

$K_m(E \times F)$ ($p = 18$) に付随する Jacobian fibrations について

東大理 小本曾啓示

§0. 序.

以下, 本稿の終わりにまで, すべて複素数体 \mathbb{C} 上で考える。序では, 以下必要となる定理を中心に, $K3$ 曲面と Abel 曲面, 楕円曲面の Mordell-Weil 群について知られていることを簡単にふり返ってみることにする。記述を簡単にするため, 曲面はすべて連結コンパクト非特異代数曲面とする。

Pjateckii-Šapiro と Šafarevič [11] により, $K3$ 曲面に対する Torelli の定理が証明されて以来, $K3$ 曲面は様々な立場から研究されている。また, 彼らの証明を完全にする目的から, 塩田先生 [5] により, 次の形の Abel 曲面の Torelli の定理が示された。

(0.1) A, B を Abel 曲面とする。このとき,

(1). $\varphi: H^2(B, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(A, \mathbb{Z})$ なる Hodge isometry (即ち, Hodge 構造と交点形式を保つ同型) があるならば,

$A \cong B$ 又は $A \cong \text{Pic}^0(B)$ となる。

(2) $\varphi: H^2(A, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(A, \mathbb{Z})$ が Hodge isometry であらう
 $\det \varphi = 1$ をみたすならば, ある $f \in \text{Aut}(A)$ があつて,
 $\varphi = f^*$ 又は $\varphi = -f^*$ となる。 \square

Abel 曲面を, (-1)倍写像であつた商多様体の最小非特異化として得らるる曲面 $K_m A$ を, Kummer 曲面という。よく知られて
 いる様に, Kummer 曲面は, K3 曲面となる。Abel 曲面 A と Kummer
 曲面 $K_m A$ には密接な関係があるが, Torelli の定理の立場か
 らは, 自然な有理写像 $\pi_A: A \dashrightarrow K_m A$ により, 超越格子 (即ち,
 Néron-Severi 群の整係数 2次元 \mathbb{Z} ホモロジ一群内での直
 交補格子) $T_A, T_{K_m A}$ の間に次の関係があることが重要である。

(0.2). $\pi = \pi_{A*}: T_A \rightarrow T_{K_m A}$ は, $\pi x \cdot \pi y = 2x \cdot y$ をみた
 し, 更に Hodge 構造を保つ \mathbb{Z} -加群の同型になる。 \square

また, 構成から, Kummer 曲面は, その上に 16本の互いに交
 わらない非特異有理曲線をもつが, Nikulin [1] は, 逆に, K3
 曲面 Υ 上に, 互いに交わらない 16本の非特異有理曲線があ
 りば, Υ は Kummer 曲面になることを示した。

(0.3). Υ を K3 曲面とし, d_1, \dots, d_{16} を Υ 上の互いに交わら
 ない非特異有理曲線とする。このとき,

(1). $\mathcal{O}_{\Upsilon}(d_1 + \dots + d_{16}) \in 2\text{-Pic}(\Upsilon)$ ならば, $16 = 0, 8, 16$.

(2). $16 = 16$ のとき, $\mathcal{O}_{\Upsilon}(d_1 + \dots + d_{16}) \in 2\text{-Pic}(\Upsilon)$ であり,

$d_1 + \dots + d_{16}$ で分岐する Υ の 2重被覆 $\hat{\Upsilon}$ の極小モデル $(d_1, \dots, d_{16}$

の逆像を contract してえらゆる) A は Abel 曲面となり, Covering involution を (-1) 倍写像として, $\gamma = kmA$ となる。 \square

他示, 正則切断をもつ楕円曲面 (特異ファイバーを少くとも 1 つもつ) $\varphi: Z \rightarrow \Delta$ を Jacobian fibration と呼ぶことにする。
 $Z^\#$ で φ が smooth になる点全体, Z_Δ で $\Delta \in \Delta$ のファイバー, $\Sigma \subset \Delta$ で Z_Δ が特異ファイバーとなる点全体を表すことにする。ファイバー (楕円曲線) の群構造により, 正則切断全体は, 1 つの切断を O -切断として, 有限生成 Abel 群となる。いわゆる Mordell-Weil 群である。Mordell-Weil 群 (以下 $M_\varphi(Z)$ と書く) の階数については, 塩田先生 [4] により, 次の結果が示されている。

(0.4). (1) Z の Néron-Severi 群 $NS(Z)$ は, 正則切断の類とファイバーの既約成分の類全体で生成される。

$$(2). \text{rank } M_\varphi(Z) = \text{rank } NS(Z) - 2 - \sum_{\Delta \in \Sigma} (m(Z_\Delta) - 1)$$

ここで, $m(Z_\Delta)$ は, $(Z_\Delta)_{\text{red}}$ の既約成分の数である。 \square

Mordell-Weil 群 $M_\varphi(Z)$ のねじれ部分群については, 群 $Z_\Delta^\# = Z_\Delta \cap Z^\#$ のねじれ部分群への単射があることはよく知られている。Cox と Zucker は, [7] で, ねじれ部分群を調べる強力な手法を開発した。

(0.5) Mordell-Weil 群 $M_\varphi(Z)$ には、有理数値半正定値対称双一次形式 \langle, \rangle が入る。この双一次形式に関して次の 2 つは同値となる。(i) $\sigma \in M_\varphi(Z)$ はねじれ元 (ii) $\langle \sigma, \sigma \rangle = 0$

ここで、 \langle, \rangle は次の様に計算 (定義) される。

σ_0 を 0-切断とし、 σ, σ' を切断とする。 $\sigma_0, \sigma, \sigma'$ で定まる Σ の因子を、それぞれ $\underline{\sigma}_0, \underline{\sigma}, \underline{\sigma}'$ で表す。

$$\langle \sigma, \sigma' \rangle = -(\underline{\sigma} - \underline{\sigma}_0) \cdot (\underline{\sigma}' - \underline{\sigma}_0) - \sum_{\Delta \in \Sigma} \underline{\sigma} \cdot D_\Delta(\sigma')$$

ここで、 $D_\Delta(\sigma') = \sum_i a_i^\Delta C_i^\Delta$ (C_i^Δ は \mathbb{Q} の既約成分、 a_i^Δ は有理数) は、次により一意に定まる Σ の \mathbb{Q} -因子である。

$$(\underline{\sigma}' - \underline{\sigma}_0 - \sum_{\Delta \in \Sigma} D_\Delta(\sigma')) \cdot (\forall \text{ fiber の既約成分}) = 0, D_\Delta(\sigma') \cdot \underline{\sigma}_0 = 0 \quad \square$$

K3 曲面の場合に話をもてよう。K3 曲面 Σ の elliptic fibration は、次の様にして与えられることが知られている。(容易にわかる。)

