代数幾何学シンポジウム記録
1988年度 pp.53-67

ホモロジー平面について

京大理 杉江 徹

§1. 序

Xを 複素数体$\mathbb{C}$上で定義された非特異代数曲面とする。Xの一次元以上のホモロジー群 $H_i(X, \mathbb{Z})$ が $i \geq 1$ に対して自明であるとき、Xをホモロジー平面という。
Whitehead の定理により、特に X がホモロジー平面でかつ $\pi_1(X)$ が自明であることと、X が可縮であることとは同値である。

X がホモロジー平面であるとき、Xは次の性質を持つ。

(1) Xは アフィン曲面である。そこで Xを Spec A、Aは アフィン環と表わす。

(2) $A^* = \mathbb{C}^*$、但し A^*は Aの可逆元全体。

(3) $\mathrm{Pic}(X) = (0)$.

上の (1), (2), (3) より Xの対数的小平次元 $\bar{\kappa}(X)$ が $-\infty$ のとき $\mathbb{C}^2$の特徴づけにより Xは $\mathbb{C}^2$に同型になる。$\mathbb{C}^2$と異なる、ホモロジー平面の例は、最初 Ramanujam に

よって 1971年に与えられた[7]。彼の例は可縮な対数的小平次元が2の曲面である。その後しばらくホモロジー平面についての研究は現われなかったが、1985年頃 Gurjarと宮西は小平次元が 0，1 のホモロジー平面 X について詳しく調べ次の事を示した。

Case $\bar{\kappa}(X)=0$　対数的小平次元が 0 のホモロジー平面は存在しない。

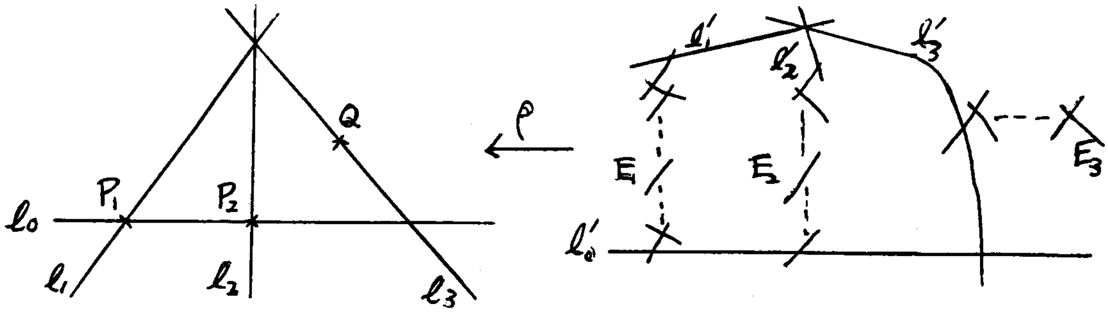
Case $\bar{\kappa}(X)=1$　対数的小平次元が1のホモロジー平面はすべて次の方法によって得られる。

(イ) 2組の整数の対 (m_1, δ_1), (m_2, δ_2) を次の条件をみたすように選ぶ。

$$m_i > \delta_i > 0, \qquad i=1,2$$

$$m_1 m_2 - m_1 \delta_2 - m_2 \delta_1 = \pm 1$$

(ロ) $\mathbb{P}^2$ 上に4本の直線 ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 を ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 の3本が一点で交わり、ℓ_0 はその点を通らないように選ぶ。



(iv) l_0 と l_1 の交点を P_1, l_0 と l_2 の交点を P_2 とし, さらに l_3 上に他の直線上にない点 Q を任意に選んで P_1, P_2, Q から始めて P_1, P_2, Q の infinitely near point 上で blowing up を繰り返す。但し この blowing up の列は 新しく得られた曲面を V, V から $\mathbb{P}^2$ への blowing up の合成写像を ρ とするとき, 次の条件をみたすように選ぶ。

