downarrow \beta_1 \\ \mathbb{P}^1 \end{array}$$



従って, $D(C/\mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{P}^1$ であり, $D(C/\mathbb{P}^1)$の適当な inhomogeneous coordinate を z とすれば, β_1は,

$$\begin{array}{rccc} \beta_1 : & D(C/\mathbb{P}^1) & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ & \Psi & & \Psi \\ & z & \longmapsto & -\dfrac{2\sqrt{-1}}{3\sqrt{3}}\,\dfrac{z^2+1}{z^2-1} \quad (=t) \end{array}$$

と表わせる. さらに, 上記の座標を用いて, $\sqrt{\beta_1^* R}$, $\beta_1^* t$ を表わせば,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\beta_1^* R} = \dfrac{2\sqrt{-1}}{3\sqrt{3}}\,\dfrac{z}{z^2-1} \\ \beta_1^* t = -\dfrac{2\sqrt{-1}}{3\sqrt{3}}\,\dfrac{z^2+1}{z^2-1} \end{array} \right.$$

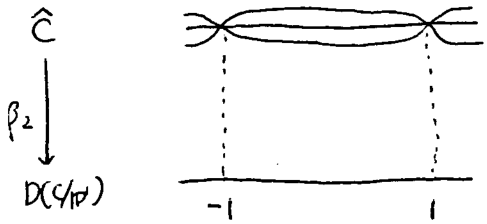
となる. 従って

$$-\frac{1}{2}\beta_1^* t + \sqrt{\beta_1^* R} = \frac{\sqrt{-1}}{3\sqrt{3}}\,\frac{z+1}{z-1}$$

を得る．ゆえに，

$$\begin{aligned}\mathbb{C}(\hat{C}) &= \mathbb{C}(D(C/\mathbb{P}^1))\left(\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}\beta_1^* t + \sqrt{\beta_1^* R}}\right)\\ &= \mathbb{C}(D(C/\mathbb{P}^1))\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{-1}}{3\sqrt{3}}\,\frac{z+1}{z-1}}\right)\end{aligned}$$

これから，$\beta_2 : \hat{C} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ は以下のようになる．



ゆえに，$\hat{C} \cong \mathbb{P}^1$ であって，$\hat{C}$ の適当な inhomogeneous coordinate を w とすれば，

$$\begin{array}{cccl} \beta_2 : & \hat{C} & \longrightarrow & D(C/\mathbb{P}^1) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ & w & \longmapsto & -\dfrac{w^3+1}{w^3-1} \ (= z) \end{array}$$

と表わせる．

次に，$Gal(\mathbb{C}(\hat{C})/\mathbb{C}(\mathbb{P}^1))$ の action を w を用いて表す．$Gal(\mathbb{C}(\hat{C})/\mathbb{C}(\mathbb{P}^1)) \cong \mathfrak{S}_3$ であるから，$\mathfrak{S}_3$ の order 2 の元と 3 元について調べる．