(0.6). $\varphi = \pi|_{\mathbb{P}^1} : \Sigma \rightarrow \mathbb{P}^1$, \mathbb{P}^1 は楕円曲面の非重複特異ファイバーと同じ型の Σ の因子。 \square

$\varphi = \pi|_{\mathbb{P}^1}$ が Jacobian fibration となるのは、 $\mathbb{P}^1 \cdot C = 1$ となる Σ 上の非特異有理曲線 C がある場合である。 Σ の Jacobian fibrations 全体を \mathcal{J}_Σ と書くことにする。 \mathcal{J}_Σ には、 Σ の自己同型群 $\text{Aut}(\Sigma)$ が、 $\pi|_{\mathbb{P}^1} \mapsto \pi|_{f(\mathbb{P}^1)}$ ($f \in \text{Aut}(\Sigma)$) により自然に作用する。 Σ の 2 つの Jacobian fibrations $\pi|_{\mathbb{P}^1}$ ($i=1,2$)

が同型になるのは, $f(\mathbb{O}_1) \in |\mathbb{O}_2|$ とする γ の自己同型 f がある場合である。さて, φ が γ の Jacobian fibration のとき, Mordell-Weil 群 $M_\varphi(\gamma)$ は, γ の自己同型 (“各ファイバー” の平行移動) を与えるが, $M_\varphi(\gamma)$ は, 明らかに, γ の正則 2 型式全体の空間 $H^0(\gamma, K_\gamma) \cong \mathbb{C}$ と自明に作用する。このように, $K3$ 曲面 (又は, Abel 曲面) の自己同型で, 正則 2 型式全体の空間に自明に作用する自己同型を, 向井先生に従って, N -自己同型と呼ぶことにする。(γ の N -自己同型全体の作る群を $\text{Aut}_N(\gamma)$ と書く。) Nikulin [2] と向井先生 [12] により, $K3$ 曲面の有限 N -自己同型(部分)群は完全に調べられている。出発点は, Nikulin による次の定理である。

(0.7). γ を $K3$ 曲面, $f \neq \text{id}$. を γ の有限 N -自己同型とする。

このとき, f は γ に有限個の固定点しか持たない。

(f の位数, f の固定点数) は, 次のどれかになる。

(2, 8), (3, 6), (4, 4), (5, 2), (6, 2), (7, 3), (8, 2) \square

この (0.7) と (0.5) により, $M_\varphi(\gamma)$ のねじれ部分群はかなりよく調べられる。

拙著 [10] では, 以上の一般論の応用として, 互いに同種でない楕円曲線の直積 Abel 曲面 $E \times F$ の Kummer 曲面 $X = \text{Km}(E \times F)$ に, Jacobian fibrations の構造が: 同型を除いて

とだけ入るか、又、各同型類に対して、Mordell-Weil 群がどうなるかを完全に調べた。(§1. 定理 1, 2 参照) (0.6) によれば、 $\mathcal{O}_X / \text{Aut}(X)$ を調べるためには、 X の非特異有理曲線の交わり元の様子と、自己同型で移り合う様子を調べることが重要になる。(§2. 補題 1, 2, 3, 4 参照) (0.1), (0.2), (0.3) により、こゝろがよくわかることが調べられる理由である。

この報告では、[10] の証明の概略を、序で述べた一般論がどのように応用されるか、 B の Picard 数 $\rho(X) = 18$ (E と F が同種でないことと同値) という特殊性がどう利用しているかを中心に述べたいと思います。(詳しい証明に興味のある方は、[10], をみて下さい。)

目次

§1. 記号と主結果

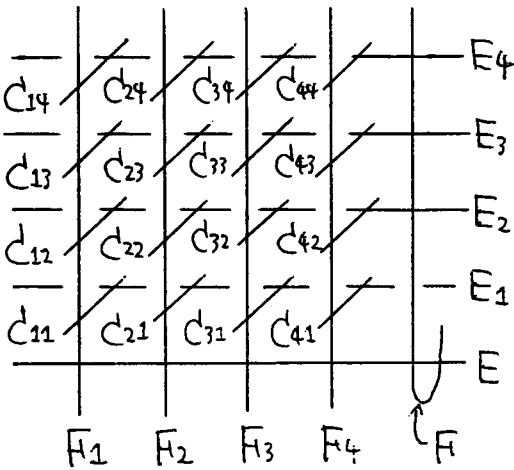
§2. 補題

§3. 定理 1 の証明のアイディア

§4. 定理 2 の証明のアイディア

§1. 記号と主結果

記号. 以下, E と F は互いに同種でない楕円曲線とし, $X = K_m(E \times F)$ とする。 E, F , 及び X は任意に固定する。構成により, X 上には, 次の図に示す24本の非特異有理曲線が, a priori に存在し, 図の様に交わる。ここで, p_i, q_i ($i=1, \dots, 4$) を各 E, F の2分点とするとき, F_i, E_i は各, $p_i \times F, E \times q_i$ ($\subset E \times F$) の像として得られる非特異有理曲線で, C_{ij} は, $E \times F$ の2分点 $p_i \times q_j$ に対応して得られる非特異有理曲線である。更に, 図中 E, F は楕円曲線で, それぞれ, $E \times (\text{非2分点}), (\text{非2分点}) \times F \subset E \times F$ の像として得られる。



交点数

$$C_{ij} \cdot C_{kl} = -2\delta_{ik}\delta_{jl}, E^2 = F^2 = 0$$

$$E_j \cdot E_l = -2\delta_{jl}, E \cdot F = 2$$

$$F_i \cdot F_k = -2\delta_{ik}, E \cdot E_l = F \cdot F_k = 0$$

$$C_{ij} \cdot E_l = \delta_{jl}, E \cdot F_k = F \cdot E_l = 1$$

$$C_{ij} \cdot F_k = \delta_{ik}, F \cdot C_{ij} = 0$$

(δ_{ij} は Kronecker の δ)

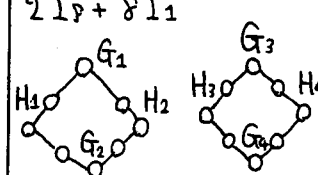
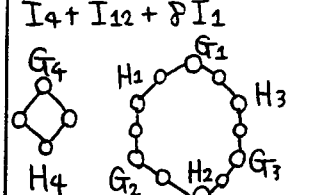
F_i, E_i ($i=1, 2, 3, 4$) を special nodal curve と呼ぶ, $B := \bigcup_{i=1}^4 (E_i \cup F_i)$ とおく。その他の非特異有理曲線 (X 上には無数の非特異有理曲線があることが後にわかる) を ordinary nodal curve と呼ぶ。 $K_{nat} = \bigcup_{i,j=1}^4 E_i \cup F_j \cup C_{ij}$ とおき, X の natural

