代数幾何学シンポジウム記録
1988年度 pp.37-51

Compactification of Complete Kähler Manifolds

都立大理　辻　元

§0. Introduction

Aubin-Yau により1977年 Calabi予想が解決され 1-st Chern class が0又は負の compact Kähler 多様体は smooth Kähler-Einstein metric を許容することが証明された。これにより compact Kähler manifolds の Ricci curvature を controll する道が開かれた。これは PDE (partial differential equation) の立場から見れば elliptic complex Monge-Ampère equation の global solution の研究が可能になったことを意味する。

一方 代数幾何学に於て projective manifolds/$\mathbb{C}$ を compact Kähler manifolds と考えた時 その Ricci curvature を controll できれば 多くの応用が期待できる。特に Minimal-Model conjecture との関連は深く 宮岡不等式や uniformization の問題は Kähler-Einstein metrics の理論の延長線上にある。

また．degenerate Kähler-Einstein metrics は．minimal model conjecture そのものに深い関係があると考えられ．さらに variety の退化を記述する新たな方法として期待されている。

しかし．現在のところ minimal model conjecture に微分幾何学的に approach するには．degenerate Monge-Ampère equation を深く解析する必要があり．既成の PDE の理論では．解析が難しいのが現状である。

このように．困難を含んでいるとは言え Ricci curvature を controll することにより代数多様体を研究することは．巨大な可能性を秘めていると筆者は確信する．

実際．これを示唆する事実として．Fano manifolds の boundness は．Ricci curvature の下からの controll と全く同値であることが示され．部分的にではあるが示すことが可能である．

さて．ここでは．或る種の complete Kähler manifolds の quasi-projectivity を．上記の transcendental な方法で示そう。このような応用例を示すのは．筆者が．この定理を典型的な応用例の一つと考えるからであり．また新しい種類の応用と考えるからである．

さて．本稿で解説するのは．次の定理である．

Theorem 1. (M^m, ω) : complete Kähler manifold such that

1) $Ric_M < 0$,

2) M is $(m-2)$-very strongly pseudoconcave,

3). $\tilde{M}$ (the universal covering of M) is Stein.

Then M is quasiprojective $\square$

2)の条件については§2で解説することにし、この定理の意味を考えよう。実は、Theorem 1は次のCorollaryを抽象化した形をしている。

Cor. 1. (Satake, Baily-Borel)

D : bounded symmetric domain

$\Gamma \subset \mathrm{Aut}\, D$: arithmetic subgroup (discrete)

Then $\Gamma\backslash D$ is quasiprojective $\square$

Theorem 1の証明は、Cor 1を関数論的方法で証明しようとし、未完に終った Andreotti − Grauertの方法を complex differential geometryを使って完成させたものと言うことができる。簡単な初等微分幾何学を使うと、次も得られる。

Theorem 2. (M, ω): complete Kähler manifold s.t.
1) M has very strongly 2-negative curvature,
2) M has only cusps,
3) $\mathrm{vol}(M) < \infty$.
Then M is quasi-projective □

これは. Theorem 1 を微分幾何学的に解釈し直したものと言える。直接の系として次が得られる.

Cor. 2. (M, ω): complete Kähler manifold such that
1) M is of negative curvature.
2) $\mathrm{vol}(M) < \infty$
Then M is quasi projective. □

Cor. 2 の方が. 幾何学的には. 美しい形をしている。しかし. Theorem 2 は Cor. 1 を imply するが. Cor 2. は. Cor 1 を imply しない。即ち rank $D = 1$ の時のみ Cor 1 は. Cor 2 より従う。

Theorem 1 は. 現 I.A.S. の A. Nadel 氏との共同研究で得られたものである。

§1. L^2 Riemann-Roch inequality.

