K3曲面の退化

大阪大学理学部　西口健二

序．　K3曲面の退化を、射影的とかケーラー的であることを仮定せずに、一般的に考察する。　目標は、極小モデルのようなある種の"良い"モデルをみつけることであるが、射影的である場合とは違って、素性の"悪い"ものが、色々出てくる。しかし、例を多く構成していくうちに、素性の"悪い"ものにも規則があって、ある種の形に分類されることがわかる。こうして、モデルとなるべきものがある程度見えてきたので、その候補の形を述べたい。

§1.　$\pi : X \longrightarrow \Delta$ を、3次元複素多様体Xから、1次元円板$\Delta = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < \varepsilon\}$ への、全射固有正則写像で、各ファイバーは、連結とする。さらに、πは、$\Delta^* = \Delta - \{0\}$上で、smooth であると仮定する。このような$\pi : X \longrightarrow \Delta$のことを、曲面の退化とよぶ，あるいは単に、退化とよぶことにする。

曲面の退化$\pi' : X' \longrightarrow \Delta$ が、$\pi : X \longrightarrow \Delta$ の modification で

あるとは、双有理型写像 $\Phi: X' \dashrightarrow X$ で、次の図式

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, dashed, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi'"'] & & X \arrow[dl, "\pi"] \\ & \Delta & \end{tikzcd}$$

を可換にし、さらに、制限 $\Phi: \pi'^{-1}(\Delta^*) \longrightarrow \pi^{-1}(\Delta^*)$ が双正則になるような Φ が存在するときをいう。

退化 $\pi: X \to \Delta$ が、準安定であるとは、特異ファイバー X_0（$\pi=0$ で定義される X の因子）が、被約で、単純正規交叉因子であるときをいう。Mumfordの定理により、勝手な退化は、base change を行うことにより、準安定な modification をもつ。

ここでは、K3曲面の退化 $\pi: X \to \Delta$、つまり、一般ファイバー $X_t = \pi^{-1}(t)$ $(t \neq 0)$ が、K3曲面であるような退化を、準安定のときに限って考察し、"良い" modification をみつけることを目標にする。

§2.　K3曲面の準安定退化について、ある種のケーラー性の仮定のもとでは、Kulikov らによって詳しく研究されている。まず、それらの結果のいくつかを復習する。

<u>定理 1</u>（Kulikov [1], Persson-Pinkham [4]）。 $\pi: X \to \Delta$ を

K3曲面の準安定退化で、次の条件(*)をみたすとする。

(*) X_0 の各既約成分は、ケーラー曲面である。

このとき、$\pi : X \longrightarrow \Delta$ には、modification $\pi' : X' \longrightarrow \Delta$ で、

(i) π' は準安定,

(ii) X' の標準束 $K_{X'}$ は自明,

となるものが存在する。

上のような $\pi' : X' \longrightarrow \Delta$ は、$\pi : X \longrightarrow \Delta$ の良い"モデル"であると考えられる。また、その特異ファイバー X_0' は次のように記述される。

<u>定理2</u> (Kulikov[1]). $\pi : X \longrightarrow \Delta$ を K3曲面の準安定退化で、$K_X = \mathbb{1}$ とし、さらに、(*)を仮定する。このとき、X_0 は次のいずれかである。

I. X_0 は K3曲面.

II. $X_0 = V_1 + \cdots + V_N$ $(N \geqq 2)$ を既約分解とすると、V_1 と V_N は、有理曲面で、$V_2, \cdots, V_{N-1}$ は、楕円線織面、また、2重曲線は楕円曲線で、双対グラフ $\Pi(X_0)$ は、

$$\overset{\cdot}{v_1} - \overset{\cdot}{v_2} - \quad - \overset{\cdot}{v_N}$$

となっている。

III. $X_0 = V_1 + \cdots + V_N$ 既約分解とすると、V_i はすべて

有理曲面で、また、2重曲線は各成分 V_i 上で rational cycle（つまり $\mathbb{P}^1$ の cycle）をつくっていて、双対グラフ $\pi(X_0)$ は、2次元球面 S^2 の三角形分割になっている。