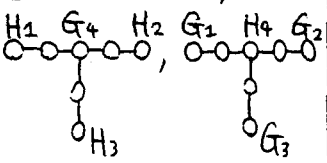
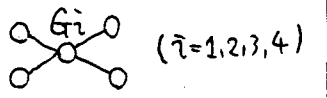
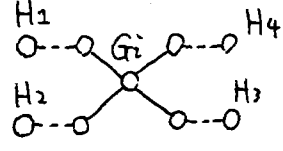
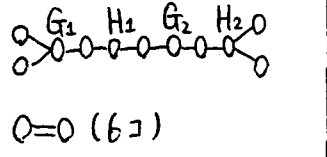
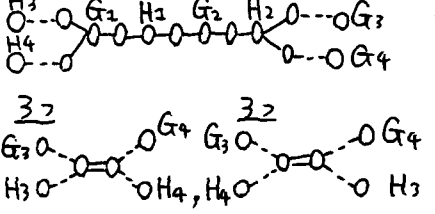
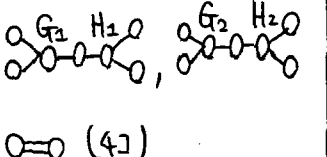
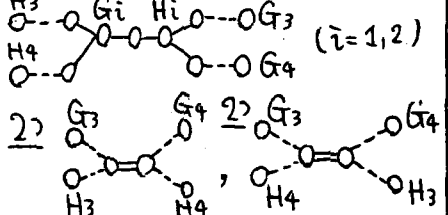
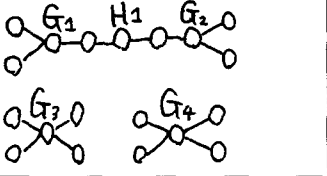
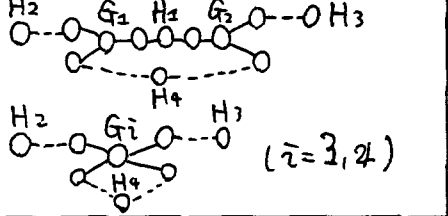
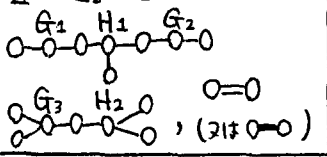
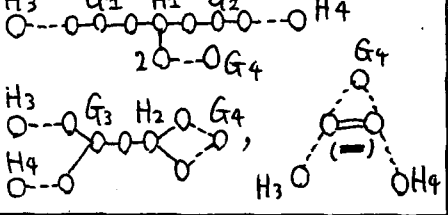
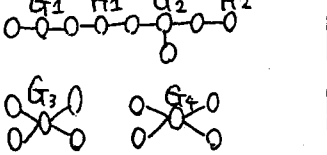
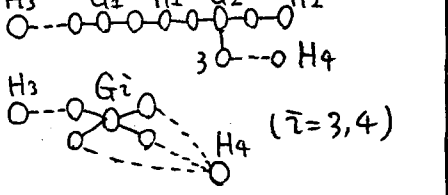
double kummer pencil divisor と呼ぶ。また, Knot と同じ "交わり元" をする 24本の 非特異有理曲線の和を, double kummer pencil divisor と呼ぶ。 $\{G_i\}_{i=1, \dots, 4}$, $\{H_i\}_{i=1, \dots, 4}$ と $\{F_i\}_{i=1, \dots, 4}$, $\{E_i\}_{i=1, \dots, 4}$ を表す。ただし, 表し方は, 例えは, $G_1 = E_3$ ならば, $\{G_i\} = \{E_i\}$, $\{H_i\} = \{F_i\}$ というようにする。更に, $\{G_i\}$, $\{H_i\}$ を定めたとき, C^{ij} で G_j, H_i と交わる $\{C_{ij}\}_{i,j=1, \dots, 4}$ の元を表す。(例えは, $G_1 = E_3, H_2 = F_4$ ならば, $C^{21} = C_{43}$ である。)

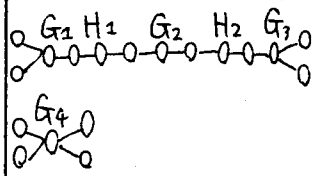
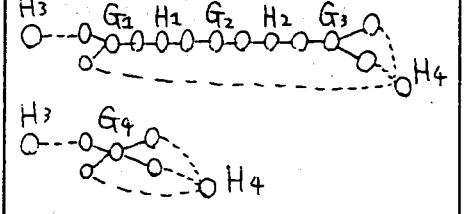
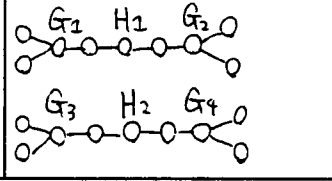
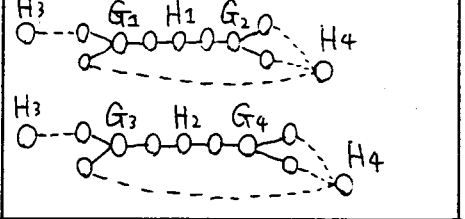
主結果.

定理 1. X の Jacobian fibrations の集合 \mathcal{J}_X は, 特異ファイバーの種類により, 次の $\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_{12}$ の 12 の型に分かれる。更に, 各 \mathcal{J}_i に対し, 切断, Mordell-Weil 群, 切断達と特異ファイバーの交わり元は 次の表 1 の通りとなる。

表 1.

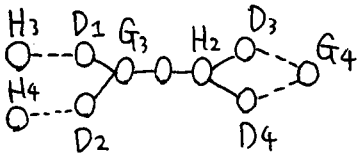
型	2つの特異ファイバー (I型とII型の図は略)	2つの切断	Mordell-Weil 群	切断達と特異ファイバー種の交わり元
\mathcal{J}_1	$2I_8 + 8I_1$ 	infinite	$\mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	略
\mathcal{J}_2	$I_4 + I_{12} + 8I_1$ 	infinite	$\mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	略