この節では以上の結果の証明の一つの主要な道具となる L^2-Riemann-Roch inequalityを解説する。これは noncompact complete Kähler manifolds の上の positive line bundles の curvature formの積分とその tensor 積の L^2-holomorphic sections の次元の asymptotic growth を関連づけるものである。compact の場合の対応物は Kodaira vanishing + weak Riemann-Roch theorem になる。証明も mini-max principleを使って、境界付き多様体の場合に帰着され、compact case と類似の方法で得られる。ここで、主要な困難は、連続スペクトルの存在だが、これは Kodaira vanishing の証明と同じく Bochner-Kodaira formulaを使って乗り越えることができる。

Theorem 3. (M^m, ω) : complete Kähler manifold,
L : hermitian line bundle $/M$,
$c_1(L)$: first Chern form of L

Assume that

1) $c_1(L) > c\omega$ $(c > 0$. const$)$,

2) $c_1(L) + c_1(K_M) > 0$

Then.

$$\varliminf_{\nu\uparrow\infty} \nu^{-m} \dim H^0_{(2)}(M, L^{\otimes\nu}) \geqq \frac{1}{m!}\int_M c_1^m(L)$$

□

上の定理で $H^0_{(2)}(\ )$ は L^2-holomorphic sections の空間を表わす。

証明は、全く解析的なので、ここでは詳記を避ける。詳しくは [N-T] を参照して下さい。

§2. Theorem 1の証明

Theorem 1の証明は、関数論的な部分を除けば essential な道具は、Kähler-Einstein metrics, Bers の同時一意化定理, L^2 Riemann-Roch theorem の3つである。

まず、Theorem 1の ii) の条件を解説しておく。

Definition X^m: complex manifold. $(m = \dim X)$

X^m is very strongly $(m-q)$-pseudo-concave iff there exists a continuous exhaustion $v: X \longrightarrow (-\infty, 0]$ such that

1) v is plurisubharmonic outside a compact subset of

2) $\sqrt{-1}\partial\bar\partial v$ has at least q positive eigenvalues outside a compact subset of X.

この定義から明らかな様に、very strongly 0-pseudoconcave ⇒ strongly pseudoconcave であるから、Theorem 1 の条件は、strongly pseudoconcave より大分弱い。また Cor 2 で $\Gamma\backslash D$ is strongly pseudoconcave ⟺ rank $KD = 1$ であることも注意しておこう。

以下 M を Theorem 1 の complete Kähler manifold とする。

Prop. 1. M は、projective variety の open subset と普通の位相で biholomorphic となる。

Proof. Hörmander の L^2-estimate (Kodaira vanishing theorem の noncompact version) により M の任意の相対コンパクト部分集合は、十分大きな ν をとると $H^0_{(2)}(M, K_M^{\otimes\nu})$ に associate した morphism により projective space に locally closed な埋め込みをもつ。要点は、ν が、部分集合を変えたとき、いくらでも大きくなることがないようにできることを示すことにある。

その前にまず、image が代数的なコンパクト化をもつことを見ておこう。

Lemma 1 (Andreotti) X: pseudoconcave manifold
L: line bundle on X

$\Rightarrow\ \exists C>0$ positive s.t.

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_X(L^{\otimes\nu})) < C\nu^{\dim X}$$

for $\nu \gg 0$ □

この補題から、νを十分大きくとると有理写像 $\Phi_{|\nu K_M|}: M - \cdots \to \mathrm{Proj}\, H^0(M, K_M^{\otimes\nu})$ は image への birational map になり、image は projective closure をもつ。これを $\overline{N}$ とおき $N = \Phi_{|\nu K_M|}(M)$ とおく。ところが、$\widetilde{M}$ が Stein であることから M は absolutely minimal となり

$$\Phi^{-1}_{|\nu K_M|}: N \longrightarrow M$$

は morphism となる。νを十分大きくとると $\overline{N}$ の代数性から、N は nonsingular と仮定してよい。従って $Bs|\nu K_M|$ は、$\Phi^{-1}_{|\nu K_M|}$ による N の因子の image となる。ところが、pseudoconcavity と Morse 理論から N に含まれる $\Phi^{-1}_{|\nu K_M|}$ の exceptional divisor は、有限個である。よって $Bs\,\Phi_{|\nu K_M|}$ は、有限個の既約成分からなる。これから、Noetherian induction により Prop. 4 が従う。 □