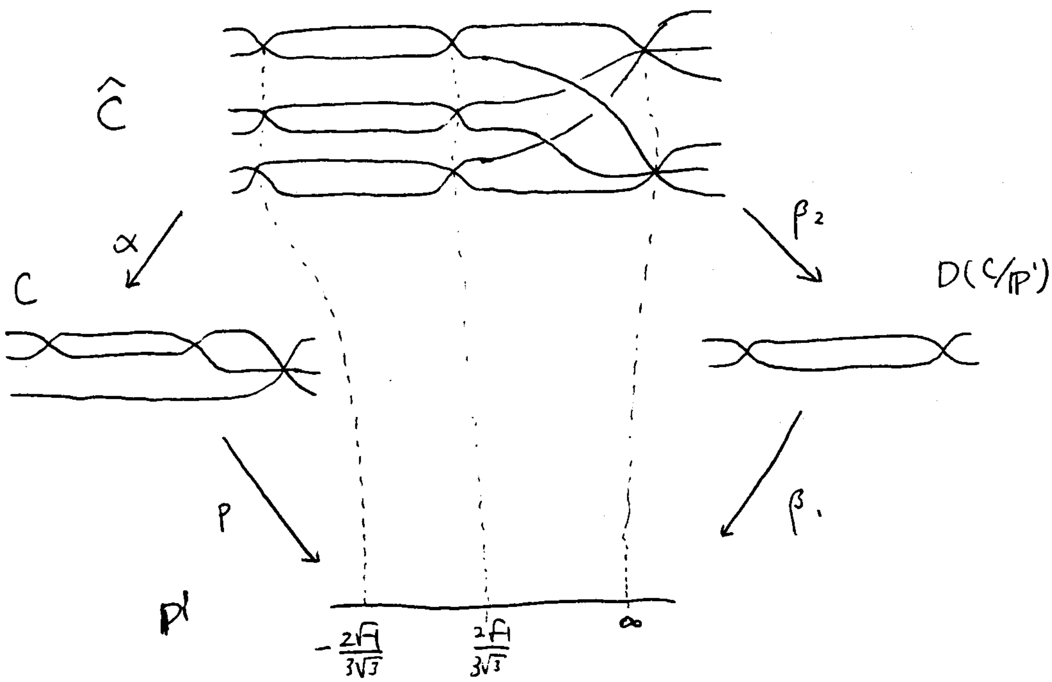
(i) order 2 の元：

$$\sigma : \quad w \longmapsto \frac{1}{w}$$

(ii) order 3 の元

$$\tau : \quad w \longmapsto \varepsilon w \qquad \varepsilon = \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}\right)$$

となる．以上のことを図で表わすと次のようになる．



§2. totally ramified triple covering.

$p: X \longrightarrow Y$ は smooth variety Y 上の finite triple covering とする.

<u>Definition 2.1.</u> p が totally ramified とは, $\forall x \in \Delta(X/Y)$ に対し, $p^{-1}(x) = \{\text{one point}\}$ となっている Triple covering のことである.

<u>Proposition 2.2.</u> $p: X \longrightarrow Y$ は smooth variety Y 上の totally ramified triple covering とする. 次の(i), (ii)が成立していると仮定する.

(i) X は smooth

(ii) Y は simply connected.

このとき，p は cyclic triple covering であり，p の branch locus $\Delta(X/Y)$ は smooth となる．

証）p : not cyclic とする．このとき，§1 で定義した $\hat{X}$，$D(X/Y)$ が存在して，

$$
\begin{tikzcd}
 & \hat{X} \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "\rho_1"] \arrow[dr, "\beta_2"] & \\
X \arrow[r, "p"'] & Y & D(X/Y) \arrow[l, "\beta_1"]
\end{tikzcd}
$$

は可換となる．$\mathrm{Gal}(\mathbb{C}(\hat{X})/\mathbb{C}(Y)) \cong \mathfrak{S}_3$ であることと，Proposition 1.3. より，α は étale となる．これから，β_1 が étale になることが示されるが，これは仮定に反する．又 $\Delta(X/Y)$ が smooth であることは，cyclic cover の一般論より従う

Q.E.D.

Corollary 2.3. $p : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ は triple covering．p の branch point を $g_1, \dots, g_r$ と表す．$p^{-1}(g_i) =$ one point $(i = 1, \dots, r)$ が成立していれば，p は cyclic である．

§3 代数曲面の triple covering の構成.

この§では, 代数曲面の triple covering の具体的な構成法について述べる.

Σ は non-singular な algebraic surface とする. Σ 上の smooth divisor $A_0, A_\infty, B_0, B_\infty$ で以下の条件をみたすものを考える.

(i) $A_0 \sim A_\infty$, $B_0 \sim B_\infty$ (linear equivalent)

(ii) divisor $A_0+A_\infty+B_0+B_\infty$ は normal crossing divisor.