I_3	$2IV^* + aI_1 + bII, a+b=8$ 	infinite	Z^4	田畧
I_4	$4I_0^*$  $(\bar{i}=1,2,3,4)$	H_1, H_2 H_3, H_4	$(Z/2Z)^2$	 $(\bar{i}=1,2,3,4)$
I_5	$I_6^* + 6I_2$  $O=O (6)$	G_3, G_4 H_3, H_4	$(Z/2Z)^2$	
I_6	$2I_2^* + 4I_2$  $O=O (4)$	G_3, G_4 H_3, H_4	$(Z/2Z)^2$	
I_7	$I_4^* + 2I_0^* + 2I_1$ 	H_2, H_3 $(H_4 \text{ is } (2\bar{2} - \text{tr})^2)$	$Z/2Z$	 $(\bar{i}=3,4)$
I_8	$III^* + I_2^* + 3I_2 + I_1 (2 \text{ is } III^* + I_2^* + 2I_2 + III)$  $(2 \text{ is } O=O)$	H_3, H_4 $(G_4 \text{ is } (2\bar{2} - \text{tr})^2)$	$Z/2Z$	
I_9	$II^* + 2I_0^* + aI_1 + bII, a+b=2$ 	H_3 $(H_4 \text{ is } (3\bar{2} - \text{tr})^2)$	$\{id.\}$	 $(\bar{i}=3,4)$

J_{10}	$I_8^* + I_6^* + aI_1 + bII, a+2b=4$ 	H_3 $(H_4 \text{ は } 3\text{重+1重})$	$\{id.\}$	
J_{11}	$2I_4^* + aI_1 + bII, a+2b=4$ 	H_3 $(H_4 \text{ は } 3\text{重+1重})$	$\{id.\}$	

ここで、例えは、 $2I_8 + 8I_1$ は、 I_8 型特異ファイバーが 2 個、 I_1 型特異ファイバーが 8 個あることを表す。(【】も参照) また、 G_i, H_i, O は、それぞれ、非特異有理曲線 G_i, H_i 及び

ordinary nodal curve を表す。また、表中、例えは、



は、切断 H_3, H_4 はそれぞれ、 I_2^* 型特異ファイバーと D_1, D_2 の非特異有理曲線で交わり、2重切断 G_4 は、 D_3, D_4 の非特異有理曲線で交わりを示している。□

定理 2 を述べたために、 X を次の 4 つの型に分けておく。

ここで、 $E_3 := \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, $\tau \in$ 上半平面 $/SL_2(\mathbb{Z})$ である。

(i) $K_m(E\sqrt{1} \times E\omega)$

$$\omega = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

(iii) $K_m(E\sqrt{1} \times E\rho_2)$

$$\rho_2 \neq \omega$$

(ii) $K_m(E\rho_1 \times E\omega)$

$$\rho_1 \neq \sqrt{-1}$$

(iv) $K_m(E\rho_3 \times E\rho_4)$

$$\rho_3, \rho_4 \notin \{\sqrt{-1}, \omega\}$$

定理2. $\#(\mathcal{D}_m/\text{Aut}(X))$ ($m=1, \dots, 11$) は次の通りとなる。

型	\mathcal{D}_1	\mathcal{D}_2	\mathcal{D}_3	\mathcal{D}_4	\mathcal{D}_5	\mathcal{D}_6	\mathcal{D}_7	\mathcal{D}_8	\mathcal{D}_9	\mathcal{D}_{10}	\mathcal{D}_{11}	計
(i)	2	1	1	2	2	2	1	1	1	1	2	16
(ii)	3	2	1	2	3	3	2	2	1	2	3	23
(iii)	6	3	1	2	6	6	3	3	1	3	6	38
(iv)	9	6	1	2	9	9	6	6	1	6	9	59

更に, $\#(\mathcal{D}_m/\text{Aut}_N(X)) = (\text{iv})$ の $\#(\mathcal{D}_m/\text{Aut}(X))$ となる。 \square

注意.

- (1) 定理1の表中の a, b の値は調べていない。
- (2) 定理2では, よりくわしく $\mathcal{D}_x/\text{Aut}(X)$ の完全代表系も記述できている。([10] を参照)
- (3) 定理1より, X 上には無数の非特異有理曲線, Jacobian fibrations があることがわかる。(実際, \mathcal{D}_1 の元の Mordell-Weil 群が無数であることから, 非特異有理曲線(特に, \mathcal{D}_1 の元の切断になっているもの)が無数にある。これらの切断を用いて, I_2^* 型特異ファイバーをもつ Jacobian fibrations が無数にできることもわかる。)
- (4) X には切断を有しない elliptic fibration もある。(§3 参照)
- (5) Picard 数が19以上の時には, 定理1にはあらかわれない

Jacobian fibrations もある。

例1. 特異K3曲面 (即ち Picard 数 20 の K3 曲面) Y

($K_m(E \times F)$ では, E と F が同種でしかも虚数乗法をもつ場合)

特異ファイバーに, II^* 型を 2 つ含む Jacobian fibration が"必ず"ある。

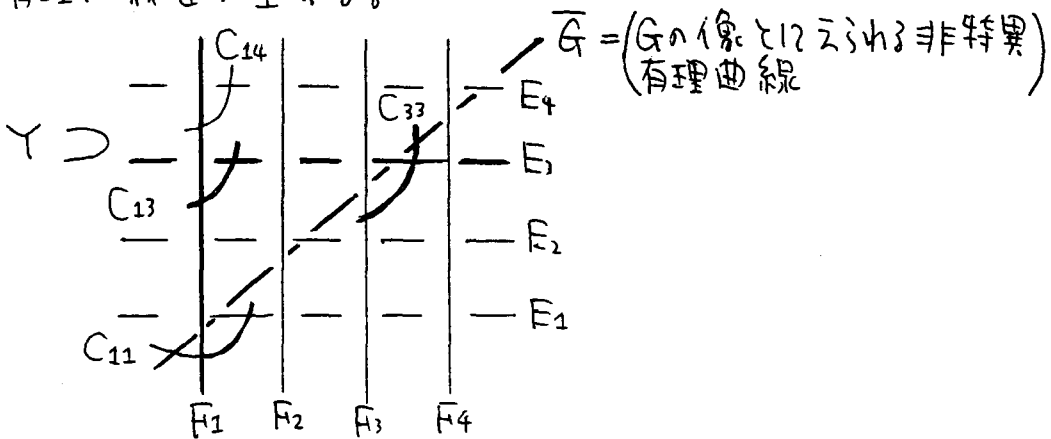
(格子の理論により, $(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}) \oplus E_8 \oplus E_8 \hookrightarrow NS(Y)$ なる原始埋入の存在がわかる。このより従う。幾何的な証明は, [6] 参照)

例2. $Y = K_m(A \times A)$ (A は楕円曲線) (このとき, Y の

$$\begin{array}{c} E \\ \parallel \\ F \end{array}$$

Picard 数は 19 または 20)

$A \cong G = \Delta \subset A \times A$ とする。このとき, Y 上には次の非特異有理曲線達が生ずる。



このとき, $\Theta = C_{11} + F_1 + C_{13} + E_3 + C_{33} + G$ で定まる Y 上の因子は, I_6 型特異ファイバーと同じ型で, $\Theta \cdot C_{14} = 1$ だから,

