代数幾何学シンポジウム記録
1988年度 pp.153-172

Classification of Nonrigid Family of K3 surfaces

北大理(教養) 齋藤 政彦

§0. 問題と動機: $\mathcal{X}$, Sを$\mathbb{C}$上定義された連結非特異準射影的多様体とする。射影的非特異な射$f: \mathcal{X} \longrightarrow S$のすべてのファイバーが連結の時, $f: \mathcal{X} \to S$をファイバー空間と言う。以下, $\mathcal{X}$上f-relative nef & bigな直線束$\mathcal{L}$を同時に考える事にする。複素構造や正則写像の変形理論におけるRigidityは興味ある問題である。特にファイバー空間の変形理論ではファイバーが曲線の時に, Arakelov が, 主偏極アーベル多様体の時はFaltingsがRigidity theoremを示し, 関数体$\mathbb{C}(S)$上の有限性定理を導いている。我々は, FaltingsのRigidity theoremを一般のVHS (Variation of Hodge structure) に拡張したC. Petersの方法を足場に, 代数的なK3曲面のファイバー空間で, Nonrigidなものを, generic fiberの超越的サイクルのなすホッジ構造の準同形環の言葉で分類する。K3曲面に対するTorelli型定理(全単射性)より, ホッジ構造の言葉と, $\mathbb{Z}$ latticeの埋め込みの問題に帰着する

が，$\mathbb{Z}$-latticeの埋め込みの問題は別にゆずるものとし，ホッジ構造の言葉で記述される部分のみを記す事にする。

（この仕事は，Johns Hopkins大のSteven Zucker氏との共同研究に基づく事を述べておく。）

まず，Rigidityの意味を明確にしておく。（別の意味にも使われるので）

<u>定義0.1</u>：　（T,o）を非特異解析空間の芽とする。$f: \mathcal{X} \to S$ のT上の<u>（Sを固定する）変形</u>とは，次の可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \hookrightarrow & \tilde{\mathcal{X}} \\ f \downarrow & & \downarrow \tilde{f} \\ S \times o & \hookrightarrow & S \times T \end{array}$$

で，$\tilde{\mathcal{X}}$ に $\tilde{f}$-rel. ample (or nef & big) l.b. $\tilde{\mathcal{L}}$ で $\tilde{\mathcal{L}}|_{\mathcal{X}} = \mathcal{L}$ となるものが存在するものを言う。ファイバー空間 $f: \mathcal{X} \to S$ が <u>Rigid</u> とは，非自明な変形を持たない時に言う。

この定義に従って，次の基本的な問題を述べておく。

<u>問題（R）：</u> ファイバー空間 $f: \mathcal{X} \to S$ がRigidになる良い十分条件を与えよ。

ファイバーを個々の対象（例えば，代数曲線，アーベル多様体，K3曲面）に限った時には，次の問題は上の問題(R)と表裏一体である。

<u>問題（NR）：</u> Nonrigid な ファイバー空間の例をつくり，分類せよ．

ファイバー空間 $f: \mathfrak{X} \to S$ が <u>isotrivial</u> とは，ある étale covering $\pi: S' \to S$ があり，$f': \mathfrak{X} \times_S S' \to S'$ が直積 $X \times S' \to S'$ と双有理的になる時に言う。Arakelov は［1］において次の定理を示した。

<u>定理（［1］）．</u> $f: \mathfrak{X} \to S$ を isotrivial でない種数2以上の代数曲線のファイバー空間とする時，f は Rigid である。

注）Arakelov は $S = \bar{S} - \{pts\}$，$\bar{S}$ は代数曲線の場合に示したが，一般の場合はそれから容易に導かれる。

この定理の拡張として，Faltings はアーベル多様体のファイバー空間の場合に，Rigidity の良い十分条件を与えた。（これについては後述する。）

<u>有界性定理：</u> $\mathcal{M}_g$，$\mathcal{A}_n$，$\mathcal{K}_{2k}$ で種数 g の曲線，n 次元の主偏極アーベル多様体，次数 $2k$ の nef & big l.b. をもつ，K3 曲面のモヂュライ空間とする。これらは自然なスキームの構造をもつが，良く知られているように有界，すなわち，準射影的（quasi projective）多様体である。モヂュライ

空間の幾何的，関数論的性質は最近も活発に研究されている。（例えば，小平次元やアルバーネーゼ次元等）

次のような集合を考える。（ S は前の通り。）

① $\mathcal{C}_g(S) = \{ f : \mathcal{X} \to S$ ，ファイバーは genus g の曲線 $\}/_{\text{iso.}}$