(iii) $a_0, a_\infty, b_0, b_\infty$ はそれぞれ $A_0, A_\infty, B_0, B_\infty$ の defining equation とする. このとき

$$a_0^3 b_\infty^2 + a_\infty^3 b_0^2 = 0$$

で定義される divisor は reduced. かつ,

$$a_\infty(a_0^3 b_\infty^2 + a_\infty^3 b_0^2) = 0$$

で定義される divisor は, 高々 $A_0 \cap A_\infty$, $B_0 \cap B_\infty$, $A_0 \cap B_0$, $A_\infty \cap B_\infty$ でしか特異点をもたない.

上記 (i) ~ (iii) を満たす divisor $A_0, A_\infty, B_0, B_\infty$ に対し, $\mathbb{C}(\Sigma)$ 上の 3 次方程式

$$\xi^3 + 3a\xi + 2b = 0\ , \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3.1)$$

$$a, b \in \mathbb{C}(\Sigma), \quad (a) = A_0 - A_\infty, \quad (b) = B_0 - B_\infty$$

を考える. (3.1) が $\mathbb{C}(\Sigma)$ 上 既約のとき, (3.1) の解の 1 つを Θ

とし，Σの $\mathbb{C}(\Sigma)(\theta)$-normalizationを S' とすれば，S' はΣ上のtriple coveringである．この S' のsingularitiesは以下の通り．

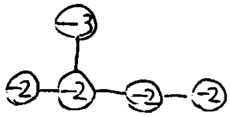
<u>Theorem 3.1.</u> S' のsingularitiesは以下の通り．

(1) $A_0 \cap A_\infty$ 及び $B_0 \cap B_\infty$ 上の点．

rational triple pointで，そのminimal resolutionのdual graphは，

(2) $A_\infty \cap B_\infty$ 上の点

rational triple pointで，そのminimal resolutionのdual graphは



証明はパラメーター付の3次方程式をCardanoの公式に沿って解いてみることにより得られる．

上記の定理を用いて，non-Galois triple coveringのsmooth modelの c_1^2，c_2 等がある程度計算可能となる．その例として，次のPropositionが成立する．

<u>Proposition 3.2.</u> Σ_n は degree n の Hirzebruch曲面とし S_∞ は Σ_n の positive section とする。b は $\mathbb{C}(\Sigma_n)$ の元で、$(b) = B_0 - B_\infty$ としたとき、$B_0, B_\infty \in |2S_\infty|$ かつ、先の条件(i)(ii)(iii)をみたすとする。θ は3次方程式

$$\zeta^3 + 3\zeta + 2b = 0$$

の解の1つとし、S' は Σ_n の $\mathbb{C}(\Sigma_n)(\theta)$ - normalization とする。この時 S' の smooth model S の numerical invariants は、

$$c_1^2(S) = 4n-8$$
$$c_2(S) = 20n-4$$
$$p_g(S) = 2n-2$$

となる。さらに S は minimal となる。

証明は3つの部分に分かれる。

① c_1^2, c_2 の計算

② $q(S)=0$ の証明

③ S は minimal surface

である。詳しくは 徳永[4] を参照されたい。

[追記] Theorem 3.1. の(ii)の場合が rational triple point であることは、講演の後 泊 昌孝氏の指摘によるものです。この場をかりて感謝の意を表します。

References:

[1] T. Fujita: Triple covers by smooth manifolds, J. Fac. Sci. of The Univ. of Tokyo, Vol. 35, 169–175 (1988)

[2] R. Miranda: Triple covers in algebraic geometry, Amer. J. Math. 107 (1985), 1123–1158

[3] H. Tokunaga: Triple coverings of algebraic surfaces according to the Cardano formula, to appear in J. Math. of Kyoto Univ.

[4] H. Tokunaga: On the construction of triple coverings of certain type of algebraic surfaces and its applications, preprint.