- $\rho^{-1}(P_1)$, $\rho^{-1}(P_2)$, $\rho^{-1}(Q)$ は linear chane で第一種例外曲線を丁度一本ずつ含む。これを それぞれ E_1, E_2, E_3 とするとき,

$$\rho^*(l_1) = m_1 E_1 + \cdots \quad , \quad \rho^*(l_2) = m_2 E_2 + \cdots$$

$$\rho^*(l_0) = \delta_1 E_1 + \delta_2 E_2 + \cdots$$

が成り立ち, E_3 は $\rho^{-1}(Q)$ の end component である。

以上の条件により, P_1, P_2 および それぞれの infinitely near point を 中心とする blowing up の列は一意的に定まり, ρ には Q の infinitely near point を中心とする blowing up の列の任意性だけが残る。

(二) $D := \mathrm{Supp}(\rho^{-1}(l_0 \cup l_1 \cup l_2 \cup l_3) - (E_1 \cup E_2 \cup E_3))$

$X := V - D$

とおくと、Xはホモロジー平面になり、任意の$\bar{\kappa}=1$のホモロジー平面は、この方法で得られる。

§.2. $\bar{\kappa}(X)=2$のホモロジー平面

対数的小平次元が$-\infty$, 0, 1のホモロジー平面が決定されたので$\bar{\kappa}(X)=2$のホモロジー平面の構造が課題として残る。

Xをホモロジー平面とし、Xを非特異射影曲面Vの中に埋め込んでおく。但し、$D := V - X$とするとき、Dは極小単純正規交叉型 (minimal simple normal crossing 以下、MSNCと略す)とする。ホモロジー完全系列を使って、容易に次の事がわかる。

(1) $P_g(V)=0$

(2) Dの各既約成分は、$\mathbb{P}^1$に同型。

(3) Dの相対グラフ $\Gamma(D)$ は tree.

(4) Dの成分は $\mathrm{Pic}(V)$ を自由に生成する。

さて、酒井―宮岡氏によってK_V+Dが Zariski 分解を持つとき、宮岡の不等式が成り立つことが証明されている。

いま我々は、その不等式の特殊な形が必要になる。

Vの一つの相対的極小モデルを V''、Vから V''への写像を πとし，πを次のように分解する。

$$\begin{array}{ccccc} \pi : V & \xrightarrow{\pi_1} & V' & \xrightarrow{\pi_2} & V'' \\ D & & D' = \pi_1(D) & & D'' = \pi(D). \end{array}$$

但し、π_2は、D''の各既約成分の特異点の最短の特異点解消になっているとする。さらに、

$\pi := \varphi_m \circ \varphi_{m-1} \circ \cdots\cdots \circ \varphi_1.$

$\psi_j := \varphi_j \circ \varphi_{j-1} \circ \qquad \circ \varphi_1.$

各φ_iは blowing up.

$\mathcal{E}_1 : \pi_1$の例外集合、　$\mathcal{E}_1$の既約成分の個数 $= n_1.$

$\mathcal{E}_2 : \pi_2$ 〃 　$\mathcal{E}_2$ 〃 $= n_2.$

$\mathcal{E} : \pi$

とおく。

$\mathcal{E}_1$ の各既約成分 L_i に対して，$\psi_{k-1}(L_i)$が ψ_kの例外曲線になっている時

$$\beta(L_i) = (\psi_{k-1}(D) / \psi_{k-1}(L_i) \cdot \psi_{k-1}(L_i))$$

とおく。

以下、次の様に定義する。

$$R_3 = \cup \{ L_i \mid \beta(L_i) = 3 \}$$

$R_4 := \cup \{L_i \mid \beta(L_i) \geqq 4\}$.

$\mathcal{S} := \mathcal{E}_2 \cap \pi_1(D)$.

$e_1 := n_1 - b_2(\mathcal{E}_1 \cap D)$

$\sigma := n_2 - \sum_{E' \in \mathcal{S}} (E'^2 + 2)$.

$r_i = b_2(R_i)$.

$\beta_i = b_i(V)$, $\qquad b_i = b_i(D)$.

但し、$b_i(W)$は、Wの i次の betti 数を表わす。

$D'' = \cup D''_t$, $\quad D''_t$は D''の既約成分。

$P_{t,i}$ $\quad D''_t$の infinitely near point を含む特異点。

$m_{t,i}$ $\quad P_{t,i}$における、D''_tの multiplicity.