② $A(n, S) = \{$ 〃 ，ファイバーは n 次元 p.p. A.v $\}/\text{iso.}$

③ $\mathcal{K}(2k, S) = \{$ 〃 ，ファイバーは 次数 $2k$ の K3 曲面 $\}/_{\text{iso.}}$

①，②，③はそれぞれ正則写像の空間 $Hol(S, \mathcal{M}_g)$，$Hol(S, A_n)$，$Hol(S, K_{2k})$ のある部分空間となる。

Arakelov は[1]において $\mathcal{C}_g(S)$ の有界性を示した。Rigidity Th. と合せると次の有限性定理を得る。

<u>有限性定理（Arakelov [1]）</u>：S 上の nonisotrivial な種数 2 以上のファイバー空間は有限個。

（関数体 $k(S)$ 上の Šafarevich 予想）

Faltings は，$A(n, S)$ の有界性を示した。（[3]）よって Rigidity Th の成立するものについては，有限性定理が成立する。Deligne の Th. Hodge II の一定理と合せると，ファイバーが simple p.p. a.v で次元が 3 以下かつ nonisotrivial なものについては有限性定理が言える。

<u>野口の有界性定理</u>：$\mathcal{D}$ を有界対称領域，Γ を torsion free な $Aut(\mathcal{D})$ の discrete 群で $Vol(\mathcal{D}/\Gamma) < +\infty$ なるものとする。$Hol(S, \mathcal{D}/\Gamma)$（正則写像のモヂュライ空間）

の性質は，砂田氏や野口氏により調べられ，美しい結果が得られている。（[5] の ref. を参照。）次の定理は，その中でも決定的な結果であろう。

<u>定理（野口 [5]）:</u>　$\mathfrak{D}$, Γ, S を上の通り．

(i)　$Hol(S, \mathfrak{D}/\Gamma)$ は非特異かつ準射影的．

(ii)　Z を $Hol(S, \mathfrak{D}/\Gamma)$ の連結成分，$x_0 \in S$ とする。

Evaluation map　$\phi : Z \ni f \longmapsto f(x_0) \in \mathfrak{D}/\Gamma$ は totally geodisc な complex submanifold 上への正則埋め込みであり，Z は（有界対称領域）$/\Gamma_1$　（Γ_1 : discrete 群）となる。

（Theorem (4.7)，[5]）

ここで，Γ は torsion free な discrete 群であるが，適当に議論を修正すると次の系を得る．（有界性定理）

<u>系（Remark (2.19), (4.11) [5]）:</u>

$$\mathcal{C}_g(S),\ A(n, S),\ K(2k, S) \text{ は有界}.$$

すなわち，野口氏の定理は $\mathcal{C}_g(S)$, $A(n, S)$ については別証を与え得る一般化された定理である。野口氏の定理は $\mathfrak{D}/\Gamma$ が佐武コンパクト化 $\overline{\mathfrak{D}/\Gamma}$ の中に双曲的埋入されているという（小林計量の意味で）事実を用いている。この結果から，K3 曲面の有限性定理も Rigidity の成立するものについて成立する事がわかる。

§1. VHSのRigidityとその準同形環

Faltings [3] は前述したように，アーベル多様体のファイバー空間 $f: \mathfrak{X} \to S$ の Rigidity の判定条件を与えた。それは $R^1f_*\mathbb{Z}$ 上の <u>VHS</u> (<u>Variation of Hodge Structure</u>) の準同形環の言葉でなされる。アーベル多様体のモヂュライは，$R^1f_*\mathbb{Z}$ 上の各ファイバーに入る Hodge 構造そのものである（自明なトレリの定理）から，VHS の Rigidity $\Longleftrightarrow$ アーベル多様体の族の Rigidity である。C. Peters は Faltings の方法が，一般のVHSにも拡張できる事を示した。（トレリ型の定理が成立するものについては幾何的に応用できるのは言うまでもない。）このFaltings - C. Peters の方法を説明するために記号を準備する。

(I) S： 連結非特異準射影多様体 $/\mathbb{C}$

(II) $(V_{\mathbb{Z}}, F^p, Q)$ ： S 上の VHS of weight k

$\underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ (i) $V_{\mathbb{Z}}$ ： S 上の finite free $\mathbb{Z}$-module の local system

(ii) Q ： $V_{\mathbb{Z}}$ 上の flat な非退化 $(-1)^k$ 対称 $\mathbb{Z}$ 値二次形式.

(iii) $V_{\mathbb{C}}$ の decreasing filtration $\{F^p\}$ F^p : hol.v.b.

$$V_{\mathbb{C}} = F^0 \supset F^1 \supset \cdots \supset F^p \supset \cdots \qquad (V_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C})$$

で次をみたすもの.