$\pi|_{\Theta}$ は, Jacobian fibration となる。(定理 1 の表中には I_6 型特異ファイバーはあらかじめない。) □

§2. 補題

この節では、定理1,2を証明するのに必要な補題を4つ準備する。すなわち、 $X = K_m(E \times F)$, $\rho = 18$ に特有の補題である。

補題1. (1) 任意の $f \in \text{Aut}(X)$ に対し、 $f(B) = B$ が成り立つ。ここで $B = \bigcup_{i=1}^4 (E_i \cup F_i)$ 。
 (2) X の非特異有理曲線達は、次の様になる。

	$E_j (j=1,2,3,4)$	$F_i (i=1,2,3,4)$	その他
$E_j (j=1,2,3,4)$	$E_j \cdot E_l = -2\delta_{jl}$	$E_j \cdot F_i = 0$	各 D に $\bar{x} \neq l \exists 1 j$ s.t. $D \cdot E_j = 1, D \cdot E_l = 0 (l \neq j)$
$F_i (i=1,2,3,4)$		$F_i \cdot F_k = -2\delta_{ik}$	各 D に $\bar{x} \neq l \exists 1 i$ s.t. $D \cdot F_i = 1, D \cdot F_k = 0 (k \neq i)$
その他 D, D', \dots			$D \cdot D' \equiv 0 \pmod{2}$

□

以下の補題をのびるために少し準備をしておく。

γ を $K3$ 曲面又は Abel 曲面とし、 ω_γ を γ の至るよ: $3 \cdot 0$ でない正則 2 形式とする。このとき、 $\text{Aut}(\gamma)$ の一次表現 α が $\text{Aut}(\gamma) \ni f \mapsto \alpha(f) \in \mathbb{C}^\times$, ここで $f^* \omega_\gamma = \alpha(f) \omega_\gamma$ で定まる。 $\Gamma = \text{Im } \alpha$ とおくと次の完全列ができる。

$$1 \rightarrow \text{Aut}_N(\gamma) \rightarrow \text{Aut}(\gamma) \rightarrow \Gamma \rightarrow 1.$$

補題2. $\text{Aut}_N(X)$ は $\{X$ 上の double Kummer pencil divisors $\}$ 上, 推移的に作用する。 \square

補題3. 次の半直積分解がある。 $\text{Aut}(X) = \text{Aut}_N(X) \rtimes \langle \bar{\sigma} \rangle$,
ここで, $\bar{\sigma}$ は, 次の $\text{Aut}(E \times F)$ の元から導かれる $\text{Aut}(X)$ の元である。(i), ..., (iv) については §1 参照)

$E \times F$	(i)	(ii)	(iii)	(iv)
$\bar{\sigma}$	$\begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

\square

補題4. $D_R (R=1, \dots, \ell)$ を X 上の ℓ 個の ordinary nodal curves とし, $D = D_1 + \dots + D_\ell$, $d = c_1(\mathcal{O}_X(D)) \in NS(X)$ とおく。もし, $D \cdot E_i \equiv D \cdot F_i \equiv 0 \pmod{2}$ がすべての $i=1, 2, 3, 4$ に成り立つならば, 任意の $f \in \text{Aut}_N(X)$ に對して, $f_*(d) + d \in 2NS(X)$ となる。 \square

以下, 補題の証明をする。

補題1の証明. (1) θ を $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Aut}(E \times F)$ から導かれる X の involution とする。 $NS(X) \otimes \mathbb{Q}$ は E, F, B, C の類で生成されることから, $\theta_*|_{NS(X)} = \text{id}$, $\theta_*|_{T_X} = -\text{id} \dots \text{①}$ となる。従って, 任意の $f \in \text{Aut}(X)$ は, $H^2(X, \mathbb{Z})$ ($NS(X) \oplus T_X$ が有限指数で入っている) 上 θ と可換になる。よって, $K3$ 曲面の Torelli

の定理により, X 上 $f\theta = \theta f$ となる。他方, θ の固定点集合 X^θ は $X^\theta = B \dots \textcircled{2}$ となることはすぐわかる。故に, $f(B) = B$ となる。次に(2)を示す。第3列目のみ示せばよい。 D を X 上の ordinary nodal curve とする。①, ② と $h^0(\mathcal{O}_X(D)) = 1$ より, θ は D 上 involution で作用する。従って, 第3段目 $D \cdot D \equiv 0 \pmod{2}$ を示すには, $\text{mult}_P(D, D) \equiv 0 \pmod{2}$ が $P \in D \cap D' \cap X^\theta$ に 対し 2 成立することさえいえば十分である。これは, P での blowing up をくり返して, その上での θ の作用をみると出る。最後に第1, 2段を示す。 $D^\theta = \{2 \text{点}\}$ より, $D \cdot X^\theta = 2$ が出る。(交わり方が, 横断的であることは, θ の接空間への作用をみるとわかる。) 故に, ②より, 次の4つが起これらなることを言えればよい。(1) $D \cdot E_j = 2$ (2) $D \cdot E_j = D \cdot E_\ell = 1$ ($j \neq \ell$).

$$(3) D \cdot F_i = 2 \quad (4) D \cdot F_i = D \cdot F_\ell = 1 \quad (i \neq \ell)$$

例えば(2)が起きたとする。簡単のため $j=1, \ell=2$ とする。

D を $NS(X) \otimes \mathbb{Q}$ 内で, $D = \sum a_{ij} C_{ij} + aE + bF$ と書く。

(2)より, D と E_i, F_i ($i=1, \dots, 4$) の交点数を計算して,

$$\sum_{i=1}^4 a_{i1} + b = 1, \quad \sum_{i=1}^4 a_{i2} + b = 1, \quad \sum_{i=1}^4 a_{ij} + b = 0 \quad (j=3, 4) \dots \textcircled{3}$$

$$\sum_{j=1}^4 a_{ij} + a = 0 \quad (i=1, 2, 3, 4) \dots \textcircled{4} \text{ が出る。}$$

$$\textcircled{3} \text{ の総和} - \textcircled{4} \text{ の総和を作ると, } b - a = \frac{1}{2} \dots \textcircled{5} \text{ となる。}$$

他方, $D \cdot C_{ij} = -2a_{ij}$ は, 3段目の結果より偶数だから, a_{ij}

はすべて整数となる。従って、③、④より a, b も整数になる。
 これは⑤に矛盾する。よって (2) は起こらない。他の場合も同
 様にして起こらないことがわかる。 \square