$\tau = \sum m_{t,i} - 2n_2$

$\lambda = \sum D''_t \cdot K_{V''}$

以上の記号の下で、次の命題が成り立つ。

命題.1. Vを $p_g = q = 0$ の非特異射影曲面, Dを V上の MSNCの因子とする。Dの各既約成分は $\mathbb{P}^1$に同型で、Dの各連結成分は、単連結で、一点に blow down できないとする(既ち、Dの各連結成分の V'上の像は一次元であるとする)。かつ、ある正数 m が存在して、$m(K_V+D)$ が effective であるとすると、次の不等式が成り立つ。

$$3(h_2-\beta_2)+h_0+\lambda+\nu+\tau+e_1+r_3+2r_4 \leqq \beta_2''-5$$

上の不等式で，λ 以外の項は，非負であり，V が有理曲面でなければ λ も，0 以上である。

上の不等式を使って，Gurjar-Shastri は，次の定理を証明した。

定理 1〔3〕．X がホモロジー平面であれば，V は有理曲面である。

従って，ホモロジー平面はすべて，次のようにして得られることがわかる。

(★)．ホモロジー平面の構成法

(1) $\mathbb{P}^2$ 上に，$r+1$ 個の有理曲線 $H_1, H_2, - \quad , H_{r+1}$ を取り，$H=H_1\cup - \cdot \ \cup H_{r+1}$ とおく。

(2) $\mathbb{P}^2$ から出発して blowing up を続け，合成を $\pi: V\longrightarrow \mathbb{P}^2$ としたとき，$\pi^{-1}(H)$ が MSNC であるようにする。

(3) $D=\mathrm{Supp}(\pi^{-1}(H)-(E_1\cup \qquad \cup E_r))$

但し，$E_1, \qquad , E_r$ は，π の例外曲線。

上の (1)〜(3)を

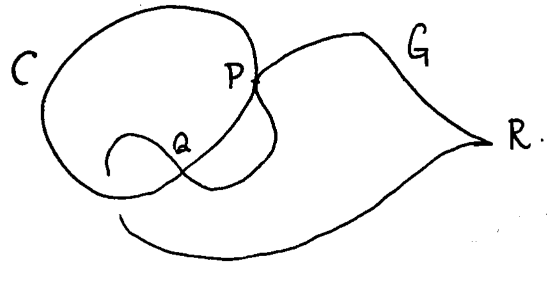
(a). Dの相対グラフが tree になり，

(b). $X = V - D$ が ホモロジー平面になるように選ぶ

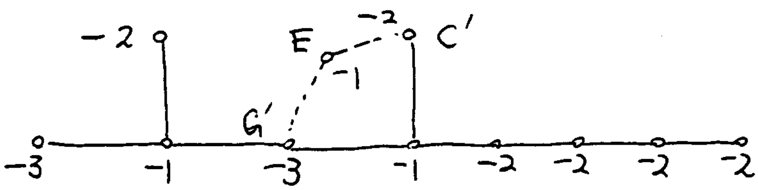
以上の方法で原理的には全てのホモロジー平面が得られる。

例1 Ramanujam [7]、

$\mathbb{P}^2$上の 2次曲線 Cと 尖点を持つ3次曲線 Gを 一点で 横断的に交わり，もう一点で 5重に接するように選ぶ。



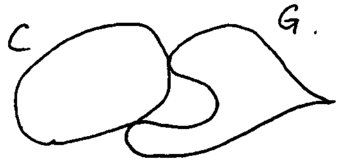
Pを5回，Rを3回 blowing up することによって，MSNC な因子を得る。さらに，Qを 一回 blowing-up し，これらすべての合成を $\pi : V \longrightarrow \mathbb{P}^2$ とするとき，$\pi^{-1}(C \cup G)$の 相対グラフは，次ページのようになる。ここで Eは点Qの blowing-up によって得られる (-1) curve (第一例外曲線を 以後こう呼ぶ) である。