(a) $\forall s \in S$ で $V_{\mathbb{C},s} \cong F_s^p \oplus \overline{F_s^{k-p+1}}$ $\forall p$ (Hodge fil.)

(b) $\forall s \in S$ で (C_s : Weil op.)

$$Q_s(F_s^p, F^{k-p+1}) = 0$$

$$Q_s(C_s v, \bar{v}) > 0, \quad v \in V_{\mathbb{C},s}, \ v \neq 0.$$

(c) $\nabla : \mathcal{O}(F^p) \hookrightarrow \mathcal{O}(F^{p-1}) \otimes \Omega_S^1$ (horizontality).

(∇ : the flat connection of $V_{\mathbb{C}}$).

(III) $(V_{\mathbb{Z}}, F^p, Q)$ で $V_{\mathbb{Q}} = V_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ とした時 $(V_{\mathbb{Q}}, F^p, Q)$ を $\mathbb{Q}$-VHS という.

(IV) $S = \{1点\}$ の時 $(V_{\mathbb{Z}}, F^p, Q)$ は Hodge structure of wt k.

さて以下主に $\mathbb{Q}$-VHS$/S$ を考える。$(V_{\mathbb{Q}}, F^p, Q)$ を S 上の $\mathbb{Q}$-VHS of weight k とする。

$\mathcal{E}nd(V_{\mathbb{Q}})$: $V_{\mathbb{Q}}$ の locally flat な endomorphism のなす l.s.
$\cup$
$\mathcal{E}nd^{Q}(V_{\mathbb{Q}})$: 上のうち Q を保つもの.

$\mathrm{End}(V_{\mathbb{Q}}) = H^0(S, \mathcal{E}nd(V_{\mathbb{Q}}))$: global flat sections
$\cup$
$\mathrm{End}^{Q}(V_{\mathbb{Q}}) = H^0(S, \mathcal{E}nd^{Q}(V_{\mathbb{Q}}))$:

$\mathrm{End}(V_{\mathbb{Q}})$ および $\mathrm{End}^{Q}(V_{\mathbb{Q}})$ は線形環($\mathbb{Q}$-algebra)の構造をもつが, <u>$\mathbb{Q}$-VHS $V_{\mathbb{Q}}$ の準同形環 (Endomorphism algebra)</u> と呼ぶ。$\mathrm{End}(V_{\mathbb{Q}})$ および $\mathrm{End}^{Q}(V_{\mathbb{Q}})$ は weight 0 の Hodge 分解を持つ。すなわち、

$$\mathrm{End}^{(Q)}(V_{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{C} = \mathrm{End}^{(Q)}(V_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{p} \mathrm{End}^{(Q)\,-p,p}(V_{\mathbb{C}})$$

$$\mathrm{End}^{(0)}(V_{\mathbb{C}})^{-p,p} = \left\{ f: V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}} \ ; \ \underset{\forall s \in S}{f(V_s^{\ell,m}) \subset V_s^{\ell-p,m+p}} \right\}.$$

(例１)　$f: \mathfrak{X} \to S$ ：曲線又は Abel 多様体の族．

$V_{\mathbb{Q}} = R^1 f_* \mathbb{Q}$ は S 上の weight 1 の VHS．

(例２)　$f: \mathfrak{X} \to S$ ：K3曲面の族，${}^{\exists}\mathcal{L}$ ：f-rel. ref. & big．

$\mathcal{L}|_{\mathfrak{X}_s}^2 = 2k > 0$．$V_{\mathbb{Q}} = \ker(\cup c_1(\mathcal{L}) : R^2 f_* \mathbb{Q} \to R^4 f_* \mathbb{Q})$

は weight 2 の Hodge structure で $\dim V_{\mathbb{C}}^{(2,0)} = 1$．

Faltings − Peters の方法とは，例えば，S 上の VHS $(V_{\mathbb{Z}}, F^p, Q)$ の S を固定した変形の倉西空間を考えその Zariski 空間を VHS の準同形環の言葉でいうものである。

<u>定理例(Faltings [3] , C. Peters [5])</u>．$[V] = (V_{\mathbb{Z}}, F^p, Q)$ を S 上の weight k の VHS，T をその倉西空間（ V の local deformation の versal family）とする。

(☆)　$T_{[V]}(T) \cong \left(\mathrm{End}^{Q}(V_{\mathbb{Z}}) \otimes \mathbb{C} \right)^{(-1,1)}$．

Faltings の Rigidity Thm は次のように述べられる。

<u>定理（Faltings [3]）</u>：　$f: \mathfrak{X} \to S$ をアーベル多様体の族 $V_{\mathbb{Z}} = R^1 f_* \mathbb{Z}$ とおく。$V_{\mathbb{C}}$ の global flat Endomorphism でファイバーの偏極と両立する type $(-1,1)$ のものがない時，又その時に限り f は Rigid である。