§3. これからは、ケーラー性の条件(k)をはずして、一般的に、K3曲面の準安定退化を考察する。まず、Kulikov と Persson-Pinkham による定理1を拡張することから始める。

<u>定理3.</u> $\pi: X \longrightarrow \Delta$ をK3曲面の準安定退化とする。このとき、π の準安定な modification $\pi': X' \longrightarrow \Delta$ で、次のいずれかをみたすようなものが存在する。

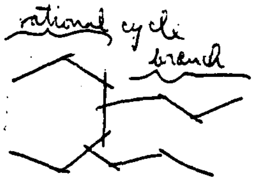
(1) $K_{X'} = \mathbb{1}$

(2) X_0' は、ひとつの成分として、2重曲線がちょうど1本の楕円曲線であるようなホップ曲面を含む。

(3) X_0' は、ひとつの成分として、(CB)-曲面を含む。

さらに、(1)は、(2),(3)とは disjoint である。

ここで、(CB)-曲面とは、有限個の曲線しかもたない VII_0 曲面で、C(B) を含むようなものをいう。また、C(B) とは、曲面上の因子で、rational cycle で、そこから曲線の枝(branch)が



のようにでているものを指す。

注意. 上の定理3の(1), (2), (3)のそれぞれの場合に、例が存在する。よって、Kulikov と Persson-Pinkham による定理1において、(*)の条件は不可欠である。

次に、定理3の(1)の場合で、(*)をみたさないものを分類する。

定理4. $\pi: X \to \Delta$ を、K3曲面の準安定退化で、$K_X = 1$ で、(*)の条件をみたさない(つまり、X_0内にケーラーではない曲面がある)とする。このとき、X_0は次のいずれかである。

II′. (ホップ曲面を含む)

III′. (双曲型井上曲面を含む)

II′+III′. (放物型井上曲面を含む)

ここでは、II′, III′, II′+III′ の詳しい記述はしない。[2]を参照。

§4. 定理2, 4により, $K_X=1$のときは, 一般的に, K3曲面の準安定退化$\pi : X \longrightarrow \Delta$について, 大体わかった。次に, 定理3における (2) (つまり, 旧しのホップ曲面をもつ) と (3) (つまり, (CB)-曲面をもつ) の場合について考える。

まず, 以前から ([2]参照) 知られていた例を, (2), (3) のそれぞれの場合について述べる。

例1 (H-I). H_αを次のようなホップ曲面とする:

$$H_\alpha = \mathbb{C}^2 - \{0\} / \langle g \rangle ,$$

$$g : (z_1, z_2) \longmapsto (\alpha z_1, \alpha z_2) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{C} , \quad 0 < |\alpha| < 1 .$$

このとき, H_αは, $\mathbb{P}^1$上の, 楕円曲線$E = \mathbb{C} - \{0\} / \langle \alpha \rangle$をファイバーとするファイバー束になり, $K_{H_\alpha} = -2E$となる。

$V_0 = H_\alpha$,

V_1. 楕円的K3曲面で, Eを一般ファイバーとするもの。

このとき,

準安定なK3曲面の退化$\pi : X \longrightarrow \Delta$で,

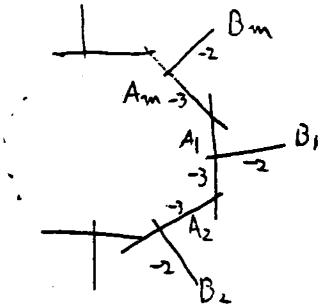
$X_0 = V_0 \cup V_1$

となるものが存在する。

($K_X = V_0$となっている。)