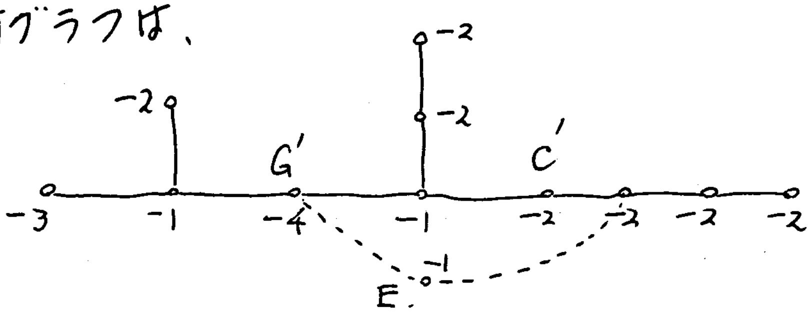
$X = V - \mathrm{Supp}(\pi^{-1}(C \cup G) - E)$ が Ramanujam の与えた可縮曲面の例である。

例2. Gurjar-Miyanishi [2]

C, G は例1と同じで $C \cdot G = 3P + 3Q$ とする。



相対グラフは、



X は、例1と同様に定義する。但し、この構成法は、元々の構成法とは異なるが得られる曲面は、同一である。

一年ほど前までは、$\bar{\kappa}(X) = 2$ のホモロジー平面は、以上の2例しか知られていなかった。我々は、$r=1$ の場合に

次の様な結果を得た。

定理2. [8]. H_1, H_2を$\mathbb{P}^2$上の曲線で、それぞれ、$\mathbb{P}^1$に位相同型であるとする。

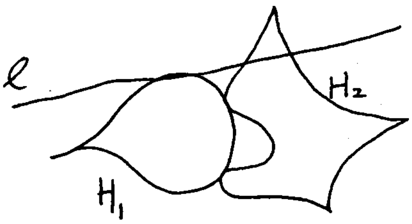
$m = \deg H_1$, $n = \deg H_2$, $m \leq n$

$H_1 \cap H_2 = \{P, Q\}$, P, Q は H_iの非特異点、

とする。(★)の方法でH_1, H_2より ホモロジー平面Xが構成できたとすれば、$m \leq 2$.

注意 (1). 一般には、命題1の不等式およびコンピューターを使った計算による。次のケースだけわからなかったが、酒井氏に教えていただいた。

• $(m, n) = (3, 4)$. H_2が3個の尖点を持つとき

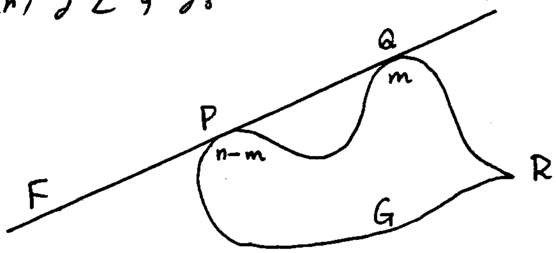


$H_1 \cup H_2$に一点で接する直線ℓをつけ加えて、$\ell \cup H_1 \cup H_2$で分岐する$\mathbb{P}^2$の2重被覆Sを考える。Sは有理2重点を持ち、その非特異モデル$\tilde{S}$として、一般型の曲面を得るが、$\tilde{S}$は、一般型の曲面の *Matsuoka–Sakai* の不等式をみたさない。従って、上の様な曲線H_1, H_2は存在しない。

注意(2). ・$(m, n)=(2, n)$ のケース.
H_2が一個の尖点を持つ時. $n \geqq 7$なら、ホモロジー平面を与えるような. 曲線の対. H_1, H_2 は存在しない。

<u>$(m, n)=(1, n)$ のケース</u>

Fを. $\mathbb{P}^2$の直線, Gを. $\mathbb{P}^2$上の次数nで. 重複度 $n-1$の尖点を一個持つ、有理曲線とし、FとGは、Gの尖点以外の2点で. 交わるとする。



まず. SNCな因子を得るために、Pを. $n-m$回, Qを. m回, Rを. n回. *blowing-up*する。さらに、Qの. *infinitely near point* で. G上の点を $r+1$回 *blowing-up* し. 最後に、得られた. (−1) *curve* をE, *blowing-up*の合成を $\sigma: V \longrightarrow \mathbb{P}^2$とする.