この系は(☆)の同型と，アーベル多様体の族の時．今回空間は非特異（一般に考えるVHSの周期領域が有界対称領域であれば成立する事実）である事からである。

注）前述したDeligneの定理は次のように述べられる。

「$f: \mathcal{X} \to S$: abelian variety の family，generic fiber は simple かつ rel. dim of $f \leq 3$

$\Rightarrow$ $\mathrm{End}^{Q}(R^1 f_* \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$ は type (0,0)．」

（Deligne [2], Cor. (4.4.13)）．

§2. VHS of weight 2 with $h^{2,0} = 1$．（K3曲面）．

良く知られているように，代数曲面が $q = 0$，$\Omega_S^2 \cong \mathcal{O}_S$ を満す時K3曲面とよばれる．K3曲面Xの2^{nd}コホモロジー群 $H^2(X, \mathbb{Z})$ はカップ積による非退化双一次形式 Q をもち，$(H^2(X,\mathbb{Z}), Q)$ は $E_8(-1)^{\oplus 2} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\oplus 3}$ と isometry である．$H^2(X, \mathbb{C})$ は Hodge 分解

$$H^2(X, \mathbb{C}) \cong H^2(X, \mathcal{O}_X) \oplus H^1(X, \Omega_X^1) \oplus H^0(X, \Omega_X^2)$$

を持つ。ここで $h^{20} = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \Omega_X^2) = 1$，$h^{1,1} = \dim H^1(\Omega_X^1) = 20$ である．K3曲面上の nef. & big l.b. $\mathcal{L}$ で $\mathcal{L}^2 = 2k > 0$ なるものがある時，$H^2(X, \mathbb{Z})_0 = \ker(c_1(\mathcal{L}): H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^4(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z})$ は偏極ホッジ構造をもつ。この偏極ホッジ構造により，Xのモヂュライが記述され，逆に上述のtypeの偏極ホッジ構造には K3曲面が対

応する事が知られている。このようなHodge構造全体はIV型対称領域 $\mathfrak{D}_{19} \cong SO^\circ(2,19)/SO(2)\times SO(19)$ のある discrete 群 Γ_{2k} による商と同型になる。§0 の記号では，モヂュライ空間の間の同型 $\mathcal{K}_{2k} \cong \mathfrak{D}/\Gamma_{2k}$ が言えるわけである。（Torelli 型定理＋全射性）.

よって，我々は少し設定を変え，§2 の標題にあるものを一般に考えよう。

$$\begin{cases} S : \text{前の通り}. \\ H = (H_{\mathbb{Z}}, F^p, Q) : \text{VHS over } S \text{ of } \underline{\text{wt } 2 \text{ with } h^{2,0} = 1}. \\ \text{すなわち，}\left(\underline{\dim H^{2,0}_{\mathbb{C},s} = \dim F^2_s = 1} \quad \forall s \in S \right). \\ H_{\mathbb{Q}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}, \quad H_{\mathbb{R}} = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R} \quad \operatorname{rank}_{\mathbb{Z}} H_{\mathbb{Z}} = k \end{cases}$$

$Q_{\mathbb{R}}$ は $H_{\mathbb{R}}$ 上の対称双1次形式であるがその signature は $(2, k-2) = (b_+, b_-)$.

さて，次の簡単な補題がある。

<u>補題 2.1.</u>： $(H_{\mathbb{Z}}, F^p, Q)$，S は上の通り。

$\exists^1$ $\mathbb{Q}$-sub VHS $(V_{\mathbb{Q}}, F^p, Q) \subset (H_{\mathbb{Q}}, F^p, Q)$

such that

(i) $V_{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$-VHS として既約.

(ii) $\operatorname{rank} V^{2,0}_{\mathbb{C}} = 1$.

さらに $\quad H_{\mathbb{Q}} = V_{\mathbb{Q}} \oplus V_{\mathbb{Q}}^{\perp} \quad \left(V_{\mathbb{Q}}^{\perp} \text{ も } \mathbb{Q}\text{-sub VHS} \right)$

証明）　$\mathbb{Q}$-VHS は明らかに semisimple な category であるから $V_{\mathbb{Q}}$ の存在と直和分解は明らか。一意性も rank $H_{\mathbb{C}}^{20}$ = rank $V_{\mathbb{C}}^{20}$ = 1 より明らか。

定義2.2：　S 上の VHS $H=(H_{\mathbb{Z}}, F^p, Q)$ を上の通りとする。補題により得られた $\mathbb{Q}$-sub VHS　$V=(V_{\mathbb{Q}}, F^p, Q)$ を H の本質的部分（essential part）という。