ここまでは、とり立てて新しい手法を使っているわけではない。問題は、M が Zariski open になることの証明にある。

M は、Ricci negative であるが、もっと良い計量を入れることを考えよう。Kähler–Einstein metric を構成する。

しかし．M自身にKähler−Einstein計量を入れるのには．本質的な障害があって上手く行かない。　そこで．Mから適当に因子を除くことを考える。

まず．Mの projective compactification $\overline{M}$で smooth なものを一つとり．必要なら適当に blow up して $\overline{M}-M$ 内の maximal divisor D が normally crossingsになるようにする（Dの存在は．Mの pseudoconcavity から従う）。次に．$\overline{M}$上の very ample divisor Hで次の各条件を満たすものをとる。

(1) H+D は．normally crossings．

(2) $K_{\overline{M}}+D+H$ は ample

(3) $M_H^* = \overline{M}-H-D$ は bounded pseudoconvex domain で cover される。

(3)の条件のみが．nontrivialであるが．これは Bers の同時一意化定理から従う。

ここで

$$M_H = M - H$$

とおく。さて．M_H．M_H^* に Kähler−Einstein 計量を入れよう。

Lemma 2. M_H は $\mathbb{C}^n$ の有界擬凸領域で uniformize される。

ここで次の2つの定理を引用しよう。

Theorem (Mok-Yau) Ω: bdd. pseudoconvex domain in $\mathbb{C}^m$. Then there exists unique Kähler-Einstein metric ω such that

$$\omega = -\mathrm{Ric}_\omega$$

on Ω and ω is complete.

Theorem (R. Kobayashi) Let M be a projective manifold $/\mathbb{C}$ and let D be a divisor on M with only simple normal crossings.

If $K_M + D$ is ample, then there exists a unique complete Kähler-Einstein metric on $M - D$ such that

$$\omega = -\mathrm{Ric}_\omega \qquad \square$$

この2つの定理から M_H 上に complete Kähler-Einstein metric ω_E で

$$\omega_E = -\frac{1}{2\pi}\mathrm{Ric}_{\omega_E}$$

をみたすものが入り，M_H^* 上に complete Kähler-Einstein metric ω_E^* で

$$\omega_E^* = -\frac{1}{2\pi} \mathrm{Ric}_{\omega_E^*}$$

を満たすものが入ることが解る。

ここで Kähler mfd (N, ω) に対し

$$\mathrm{Ric}_\omega = -\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial \log \omega^m$$

であることに注意しよう。これは Kähler-Einstein 計量は、本質的にその体積形式によって定まることを示している。我々の次の目標は、$\omega_E = \omega_E^*$ on M_Hを示すことである。この部分で、L^2-Riemann-Roch theorem が、本質的な役割を果たす。上の注意から、体積形式の一致のみ示せばよい。

Lemma 3. $(\omega_E^*)^m \leq \omega_E^m$

(証明) inclusion $(M_H, \omega_H) \hookrightarrow (M_H^*, \omega_H^*)$ に Ahlfors-Yau の Schwarz lemma を適用すればよい。□

さて今度は、逆向きの不等式を考えよう。

Lemma 4. (M_H, ω_H) は体積有限。

(証明) $p \in M \cap H$ とし p を中心とした M 内の polydisc Δ^m を $\Delta^m \cap M_H = (\Delta^*)^k \times \Delta^{m-k}$ となるようにとる。

$((\Delta^*)^k \times \Delta^{m-k}$, Poincaré metric$) \hookrightarrow (M_H, \omega_E)$ に Schwarz lemma を使うと、ω_E^m は H の近傍で高々 Poincaré growth であることがわかる。これから

$$H^0_{(2)}(M_H, K_{M_H}^{\otimes \nu}) \subset H^0(M, K_N^{\otimes \nu} \otimes H^{\otimes \nu-1})$$

となる。 L^2 R-R と Lemma より

$$\frac{1}{m!}\int_{M_H}\omega_E^m \leqq \liminf_{\nu\to\infty} \dim H^0_{(2)}(M_H, K_{M_H}^{\otimes\nu}) \leqq {}^{\exists}C < \infty \qquad \square$$