$$X := V - \mathrm{Supp}(\sigma^{-1}(F+G) - E)$$

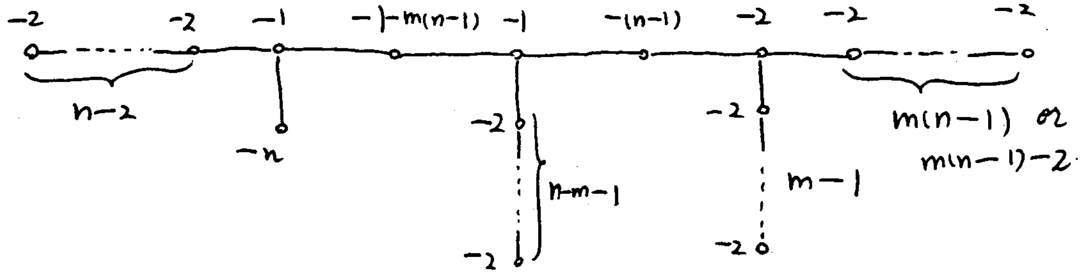
とおき. $n \geqq 3$. $\left[\frac{n}{2}\right] \geqq m \geqq 1$ と仮定する。

以上の記号の下で. 次の定理を得る。

定理 3 [5].

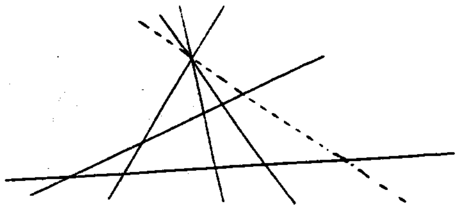
Xが ホモロジー平面である $\Leftrightarrow$ $r = m(n-1)$ or $m(n-1)-2$.
特に、$m=1$, $r=n-1$ なら、Xは可縮であり、また、$m=1$, $n=3$の時、Xは *Ramanujam* の例に同型である。