$(H_{\mathbb{Z}}, F^p, Q)$ を上の通りとする。今 $s \in S$ を固定すると $(H_{\mathbb{Z},s}, F_s^p, Q_s)$ は weight 2, $h^{20}=1$ のホッジ構造である。

$$S_{\mathbb{Q},s} := H_{\mathbb{C},s}^{1,1} \cap H_{\mathbb{Q},s} \quad : \mathbb{Q}\text{-lattice of alg. cycle.}$$

$$T_{\mathbb{Q},s} := S_{\mathbb{Q},s}^{\perp} \text{ in } H_{\mathbb{Q},s} \quad : \mathbb{Q}\text{-transcendental lattice,}$$

命題2.3：　S, $H=(H_{\mathbb{Z}}, F^p, Q)$, $V=(V_{\mathbb{Q}}, F^p, Q)$ を上の通り。

(i) $^\forall s \in S$ について、　$T_{\mathbb{Q},s} \subset V_{\mathbb{Q},s}$

(ii) H は nonisotrivial とする。 S の general な点について

$$T_{\mathbb{Q},s} \cong V_{\mathbb{Q},s}.$$

(i) $T_{\mathbb{Q},s}$ は simple な Hodge 構造より，明らか。

(ii) Zahrin の K3曲面 の Hodge群と monodromy 群の関係を用る。[6].

命題 2.4： S，$(H_{\mathbb{Z}}, F^p, Q)$，$(V_{\mathbb{Q}}, F^p, Q)$ は上の通り．
$H_{\mathbb{Z}}$ を nonisotrivial とする。次の同型が存在する．

$$\left(\mathrm{End}(H_{\mathbb{Z}})\otimes\mathbb{C}\right)^{(-1,1)} \cong \left(\mathrm{End}(V_{\mathbb{Q}})\otimes\mathbb{C}\right)^{(-1,1)}.$$

§3. Nonrigid VHS の分類：

S, $(H_{\mathbb{Z}}, F^p, Q)$，$(V_{\mathbb{Q}}, F^p, Q)$ を §2 と同様とする。すなわち $H_{\mathbb{Z}}$ は S 上の wt 2 VHS with $h^{2,0}=1$，$V_{\mathbb{Q}}$ はその essential part。

定義 3.1： $(H_{\mathbb{Z}}, F^p, Q)$ ：VHS/S が rigid とは
（条件） $\left(\mathrm{End}^{Q}(H_{\mathbb{Z}})\otimes\mathbb{C}\right)^{(-1,1)} = 0$
となる事である。

Peters の定理（§1）より，これは VHS の本来の意味の Rigidity と同値である。我々は以下

(i) $(H_{\mathbb{Z}}, F^p, Q)$ nonisotrivial VHS wt 2, $h^{2,0}=1$.

(ii) $\dim\left(\mathrm{End}^{Q}(H_{\mathbb{Z}})\otimes\mathbb{C}\right)^{(-1,1)} > 0$

なるものを分類する。 §2 の最後の命題より，(i) の条件のもとで (ii) は $\dim\left(\mathrm{End}^{Q}(V_{\mathbb{Q}})\otimes\mathbb{C}\right)^{(-1,1)} > 0$ と同値である．

さて次の定理が我々の目標である。

$\boxed{\text{定理}}$ 3.21 $H := (H_{\mathbb{Z}}, F^p, Q)$ S 上の VHS of wt 2, $h^{20} = 1$, $V := (V_{\mathbb{Q}}, F^p, Q)$: H の essential part.

(仮定) (i) H : non-isotrivial

(ii) $\dim \left(\mathrm{End}(V_{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{C}\right)^{(-1,1)} > 0$. (non rigid)

この時, $E(V_{\mathbb{Q}}) := \mathrm{End}(V_{\mathbb{Q}})$ について次が成立する。

(a) : Endomorphism algebra $E(V_{\mathbb{Q}})$ の center を Z とすると, Z は総実代数体で $E(V_{\mathbb{Q}})$ は Z 上の四元数環.
(すなわち, $E(V_{\mathbb{Q}})$ は Z 上の central simple algebra で $[E(V_{\mathbb{Q}}) : Z] = 4$.)

(b) : Local system $V_{\mathbb{Q}}$ は $E(V_{\mathbb{Q}})$-module として rank 1. 特に $\mathrm{rank}_Z V_{\mathbb{Q}} = 4$

$\mathrm{rank}_{\mathbb{Q}} V_{\mathbb{Q}} = 4g$ $[Z : \mathbb{Q}] = g$.

(c) : $E(V_{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong M_2(\mathbb{R}) \times \underbrace{\mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}}_{g-1}$.