さて、次の Lemma が key である。

Lemma 5. $H^0_{(2)}(M_H, K_{M_H}^{\otimes\nu}) \subset H^0(\overline{M}, K_{\overline{M}}^{\otimes\nu} \otimes H^{\otimes\nu-1} \otimes D^{\otimes\nu-1})$

(証明). $\eta \in$ 左辺とすると、η は $\overline{M}$ 上 $K_{\overline{M}}^{\otimes\nu}$ の meromorphic section に延びることが、M と $\overline{M}$ の有理関数体の同型から わかる。 D で、η がどの位大きな極をもつか見ればよい。 $\overline{M}-M$ は、仮定から、pluri polar set となるので、$\overline{M}$ 上の Lebesgue 測度に関して、測度 0 となることに注意する。

Hölder の不等式から、Lemma 4 を使って

$$\int_{\overline{M}} (\eta \wedge \bar{\eta})^{\frac{1}{\nu}} \leqq \|\eta\|_{L^2}^{\frac{2}{\nu}} \, Vol(M_H)^{\frac{\nu-1}{\nu}}$$

を得る。これから Lemma は直ちに従う。 $\square$

Lemma 5 と L^2 R-R より

$$\begin{aligned}\frac{1}{m!}\int_{M_H}\omega_E^m &\leqq \varliminf_{\nu\to\infty} \dim H^0_{(2)}(M_H, K_M^{\otimes\nu}) \\ &\leqq \varliminf_{\nu\to\infty} \dim H^0(\overline{M}, K_{\overline{M}}^{\otimes\nu} \otimes H^{\otimes\nu-1} \otimes D^{\otimes\nu-1}) \\ &= \frac{1}{m!}\int_{M_H}(\omega_E^*)^m\end{aligned}$$

を得る。 最後の式は、Riemann-Roch + 小平 vanishing と current として $[\omega_E^*] = [K_{\overline{M}} + D + H]$ となっている

ことによる。なおここで $M_H^* - M_H$ が測度0であることを使っている。

これと Lemma 3 より

$$(\omega_E^*)^m = \omega_E^m \quad \text{on } M_H$$

となるが、これから $\omega_E = \omega_E^*$ が従うことは既に述べた。

ω_E, ω_E^* も complete なので結局

$$M_H = M_H^*$$

を得る。H の任意性から

$$M = \overline{M} - D$$

を得る。 Q.E.D.

§3. Theorem 2の証明

Theorem 1の条件のうち 1)と3)は、かなり普遍的な条件である。例えば、$\mathbb{C}^m$内の有界領域で cover される quasi-projective manifold は、1)と3)を満たすことが、Bergmann Kernel を考えるとすぐわかる。2)の条件は、これに反しやや強い条件である。

この節では、2)の条件は、微分幾何学的条件から従うことを述べる。

M を complete. nonpositive curvature の Kähler manifold とする。M の普遍被覆を $\tilde{M}$ とおくと

$M = \Gamma \backslash \tilde{M}$ ($\Gamma \subset \mathrm{Aut}\,\tilde{M}$, descrete) と書ける。Green-Wuの結果から $\tilde{M}$ は Stein となる。$\gamma : [0,\infty) \to \tilde{M}$ を弧長でパラメトライズされた測地線とする。この時、γに付随した Busemann関数を

$$B_\gamma(p) = \lim_{t \uparrow \infty} (\mathrm{dist}(p, \gamma(t)) - t)$$

で定義する。この時、B_γ について次が成り立つ。

Lemma 6. B_γ は plurisubharmonicである。 □

Theorem 2 は Lemma 6 を使って Theorem 1 の 2) の条件を確かめることによって得られる。この時、B_γ が適当な γ をとると、cusp の近傍に "decend" することが essential である。詳細は、論文を見て下さい。

§4. 今後の課題

Ricci 曲率の制御は、代数多様体の研究に、最近大変役立っている。Minimal model予想と関連して、代数多様体上の Ricci flat foliationを解析的に作ることは、非常に興味深いと思われる。今後の発展を期待したいと思います。

参考文献

A. Nadel - H. Tsuji : Compactification of complex Kähler manifolds of negative Ricci curvature

Jour. of Diff. Geom. 28. 503 – 512. (1988)