補題2の証明. K' を double kummer pencil divisor とする。補題
 1より, $K' = B \cup \bigcup_{i,j=1}^4 C_{ij}$ という形になる。(0.3)(2)により,
 $\sum_{i,j=1}^4 C_{ij}$ で分岐する X の 2重被覆の極小モデルを A とすると,
 $\pi_A, \pi_{E \times F}$ により, Hodge isometry $\varphi: T_A \xrightarrow{\sim} T_{E \times F}$ が成
 立つ。ともに rank 4 の不定値 unimodular 格子である。格子の
 理論より, φ は, Hodge isometry $\bar{\varphi}: H^2(A, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(E \times F, \mathbb{Z})$
 に拡張される。故に, (0.1)(1) と $\text{Pic}^0(E \times F) \cong E \times F$ により,
 $A \cong E \times F$ を得る。この同型を与え, かつ原点を保つ写像を
 F とすれば, 補題1と合わせて, F は X の自己同型 f で,
 $f(K') = K_{\text{nat}}$ となるものを探る。補題3は, $g \in \text{Aut}(X)$
 に対し, $g^* \omega_X = \alpha \omega_X$ とおくと, 今度は, (0.1)(2) を用いて,
 $h^* \omega_{E \times F} = \alpha \omega_{E \times F}$ となる $h \in \text{Aut}(E \times F)$ の存在がわかる。
 このことから, 補題3は容易に成る。補題2で作った f は,
 $\bar{\omega}$ の巾乗 (K_{nat} を保っている) で適当に調節すれば, N -自己
 同型にできる。 \square

補題4の証明. $f \in \text{Aut}_N(X)$ より, $f_* |_{T_x^* / T_x} = \text{id}$. (ここで, T_x^*

$= \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(T_X, \mathbb{Z})$ となる。これより, 簡単な格子の考察により,
 $f_* |_{NS(X)^*} / NS(X) = \text{id.}$ が出る。ところで, 仮定と補題1よ
 り, $D \cdot (X$ 上の非特異有理曲線) はいつも偶数。また, Jacobian
 fibration $\pi: E \rightarrow \mathbb{P}^1$ を考えると, (0.4) (1)より, $NS(X)$ は非特異有理
 曲線の類で生成されることがわかる。これより, $d/2$ は $NS(X)^*$
 の元となる。よって, $f_*(d/2) - d/2 \in NS(X)$ となる。補題4はこれ
 より従う。 \square

注意 補題1~4 は, $p \geq 19$ では必ずしも成り立たない。

補題1, 4の反例 §1 注意(5)の例2が反例を与えることが
 \mathbb{G} に着目するとわかる。

補題2の反例 $A = E\sqrt{5}$ とし, $A \times A \times A \supset S (\cong A \times A) = \{(x, y, y)\}$
 とおく。 $C = \text{Im}(A \rightarrow A \times A \times A, x \mapsto (3x, (1+\sqrt{5})x, (1+\sqrt{5})x))$,
 $D = \text{Im}(A \rightarrow A \times A \times A, x \mapsto ((1-\sqrt{5})x, 3x, 3x))$ とおくと,
 $C \cong A$ かつ $S = A \times A = C \times D$ となることがわかる。これよ
 り, $k_m S$ 内の2つの double kummer pencil divisors $X_{A \times A}$ と
 $X_{C \times D}$ (それぞれ, $k_m(A \times A)$, $k_m(C \times D)$ と思えばよい) の natural double
 kummer pencil divisor) は, $\text{Aut}(k_m S)$ でうつり合えないことが
 わかる。([8] を参照) \square

§3. 定理1の証明のアイデア

まず、次に注意する。

1°) $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ を Jacobian fibration とする。このとき、 π の fiber の少くとも1つは reducible になる。

証明) もし π の fiber がすべて irreducible であれば、 $E_i, F_i (i=1, \dots, 4)$ はすべて multi-sections となる。すると、補題1(1)より容易に

Mordell-Weil 群 $M_\pi(X)$ は有限群になる。他方、(0.4)(2)によれば、

$18 = \text{rank } NS(X) = 2 + \text{rk } M_\pi(X) + \sum (m_i - 1)$ より、 $\text{rk } M_\pi(X) = 16$ となる。これは矛盾である。 \circledast は特異ファイバー □

2°) そこで、以下、reducible fiber (非特異有理曲線からなる) に目をつけて、 X の Jacobian fibration の特異ファイバー全体を分類する。

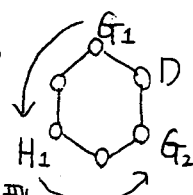
その調べるの idea を例2の例でみる。

注意(5)の例2のものがないこと: 補題1(2)より、もし I_6 型特異ファイバーがあれば、図の様にならざるをえない。

すると、 D の非特異有理曲線は、補題1(2)をみたさず

矛盾する。これより、 I_* 型は、すべて、 $I_{4b} (b=1, 2, \dots)$ 型

でなければならぬ。 □



例3. I_{16} 型の特異ファイバーがないこと: もしも、 I_{16} 型特異ファイバー

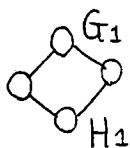
\circledast があれば、上と同様の議論で、 $\circledast \supset B$ となる。すると、補題

1(2)より、 $\pi \circledast$ は section を有しないことになる。(I_{16} 型特異

ファイバーをもつ X の elliptic fibration (section なし) は実在することか
容易にわかる。) \square

例4. 最後に, I_4 型特異ファイバーをもつ X の Jacobian fibration は \mathcal{G}_2 の型
になることを示そう。

実際, $\textcircled{1}$ を I_4 型特異ファイバーとすると, 補題1 (2) より, 次の形になる。



すると, 補題1 (2) より, $\textcircled{1} \cdot G_i = \textcircled{1} \cdot H_i = 0$ ($i=2,3,4$) だから
 G_i, H_i ($i=2,3,4$) は別の特異ファイバー (達) に入る。特に, φ

の切断は, ordinary nodal curve となる。その1つを C とする。補題1
(2) より, $C \cdot H_2 = 1$, $C \cdot G_2 = 1$, H_2, G_2 以外の任意の非特異有理曲
線 D に対し, $C \cdot D \equiv 0 \pmod{2}$ となる。これは, $\textcircled{1}$ 以外の φ の re-
ducible fiber はただ1つとなる。これを $\textcircled{2}$ とすると, 楕円曲面の

特異ファイバーの分類と補題1 (2) より, 容易に $\textcircled{2}$ は I_{12} 型とわかる。

残りの特異ファイバーは, I_2 型 (α) と II 型 (β) (しかないか) の
個数を各, a, b とすると, $24 = \chi_{\text{top}}(X) = \sum \chi(\text{特異ファイバー})$