$\mathbb{K}$ は Hamiltonian algebra.

この定理を証明するために, 次の注意をする。$V = (V_{\mathbb{Q}}, F^p, Q)$ を上の通りとする。$s \in S$ を固定し, $\mathbb{V} := V_{\mathbb{Q},s}$ $Q = Q_s$ とする。モノドロミー表現 $\rho : \pi_1(S, s) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{V}, Q)$ を考えその像を Γ_s とする。自然な同一視 を考える。

$$E(V_{\mathbb{Q}}) \cong \mathrm{End}(\mathbb{V})^{\Gamma_s} \subset \mathrm{End}(\mathbb{V})$$

Q は $\mathrm{End}(\mathbb{V})$ に involution $*$ を adjoint operator で定義

する。すなわち　$a \in \mathrm{End}(V)$　に対し，

$$Q(x, ay) = Q(a^* x, y) \quad \forall x, y \in V.$$

Q は Γ_s 不変より，$*$ は $E(V_{\mathbb{Q}})$ 上に作用する。さらに

$$Q(Cax, ax) > 0$$

より，$Q(C \cdot C(a^*) \cdot a \cdot x, x) > 0$　$(C(a) = C^{-1} a C)$

であるから　$a \in E(V_{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{R}$ に対し

(**)　$\mathrm{Tr}(C(a^*) a) > 0$.

補題 3.3：　H, $V = (V_{\mathbb{Q}}, F^p, Q)$ を $\boxed{\text{定理}}$ のとおりとする。中心 Z は(可換)体であり $E(V_{\mathbb{Q}})$ は Z 上の simple algebra である。さらに Z は次のいずれかである。

(ア)：Z は総実代数体，$*|_Z = \mathrm{id}$.

(イ)：Z は $Z_0 = \{u \in Z, *u = u\}$ 上 imaginary quadratic extension，$*$ は複素共役.

(証明) Deligne [2], Cor (4.2.8) より $E(V_{\mathbb{Q}})$ は semisimple. かつ Z は type $(0,0)$ である。$V_{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$-VHS として既約であるから Z は体。よって $E(V_{\mathbb{Q}})$ は simple である。Z の元 a をとると a は type $(0,0)$ より Weil operator と可換。よって上記(**)より $\mathrm{Tr}(a^* a) > 0$. よって $(Z, *)$ は positive involution をもつ体。よって Albert classification より従う.

(see.　[6]).

(定理の証明)：　$E(V_{\mathbb{Q}})$ の中心は，補題より (ア)，(イ) のどちらか。$[Z:\mathbb{Q}]=g$ とおき，$\rho_i : Z \hookrightarrow \mathbb{C}$ $(i=1,\cdots,g)$ を g 個の異なる埋め込みとしよう。

$$V_{\rho_i} := V_{\mathbb{Q}} \otimes_{Z,\rho_i} \mathbb{C}$$
$$E_{\rho_i} := E(V_{\mathbb{Q}}) \otimes_{Z,\rho_i} \mathbb{C}$$

とおくと $V_{\mathbb{C}}$, $E(V_{\mathbb{Q}})\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}$ の分解を得る。

$$V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{i=1}^{g} V_{\rho_i} \quad , \quad E(V_{\mathbb{Q}})\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C} = \bigoplus_{i=1}^{g} E_{\rho_i}$$

$\mathbb{C}$-algebra E_{ρ_i} は simple より，ある $\mathbb{C}$-vector space L_{ρ_i} により $E_{\rho_i} \cong End(L_{\rho_i})$ となる。上の分解はすべてホッジ構造と両立し，さらに L_{ρ_i} にホッジ分解を与え，E_{ρ_i} のそれと両立させる事ができる。Local system K_{ρ_i} を

$$K_{\rho_i} = \mathcal{H}om_{E_{\rho_i}}(L_{\rho_i}, V_{\rho_i})$$
$$\cong L_{\rho_i}^{*} \otimes_{E_{\rho_i}} V_{\rho_i}$$

とおく。すると Local system の同型

(α)　　$L_{\rho_i} \otimes K_{\rho_i} \cong V_{\rho_i}$

があるが，K_{ρ_i} にホッジ分解を与え，上の同型がホッジ分解と両立するようにできる。

まず，(ア) Zが総実代数体としよう。$\overline{V_\rho} = V_{\bar\rho} = V_\rho$ かつ $\dim V_{\mathbb{C}}^{2,0} = 1$ より，$\rho=\rho_1$ に対し $\mathrm{rank}\, V_{\rho_1}^{20} = \mathrm{rank}\, V_{\rho_1}^{02} = 1$ であり，$\rho \neq \rho_1$ については $V_\rho = V_\rho^{(1,1)}$ である。よって $\rho\neq\rho_1$ については (α) より L_ρ は pure type．よって $E_\rho = End(L_\rho)$