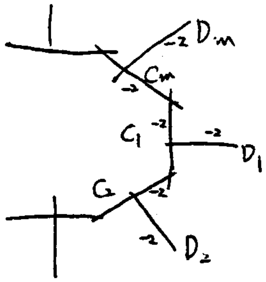
例2 (CB-I). Sを次のような曲線の配置をもつ(CB)曲面

とする。



$A_i, B_i \cong \mathbb{P}^1$

また、Z_Iを次のような曲線の配置をもつK3曲面とする。



$C_i, D_i \cong \mathbb{P}^1$

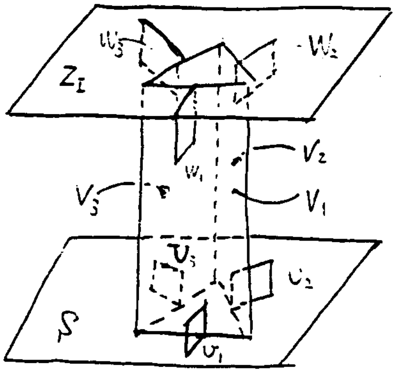
このとき、

K3曲面の準安定退化$\pi : X \longrightarrow \Delta$で、

$X_0 \supset S,\ Z_I$

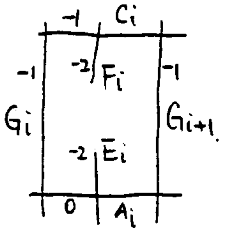
となるものが存在する。

このような退化の構成法であるが、まず、2次元の正規交叉のみをもつ多様体で、SとZ_Iを含み、特異ファイバーとなるようなものをみつけてきて、実際、X_0が変形によってK3曲面にsmoothingできることを示す。$m=3$のときの2次元正規交叉多様体X_0の記述のみをここでは行う；(なお、以下にあらわれる曲線はすべて$\mathbb{P}^1$である。)



ここで、W_i, U_i は $\mathbb{P}^2$ で次のような曲線の配置をもつ

V_i は有理曲面で、次のような曲線の配置をもつ：



$(G_4 = G_1)$.

($K_X = 2S + \sum U_i + \sum V_i + \sum W_i$ となっている。)

注意. K3曲面のピカール数 ρ は、$\rho \leqq 20$ より、Z_I において、$m \leqq 10$ である。さらに、$m \leqq 9$ のときは、Nikulin の結果より、このような Z_I は存在することがわかる。

これまでに知られていた、定理3の PI, BI の場合の例は、上の例1, 2のような形に、本質的になっていた。しかし、これらは、実は、"十分に退化している"とは言い難く、もっと退化した PI, BI の例がみつかった。それを以下に述べる。

<u>例3</u> (H−II).　V_0, E は、それぞれ、例1のようなホップ曲面 H_α とその上の楕円曲線とする。

V_1, V_2 を、楕円曲線 E' をともに一般ファイバーとする有理楕円曲面とし、さらに、V_1 は E を一般ファイバーとしてもつと仮定する。

このとき、

K3曲面の準安定退化 $\pi: X \to \Delta$ で、

$$X_0 = V_0 \underset{E}{\cup} V_1 \underset{E'}{\cup} V_2$$

となるものが存在する。

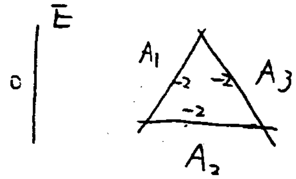
($K_X = V_0$ となっている。)

この例は、定理2における $K_X = \mathbb{1}$ のときの退化の特異ファイバーでタイプIIの場合の多様体 $V_1 + V_2$ をもっている。

<u>例4</u> (H−III).　V_0, E は、例1, 3のようなものである。

V_1 を、有理楕円曲面で、次のような曲線の配置をもつとする。

V_1 :

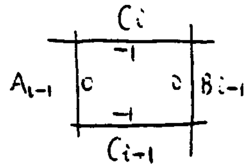


$A_i \simeq \mathbb{P}^1$,

; $K_{V_1} = -A_1 - A_2 - A_3$.