V上での $\mathrm{Supp}(\sigma^{-1}(F+G)-E)$ の相対グラフは次の様になる。

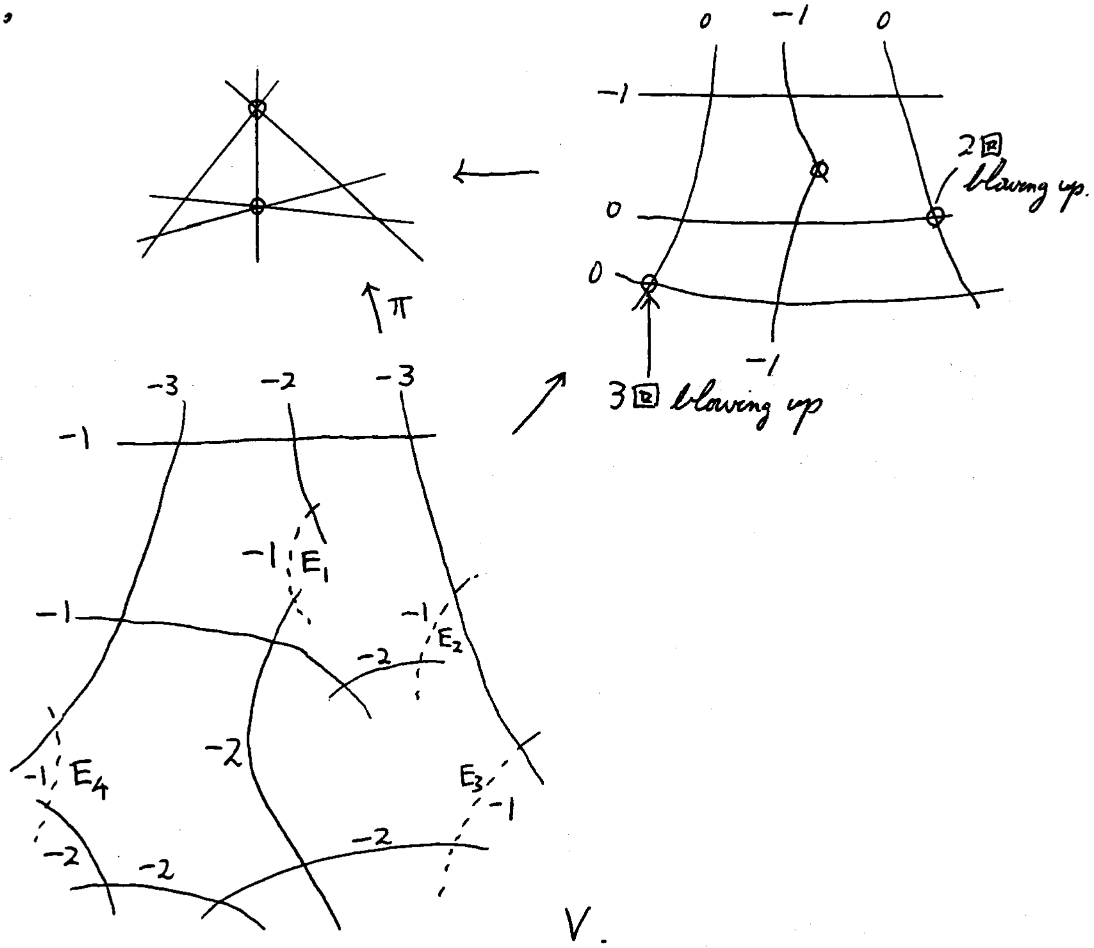


tom Dieck − Petrieの例

☆の方法によって、ホモロジー平面を構成しようとする時、定理2からわかるように、$\mathbb{P}^2$上の有理曲線、H_iの選び方にはかなり制限があると思われるが、H_iの本数をふやした時の情況についてはわからない。例えば、*tom Dieck* と *Petrie* は次の様な例で、ホモロジー平面を与える直線の配置で、直線の数には制限がないことを示した。



また 次の直線の配置は、やはり Ramanujam の例を与える。



V.

$$D := \mathrm{Supp}(\pi^{-1}(\text{lines})) - (E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4))$$

$$X = V - D$$

とおくと、X が Ramanujam の例に同型になる。

§3. 群の作用との関係

tom Dieck と Petrie が ホモロジー平面の研究を始めたのは、次の予想との関連による。

予想 A. $\mathbb{C}^*$ の $\mathbb{C}^3$ への代数的な作用は linearizable である。

この予想については、いくつかの研究があって、部分的には解決されており、次のケースだけが知られていない。

(*) $\mathbb{C}^*$ は $\mathbb{C}^3$ 内に、一点だけ固定点 P を持ち、$\mathbb{C}^*$ の $T_P\mathbb{C}^3$ への作用を、一次元の表現の直和として $t^a+t^b+t^c$ と書いたとき、$a>1$, $b, c<0$ かつ a, b, c は互いに素.

次の予想は、Petrie による。

予想 B. $\mathbb{C}^2$ 以外の ホモロジー平面は、有限位数の自明でない自己同型を持たない。

Kraft により (*) の場合、予想 B から予想 A が導びかれることが示されている。

予想Bについては、Petrieは、$\bar{\kappa}=1$ のホモロジー平面、$\bar{\kappa}=2$ の Ramanujam, Gurjar-Miyanishi の例についてこの予想が成り立つことを示した。定理3の、我々の例についても、mが2以上なら、Petrieの方法によって、相対グラフの形から、予想Bが正しいことは、すぐにわかる。$m=1$ の場合でも、$n=4, 5, \cdots$ と相対グラフの形を、具体的に求めれば、Bが成り立つことはわかる。しかし、このケースも含めて、一般に、予想Bが成り立つかどうかはわかっていない。

References

[1] T. Fujita, On the topology of non-complete algebraic surfaces, J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, 29(1982), 503-566.

[2] R.V. Gurjar and M. Miyanishi, Affine surfaces with $\bar{\kappa} \leq 1$ Algebraic geometry and commutatuve algebra in honor of Masayoshi Nagata(1987), 99-124

[3] R.V. Gurjar and A.R. Shastri, On the rationality of complex homology 2-cells: I and II. Preprints.

[4] T. Matsuoka and F. Sakai, The degree of rational cuspidal curves, preprint.

[5] M. Miyanishi and T. Sugie, Examples of homology planes of general type, preprint.

[6] T. Petrie, Algebraic automorphism of smooth affine surfaces, preprint.

[7] C.P. Ramanujam, A topological characterization of the affine plane as an algebraic variety, Ann. Math. 94(1971), 69-88.

[8] T. Sugie, On T. Petrie's problem concering homology planes, preprint.