は type (0,0)．　$\dim(E\otimes\mathbb{C})^{(-1,1)}>0$ より $\dim E_{\rho_1}^{(-1,1)}>0$．
よって L_{ρ_1} は少くとも2つの type を含む。しかるに V_{ρ_1} は高々3つの type しか含まないから，(α)より次のどちらかが従う。

(イ)　K_{ρ_1} : pure type (0,0)

(ロ)　$L_{\rho_1}\cong L_{\rho_1}^{1,0}\oplus L_{\rho_1}^{0,1}$　　$\dim L_{\rho_1}^{1,0}=\mathrm{rk}\,K_{\rho_1}^{1,0}=1$.

$K_{\rho_1}\cong K_{\rho_1}^{1,0}\oplus K_{\rho_1}^{0,1}$

(イ) の時は V_{ρ_1} の Hodge 構造は constant（$L_{\rho_1}\oplus K_{\rho_1}$）よって nonisotrivial の仮定に反する。(ロ) の時は，$\dim_{\mathbb{C}} L_{\rho_1}=2$ よって $\dim_{\mathbb{C}} E_{\rho_1}=\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{End}(L_{\rho_1})=4$．よって $E(V_{\mathbb{Q}})$ は Z 上 rank 4．　同様の考察より，Z がCM型(イ) が起きないことがわかる。よって定理の (a)が言えた。又，$\mathrm{rank}_{\mathbb{C}} V_{\rho_1}=4$ より (b)も言えた。　(c) は Deligne [2] の (4.4.9) の議論を援用し（講演の時，わからないと言っていた箇所は，寺杣氏に教えていただきました。感謝します。）

$$E(V_{\mathbb{Q}})\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}\cong M_2(\mathbb{R})\times\underbrace{\mathbb{K}\times\cdots\times\mathbb{K}}_{g-1}\quad\text{又は}$$

$$E(V_{\mathbb{Q}})\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}\cong\mathbb{K}\times\underbrace{M_2(\mathbb{R})\times\cdots\times M_2(\mathbb{R})}_{g-1}$$

である事がわかる。ここで 第1成分の所に (-1,1) typeがあるとする。ここで，monodromy表現を考えれば，後者は起きない事がわかる。

$\boxed{\text{定理}}$ は，Nonisotrivial かつ Nonrigid な VHS of wt 2,
$h^{2,0}=1$ が非常に特別なものである事を示唆する。特に命題2.3 (ii) により general な S の点 s について，ファイバーの $\mathbb{Q}$-transendental lattice の次元は4の倍数である事が自然に導かれる。例えば，このことから次の系が得られる。

系 3.4：　$f : \mathcal{X} \to S$ が K3 曲面のファイバー空間で nonisotrivial とする。general fibre のピカール数を ρ とする。　$4 \nmid 22-\rho$ ならば f は Rigid。特に，$\rho=1$ ならば f は Rigid。

注) 定理3.2の証明は Deligne [2] による所が大である。

§4　例の構成（Quaternionic Nightmare）

野口は[5]において次の興味深い結果を得ている。$\mathcal{D}$: IV型対称領域，Γ : torsion free discrete gr, $vol(\mathcal{D}/\Gamma) < +\infty$．$S$は前の通り．「$\Phi : S \to \mathcal{D}/\Gamma$ とする。rank of $\Phi > 1$ ならば，Φ は Rigid である。又 Φ が non constant, nonrigid かつ S が曲線とする。Φ を含む $Hol(S, \mathcal{D}/\Gamma)$ の成分 T は1次元である。」又最近の結果によれば $\tilde{S}$, $\tilde{T}$ を S と T の universal covering とおけば（$\tilde{S}$, $\tilde{T}$ とも上半平面 $\mathbb{H}$ と同型）$\tilde{S} \times \tilde{T} \to \mathcal{D}$（標準射）は $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ から $\mathcal{D}$ への totally geodisc な埋め込み（すなわち有界部分対称空間としての埋め込み）である。（プライベートコミニケーシ

ョン）。 $\mathbb{H}\times\mathbb{H} \cong SO^{\circ}(2,2)/SO(2)\times SO(2)$ であるから，このような埋め込みは，標準的なものしかない。（伊原信一郎氏，J. Math. Soc. Japan 19 (1967) 261−302, 543−544）この意味では，実は定理3.2はある意味で予想されたものであったかも知れない。しかし，実は例を構成しようとすると $SL(2,\mathbb{R})\times SL(2,\mathbb{R})$ の分離した離散部分群 $\Gamma_1\times\Gamma_2$ とその Γ への準同型を定義しなければならない。これを Steven Zucker 氏と筆者は随分考え色々な人達に質問したが，わからなかった。しかしこれは，筆者が数論に無知であったためであって，多元体の単数群から作る $SL(2,\mathbb{R})$ の離散群の理論は随分古くから研究されていたのであって，例えば志村先生の初期の論文，久賀先生，佐武先生の Kuga−Satake Variety 等には欠かせないものであった。