V_i ($i = 2, 3, 4$) を、有理曲面で、次のような $\mathbb{P}^1$ の配置をもつとする;

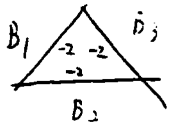
V_i :
$(i=2,3,4)$



$(C_5=C_2)$; $K_{V_i}=-A_{i-1}-B_{i-1}-C_i-C_{i+1}$

V_5を、有理曲面で、次のような$\mathbb{P}^1$の配置をもつとする。

V_5



; $K_{V_5}=-B_1-B_2-B_3$

このとき、

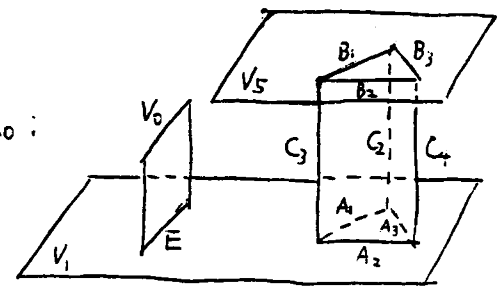
K3曲面の準安定退化 $\pi : X \longrightarrow \Delta$で、

$X_0=V_0+V_1+\cdots+V_5$

となるものが存在する。

($K_X=V_0$となっている。)

X_0 :

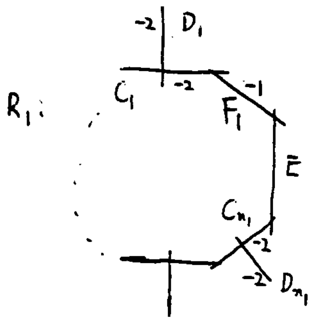


この例は、定理2の"タイプIIIの多様体"$V_1+V_2+\cdots+V_5$をもっている。

次に、(CB)-曲面で、定理2のタイプIIIの多様体を、特異ファイバーに含むようなK3曲面の準安定退化をつくる。

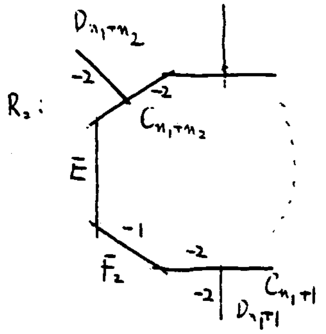
<u>例5</u> (CB−II).　Sを例2の(CB)-曲面とする。

Z_{II}を、正規交叉のみをもつ2次元多様体$Z_{\mathrm{II}} = R_1 + R_2$とする。ここで、$R_1$, R_2は、次のような曲線の配置をもつ有理曲面で、Z_{II}内では楕円曲線Eに沿って交っているとする。



$(E^2)_{R_1} = -l_1$

$K_{R_1} = -E$



$(E^2)_{R_2} = -l_2$

$K_{R_2} = -E$

C_i, D_i $(1 \leqq i \leqq n_1+n_2)$ $\cong \mathbb{P}^1$

F_j $(j=1,2)$ $\cong \mathbb{P}^1$

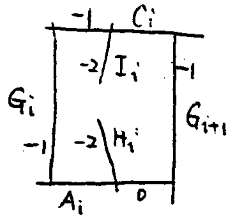
このとき、

K3曲面の準安定退化$\pi : X \longrightarrow \Delta$で、

X_0が(CB)-曲面Sと多様体Z_{II} $(n_1+n_2=m,\ l_1+l_2=2)$を含むようなものが存在する。

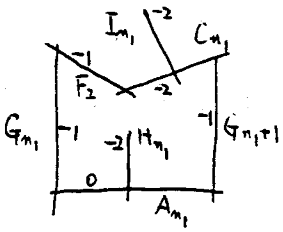
ここで、X_0内の他の成分は次のように記述される。(なお、以下に現われる曲線はすべて$\mathbb{P}^1$である。)

- V_i $(1 \leqq i \leqq n_1-1,\ n_1+1 \leqq i \leqq n_1+n_2-1)$: 有理曲面



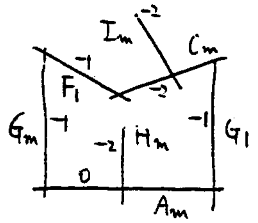
$K_{V_i} = -G_i - G_{i+1} - 2C_i - I_i$

- V_{n_1} : 有理曲面



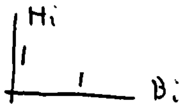
$$K_{V_{n_1}} = -G_{n_1} - G_{n_1+1} - 2F_2 - 2C_{n_1} - I_{n_1}$$