により, $a + 2b = 8$ がわかる。また, (0.4)(2) より, $rk M_\varphi(X) = 2$

もわかる。(更に, $M_\varphi(X)$ のねじれ部分群を調べると,

$M_\varphi(X) = \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $a=8, b=0$ がわかる。§4 のとおり。) こう

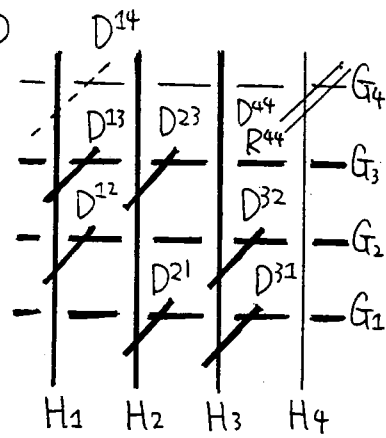
して, I_4 型特異ファイバーをもつ X の Jacobian fibration は, \mathcal{G}_2 の型に
なることがわかる。 \square

このように, 補題1 (2) を用いて, ^{もと} きちんとした考察を行うと,
定理1 は証明できる。([10] 参照) \square

$\{i, j, k\} = \{i', j', k'\} = \{2, 3, 4\}$ とするときは: $i = i', j = j', k = k'$ とする。

第1段の証明 以下, $D^{ij} (R^{ij})$ は H_i, G_j と交わる ordinary nodal curve とする。 $\varphi = \mathbb{P}^1 \in \mathcal{D}_2$ とする。 ①

$$\begin{aligned} \textcircled{H} &= G_1 + D^{21} + H_2 + D^{23} + G_3 + D^{13} \\ &\quad + H_1 + D^{12} + G_2 + D^{32} + H_3 + D^{31} \end{aligned} \quad \text{と(25)11。}$$



また, φ の切断の 1 つを D^{14} と(25)11。

更に, φ の I_4 型の特異ファイバーは。

$$\textcircled{H}' = H_4 + G_4 + D^{44} + R^{44} \text{ と書ける。}$$

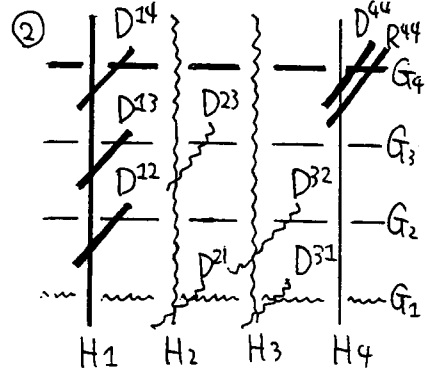
D^{**} を含む double kummer pencil divisor を作りたい。

$$L := D^{12} + D^{13} + 2(H_1 + D^{14} + G_4) + D^{44} + R^{44}$$

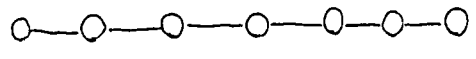
とし, \mathbb{P}^1 を作ると, G_2, G_3 は切断で。

H_4 は 2重切断となるので: 定理1 の分類

より, $\mathbb{P}^1 \in \mathcal{D}_2$ とする。



$$\text{因子 } D = D^{23} + H_2 + D^{21} + G_1 + D^{31} + H_3 + D^{32}$$



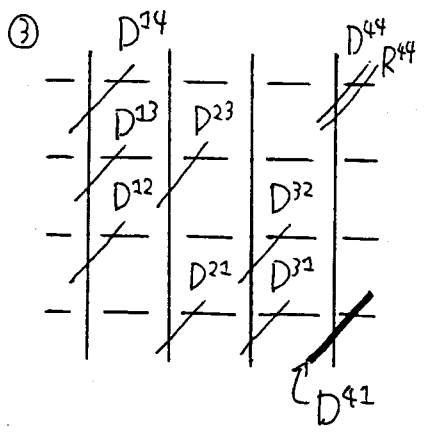
を考えると, 各成分は L と交わらない

ので別の特異ファイバーに入るが, 表より

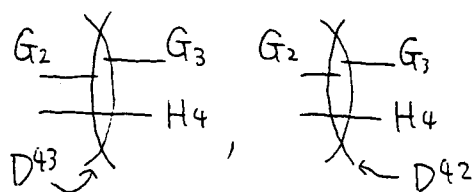
それは III^* 型しかありえない。

従って, ③ 図の D^{41} なる非特異有理曲線

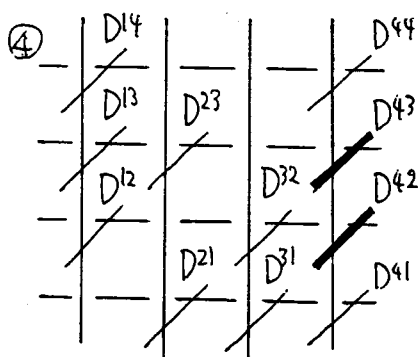
が存在し, それに出ている D^{**}, R^{44} と交わらない。



他示, 定理1より, 重直には, 更に I_2 型特異ファイバー (\mathcal{O}) が2つあり, 次の様になつてゐる。



従つて, 更に ㊸ の様に, D^{43}, D^{42} なる 非特異有理曲線が存在し, すでに出ている D^{**} とは交わらない。 (D^{43}) と D^{42} も交わらない。

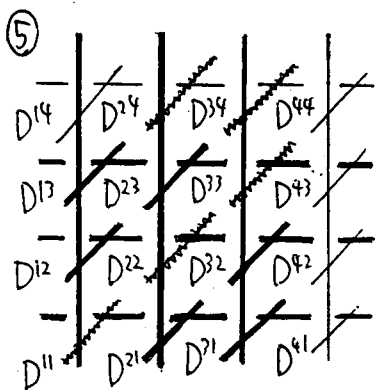


そこで, $\mathbb{P}^1(2H_4 + D^{41} + D^{42} + D^{43} + D^{44}) \in \mathcal{L}_4$ を考えると, ㊸ の様に,

$D^{11}, D^{22}, D^{24}, D^{33}, D^{34}$ なる 非特異有理曲線が存在することがわかり D^{ij} ($i, j=1, \dots, 4$) は互いに交わらない。

そこで $K_D = B \cup \bigcup_{i,j=1}^4 D^{ij}$ とおくと,

K_D は double kummer pencil divisor となる。しかも ㊸ $\subset K_D$ となる。



系補題2により, $f(K_D) = K_{nat}$ となる $f \in \text{Aut}_N(X)$ が存在する。必要ならば, $E \times F$ の2点の平行移動から導かれる X の N -自己同型を合成して, f は, $\{f(H_4), f(G_4)\} = \{E_2, F_2\}$ となるようにできる。この f により第1段は満たされる。□