具体的な構成は，ここではぼかせてもらうが，総実代数体 Z の四元数環 E で $\boxed{\text{定理}}$ 3.2 の (c) の条件を満すものから，$\mathbb{H}/\Gamma_1\times\mathbb{H}/\Gamma_1'$ なる曲線の積上に VHS of weight 2 かつ $h^{2,0}=1$ なるものを構成できる。これで Nonrigid なファミリーの例はできる。さらに，幾何的に K3 曲面と結びつける時は，E の $\mathbb{Z}$-lattice $E_{\mathbb{Z}}$ を取り，$E_{\mathbb{Z}}$ 上の norm に関して，K3-lattice に isometry かつ primitive に埋め込む必要が出てくる。これは，Nikulin の Theory があるからくわしい分類も可能と思う。（C. Peters 氏の手紙によれば Enriques lattice に埋めこめ

る例もあるとの事でした。)

§5. Remarks

Nonrigid な K3 曲面のファイバー空間で直積以外で trivial なものは $g: Y \to S$ elliptic surface (nonisotrivial) より直積 $Y \times E \to S$ をつくり (E elliptic curve) $f: \mathcal{X} = Km(Y \times E) \to S$ は S 上の Kummer 曲面のファイバー空間で、E の moduli が動けるから、Nonrigid. この時, $f: \mathcal{X} \to S$ の general fibre の $\mathbb{Q}$-transcendental lattice は 4次元, $E(V_{\mathbb{Q}}) \cong M_2(\mathbb{Q})$ (すなわち split している。) $(Z = \mathbb{Q})$. この例では $g: Y \to S$ の S の bdでの monodromy が無限になるので f の boundary での monodromy も無限になる。

所で今, 定理3.2の $E(V_{\mathbb{Q}})$ が split しないような Nonrigid な $\mathbb{Q}$-VHS を持ってこよう。$V_{\mathbb{Q}}$ の1点のファイバーで考えると $V_{\mathbb{Q},s}$ は $E(V_{\mathbb{Q}})$-module として単純. よって $End_{E(V_{\mathbb{Q}})}(V_{\mathbb{Q},s})$ は多元体になる。容易にわかるように $End_{E(V_{\mathbb{Q}})}(V_{\mathbb{Q},s}) = E(V_{\mathbb{Q}})^{0}$ (積を逆にした多元体)。よって monodromy 群は自然に $E(V_{\mathbb{Q}})^{0}$ の元と見なされる。$E(V_{\mathbb{Q}})^{0}$ の元は semisimple より, S の boundary の local monodromy は位数無限の元を含みえない。(quasi unip.)

<u>定理</u>: S, $(H_{\mathbb{Z}}, F^P, Q)$, $(V_{\mathbb{Q}}, F^P, Q)$ は定理3.2の通り。S の boundary の local monodromy の位数が無限ならば $E(V_{\mathbb{Q}}) \cong M_2(\mathbb{Q})$, $\mathrm{rank}_{\mathbb{Q}} V_{\mathbb{Q}} = 4$ である。

$E(V_{\mathbb{Q}}) = M_2(\mathbb{Q})$ なる VHS $(V_{\mathbb{Z}}, F^p, Q)$ は K3 lattice に埋め込める事がわかるが，それから作ったK3のファイバー空間の general fibre は §5 の初めで述べたように直積(楕円曲線)から作った Kummer と isogeny であると予想される。

References.

[1] : S. Arakelov : Families of alg. curves with fixed degeneracies. (Izvest. Akad Nauk 35 (1971)).

[2] : P. Deligne : Théorie de Hodge II. I.H.E.S. 40 (1971) 5 - 57.

[3] : G. Faltings : Arakelov's theorem for Ab. var. Inv. Math. 73. 337-347 (1983)

[4] : C. Peters : Rigidity for VHS and Arakelov-type Finiteness Thm. (Preprint. Leiden / 1988).

[5] : J : Noguchi : Moduli spaces of holomorphic mappings into hyperbolically imbedded complex spaces and loc. sym. spaces. Inv. Math. 93, 15 - 34 ((988).

[6] G. Zarhin : Hodge group of K3 surfaces. J. Reine Angew. Math. 341 (1983) 193 - 220.