・ $V_{n_1+n_2} = V_m$ ：有理曲面



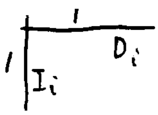
$$K_{V_m} = -G_m - G_1 - 2F_1 - 2C_m - I_m$$

・ $U_i \ (1 \leqq i \leqq m) \cong \mathbb{P}^2$ ：



$$K_{U_i} = -B_i - 2H_i$$

・ $W_i \ (1 \leqq i \leqq m) \cong \mathbb{P}^2$



$$K_{W_i} = -I_i - 2D_i$$

($K_X = 2S + \sum U_i + \sum V_i + \sum W_i$ となっている。)

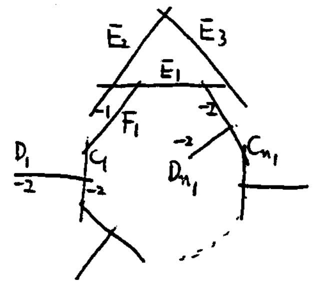
注意. 例2では、K3曲面 Z_{I} が存在するためには、ピカール数の制約があったように、ここでは、上のような多様体 $Z_{II} = R_1 + R_2$ が存在するためには、$m = n_1 + n_2$ の制約がある。実際、ホッジの指数定理より、$m = n_1 + n_2 \leqq 8$ $(n_1 \leqq 4,\ n_2 \leqq 4)$ でなければならない。また、このような $n_1 \leqq 4$, $n_2 \leqq 4$ に対しては、Z_{II} が存在することがわかる。

この節の最後に、(CB)-曲面と、定理2のタイプIIIの多様体を、特異ファイバーに含むようなK3曲面の準安定退化をつくる。

例6 (CB-III). Sを例2の(CB)-曲面とする。

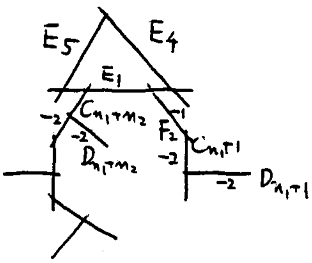
Z_{III}を、正規交叉のみをもつ2次元多様体 $Z_{III} = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ とする。ここで、T_1, T_2, T_3, T_4 は、次のような$\mathbb{P}^1$の配置をもつ有理曲面で、Z_{III}内では次のE_iに沿って交わっている。

T_1:



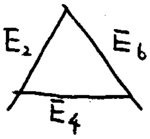
$K_{T_1} = -E_1 - E_2 - E_3$

T_2:



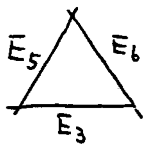
$K_{T_2} = -E_1 - E_4 - E_5$

T_3:



$K_{T_3} = -E_2 - E_4 - E_6$

T_4:



$K_{T_4} = -E_3 - E_5 - E_6$.

このとき、

K3曲面の準安定退化 $\pi: X \to \Delta$ で、

X_0 が (CB)-曲面 S と多様体

$$Z_{\mathrm{III}} \; \Big(n_1+n_2=m, \; (E_1^2)_{T_1}+(E_1^2)_{T_2}=-4, \; (E_i^2)_{T_1}+(E_i^2)_{T_2}=-2 \; (2\leq i\leq 6) \Big)$$

を含むようなものが存在する。

X_0内の他の成分は、前例5とほぼ同じなので述べないことにする。

注意 例2や例5と同様に、上のZ_{III}が存在するためには、$m=n_1+n_2$ に制約がある。実際、ホッジの指数定理より、$m=n_1+n_2\leq 8$ $(n_1\leq 4,\ n_2\leq 4)$ でなければならない。また、このような$n_1\leq 4$, $n_2\leq 4$ に対しては、Z_{III} が存在することもわかる。

§5. K3曲面の準安定退化 $\pi: X \to \Delta$ について、定理3により、あるmodificationが存在して、(1) $K_X=\mathbb{1}$, (2) X_0は“なしのホップ曲面”を含む, (3) X_0は(CB)-曲面を含む, となっている。さらに、(1)の場合については、定理2と定理4により、I, II, III, II', III', II'+III' のどれかのタイプになることがわかっている。前節では、残る(2)と(3)の場合について、