第2段の証明 明らかに $f(\oplus i'j'k') = \oplus ijR$ となる。これを補題1(1)により、次の等式をえる。

$$g_*(C_{i'3} + C_{j'3} + C_{j'4} + C_{R'4} + C_{R'2} + C_{i'2}) = C_{i3} + C_{j3} + C_{j4} + C_{R4} + C_{R2} + C_{i2} \quad \dots \textcircled{1}$$

よって、 $C = C_{i3} + C_{j3} + C_{j4} + C_{R4} + C_{R2} + C_{i2}$ は、補題4の仮定を満たすので、 $\textcircled{1}$ と合わせて、次の $\textcircled{2}$ をえる。

$$C_{i'3} + C_{j'3} + C_{j'4} + C_{R'4} + C_{R'2} + C_{i'2} + C_{i3} + C_{j3} + C_{j4} + C_{R4} + C_{R2} + C_{i2} \equiv 0 \pmod{2 \cdot NS(X)} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} \text{よって、} \{i', j'\} &= \{p, q\}, \{j', R'\} = \{s, t\}, \{R', i'\} = \{v, w\} \\ \{i, j\} &= \{p, r\}, \{j, R\} = \{s, u\}, \{R, i\} = \{v, z\} \end{aligned}$$

よおけるので $\textcircled{2}$ より、次の $\textcircled{3}$ をえる。

$$C_{q3} + C_{r3} + C_{t4} + C_{u4} + C_{w2} + C_{z2} \equiv 0 \pmod{2 \cdot NS(X) = 2 \cdot Pic(X)} \quad \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ と(0.3)(1)より容易に、 $q=r, t=u, w=z$ が出る。

故に、 $R'=R, i'=i, j'=j$ となる。 \square

注意 補題の証明には、§3§4の中を保留にしてきた事実

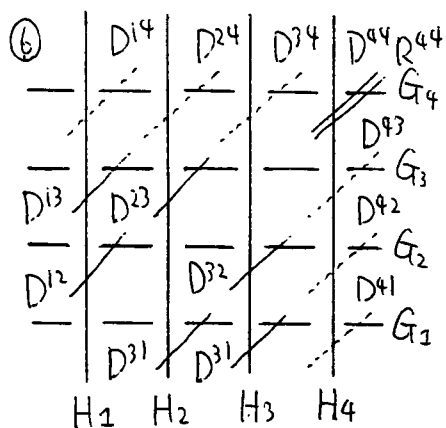
$a=8, b=0$ と $M_\varphi(X) = \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は全然用いていない。

よって、最後に、補題を用いて、 $a=8, b=0$ と $M_\varphi(X)$ のねじれ群が $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ になることを証明する。

証明 補題により、 g_2 の元は、 $\varphi = \oplus i \oplus j$ として、

$$\oplus = H_1 + D^{42} + G_2 + D^{32} + H^3 + D^{31} + G_1 + D^{21} + H_2 + D^{23} + G_3 + D^{13}$$

(下図⑥を参照)と書け, I_4 型特異ファイバーは, $\mathbb{C}_1 = H_4 + D^{44} + R^{44} + G_4$, 更に, $D^{14}, D^{24}, D^{34}, D^{41}, D^{42}, D^{43}$ なる互いに交わらない切断が存在する。



すなわち, $f_i \in M_\varphi(X)$ ($i=2,3,4$) を $f_i(D^{i4}) = D^{i4}$ で定める。

すると, 例12は, D^{i4} を 0-切断にとることにより, (0.5) の双二次形式を計算すると, $\langle f_i, f_i \rangle = 0$ ($i=2,3,4$) がわかる。したがって, (0.5) により, f_i ($i=2,3,4$) はすべて

ねじれ元となる。したがって, φ は II 型の特異ファイバーをもたないので, $a+2b=8$ だったことから, I_{12}, I_4 以外の特異ファイバーは, I_1 型 (α) 8個, つまり $a=8, b=0$ となる。

$M_\varphi(X)$ のねじれ元は, I_1 型ファイバーの特異点を固定するので, X にはくとも 8個固定点をもつ。故に, (0.7) により, その位数はすべて 2 となる。 $M_\varphi(X)$ のねじれ部分群は \mathbb{C}^\times への単射があるから巡回群でなければならぬ。よって, $M_\varphi(X)$ のねじれ部分群は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ となる。特に $f_2 = f_3 = f_4$ である。 \square

この証明より, X には⑥図の様な configuration があれば, 次のみたす位数 2 の $\text{Aut}_n(X)$ の元があることもわかった。

$$f(H_i) = G_i, f(G_i) = H_i, f(D^{ij}) = D^{ji} \quad (i \neq j)$$

この自己同型は, $\mathcal{I}_m / \text{Aut}_n(X)$ の完全代表系を決める時にも用い

543. ([10] を参照)

参考文献.

- [1] Nikulin, V. On Kummer surfaces. *Math. USSR-Izv.* 9. 261-275 (1975)
- [2] " Finite groups of automorphisms of Kählerian surfaces of type $K3$. *Trans. Moscow. Math. Soc.* 38 71-135 (1980)
- [3] " Factor groups of groups of automorphisms of hyperbolic forms with respect to subgroups generated by 2-reflections, algebraic applications *J. Soviet Math.* 22. 1401-1475 (1983)
- [4] Shioda, T. On elliptic modular surfaces. *J. Math. Soc. Japan* 24. 20-59 (1972)
- [5] Shioda, T. The period map of abelian surfaces. *J. Fac. Soc. Univ. of Tokyo*, 25. 47-59 (1978)
- [6] Shioda, T & Inose, H. On singular $K3$ surfaces. *Complex analysis and algebraic geometry* Iwanami shoten, 119-136 (1977)
- [7] Cox, D. & Zucker, S. Intersection numbers of sections of elliptic surfaces. *Inv. Math.* 53. 1-44 (1979)
- [8] Hayashida, T. & Nishi, M. Existence of curves of genus two on a product of two elliptic curves. *J. Math. Soc. Japan* 17, 1-16 (1965)
- [9] Kodaira, K. On compact analytic surfaces II *Ann. of Math.* 77 563-626 (1963)

[10] Ogus, K. On Jacobian fibrations of $K3$ surfaces whose Picard number is 18. (preprint.)

[11] Pjateckiĭ-Sapiro, I.I. & Safareviĭ, I.R. A Torelli theorem for algebraic surfaces of type $K3$. Math. USSR-Izv. 5, 547-587 (1971)

[12] 向井茂 $K3$ 曲面の自己同型群について「多様体の特異点の最近の成果」数研講究録 (日本語)