例を3つずつ構成した。まず、(2)の場合、ホップ曲面が、例1 (H-I)ではI型退化(K3曲面)に、例3 (H-II)ではII型退化に、例4 (H-III)ではIII型退化に、それぞれくっついていた。また、(3)の場合、(CB)-曲面が、間に有理曲面をはさみながら、例2 (CB-I)ではI型退化に、例5 (CB-II)ではII型退化に、例6 (CB-III)ではIII型退化に、それぞれくっついていた。これらの例を一般化して、次のようにタイプを考える：

例：	H-I	H-II	H-III	CB-I	CB-II	CB-III
	↓	↓	↓	↓	↓	↓
タイプ：	$\widehat{\mathrm{I}}_0$	$\widetilde{\mathrm{II}}_0$	$\widehat{\mathrm{III}}_0$	$\widetilde{\mathrm{I}}_1$	$\widetilde{\mathrm{II}}_1$	$\widehat{\mathrm{III}}_1$

正確な$\widehat{\mathrm{I}}_0$, ---, $\widehat{\mathrm{III}}_1$の定義は、[3]を参照。ここで、添字の0と1についてであるが、Kodairaによる楕円曲線の退化の分類のうち、準安定なものは


I_0 (楕円曲線)


I_n (rational cycle)

となっていた。(blow-upした)ホップ曲面と(CB)-曲面も変形でつながっていて、上のような楕円曲線とrational cycleの間の関係に近い。それで、ホップ曲面の出てくる(2)の場合は$\widehat{\mathrm{I}}_0$, $\widehat{\mathrm{II}}_0$, $\widehat{\mathrm{III}}_0$と、添字に0をつけ、(CB)-曲面の出てくる(3)の場合は、nを1で代表して、$\widehat{\mathrm{I}}_1$, $\widehat{\mathrm{II}}_1$, $\widehat{\mathrm{III}}_1$のように、添字に1をつけた。また、ローマ数字のI, II, IIIは、もとになっ

ている（つまり、K_Xの中で最小の重複度をもつ）成分が、$K_X = 1$の退化のそれぞれタイプ I, II, III を形づくっていることを意味する。

K3曲面の準安定退化は、どのようなモデルをもち、どのように分類されるかについての予想を述べて終ることにする。

<u>予想</u>　$\pi : X \to \Delta$ をK3曲面の準安定退化とする。このとき、πは、次のいずれかのタイプの modification $\pi' : X' \to \Delta$ をもつ。

I, $\widetilde{\mathrm{I}}_0$, $\widetilde{\mathrm{I}}_1$, （$\cdots C_{\mathrm{I}}$）

II, II', $\widetilde{\mathrm{II}}_0$, $\widetilde{\mathrm{II}}_1$, （$\cdots C_{\mathrm{II}}$）

III, III', $\mathrm{II}' + \mathrm{III}'$, $\widehat{\widetilde{\mathrm{III}}}_0$, $\widehat{\mathrm{III}}_1$. （$\cdots C_{\mathrm{III}}$）

さらに、T を local monodromy, $N = \log T$ とすると、

(i) πがC_{I}の中のどれかのタイプならば、　$N = 0$.

(ii) 〃 C_{II} 〃 　$N^2 = 0$, $N \neq 0$.

(iii) 〃 C_{III} 〃 　$N^3 = 0$, $N^2 \neq 0$.

文　献

[1] V. S. Kulikov. Degeneration of K3 surfaces and Enriques surfaces. Math. USSR Izv., 11 (1977), 957–989.

[2] K. Nishiguchi: Degeneration of K3 surfaces. J. Math. Kyoto Univ., 82 (1988), 267–300.

[3] K. Nishiguchi: Degeneration of K3 surfaces, II. (Preprint, Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, 1988)

[4] U. Persson and H. Pinkham: Degeneration of surfaces with trivial canonical bundle. Ann. of Math., 113 (1981), 45–66.