曲面のChern類の不等式とeffective Mordell theorem

都立大・理　宮岡洋一

代数曲面の二つのChern数 c_1^2 と c_2 の間の基本不等式

$$c_1^2 \leq \mathrm{Max}\{3c_2, 2c_2\}$$

が種々の応用を有することは周知のことと思う。本稿では，effective なMordell 型定理もまた上記不等式，または類似の K_X^2 の上からの評価から自然に導かれることを見ていきたい。

1. 一般的事実。

S は標数0の体 k 上の完備代数曲線(geometric case)，もしくは代数体 K の整数環 $\mathcal{O}_K$ のスペクトル $\mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$ (arithmetic case)とする。S 上のファイバー空間 $\pi : X \longrightarrow S$ は以下の性質をもつものと仮定する。

a) X は2次元の regular scheme。

b) π は proper, flat, surjective で，すべてのファイバーは geometrically connected。

c) X は S 上の曲線として semistable。特に f のすべてのファイバーは被約な正規交差因子で，X の第一種例外曲線がファイバーに含まれることはない。

d) π の一般のファイバーの種数 g は2以上。

一般に π は特異ファイバー（= bad reduction）をもつ。$s \in S$ 上のファイバー X_s の一般 Jacobi 多様体 $\mathrm{Jac}(X_s)$ は，条件 c) から $\varepsilon = \varepsilon(s)$ 次元の代数トーラス（s に対応する体が閉体なら $\mathbb{G}_m^{\varepsilon}$）による Abel 多様体の拡大となっている。明らかに $0 \leqq \varepsilon \leqq g$ であり，$\varepsilon(s) = 0$ と X_s が非特異ファイバーであることとは同等である。また X_s の二重点の数を $\delta = \delta(s)$ とおくと，$\varepsilon \leqq \delta$ である。X_s の既約成分 Γ が (−2)-curve であるとは，$\Gamma \cong \mathbb{P}^1$ で Γ と他の X_s の成分が2点で交わっていることをいう。$\delta - \varepsilon$ は X_s 上の (−2)-curve の個数と等しい。

Geometric case は無論のことであるが，arithmetic case においても交点理論がある（Arakelov theory）。それによれば，π の section $\sigma : S \longrightarrow X$ の像 $C = \sigma(S)$ に対して次の等式（adjunction formula）が成立する。

$$(C, C) + (\omega_{X/S}, C) = 0 .$$

ここに $\omega_{X/S}$ は X の S 上の相対標準束である。蛇足であるが arithmetic case では，絶対標準束 ω_X の自明な定義はないことを注意されたい。

種数 g の安定曲線の"universal family" $\pi : \overline{\mathcal{C}}_g \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_g$ から自然に $\overline{\mathcal{M}}_g$ 上の直線束 $L = \Lambda^g(\pi_* \omega_{X/S})$ が得られる。Jacobian をとる操作により $\overline{\mathcal{M}}_g$ から principally polarized semi-abelian variety の moduli 空間 $\overline{\mathcal{A}}_g$ への generically 1－1 写像が得られるが，L は weight 1 の Siegel 保型形式の直線束の $\overline{\mathcal{M}}_g$ への制限となっていて，したがって geometric case で自然な写像 $S \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_g$ が定値写像の場合（isotrivial case）を除けば $(\det \omega_{X/S})^{\otimes m}$ $(m \gg 0)$ は十分多くの section をもち，

$$(\omega_{X/S}, C) = -(C.C) > 0$$

がわかる。

Geometric case においては通常の Chern 数は以下の公式により $\omega_{X/S}$, g, $p = g(S)$, δ で書表すことができる。

$$c_1^2(X) = (\omega_{X/S}, \omega_{X/S}) + 8(g-1)(p-1),$$
$$c_2(X) = \sum_{s \in S} \delta(s) + 4(g-1)(p-1).$$

2. Effective Mordell in Geometric Case (1)

Geometric case で S 上の曲線(族) X は isotrivial ではないと仮定しよう。

Σ を π の section 全体のなす集合とすると，Σ が有限集合であることは Grauert と Manin が独立に証明した。彼らの方法からはでてこない $\#\Sigma$ の具体的評価を本節で与える。

まず cycle map $c: \Sigma \longrightarrow H^2(X, \mathbb{Q})$ ($c(C)$ は $C \in \Sigma$ の Chern 類) が単射であることを注意する。実際，$c(C) = c(C')$ ならば，$(C, C') = (C, C) < 0$，よって $C = C'$ である。したがって $c(\Sigma) \subset H^2(X, \mathbb{Z})/\mathrm{torsion} \subset H^2(X, \mathbb{Q})$ の個数を評価すればよい。

今 $C \in \Sigma$ に対し，$(\omega_{X/S}, C)$ が上から C によらない定数 M でおさえられている，としてみる。

$$a = a(X, S) = (\omega_{X/S}, \omega_{X/S}) > 0$$

とおく。$x = x(C, X, S) = (\omega_{X/C}, C)$ とおくと，

$$c(X) = \frac{x}{a} c(\omega_{X/S}) + D,$$

$$c(\omega_{X/S}) \cdot D = 0, \qquad D \in \frac{1}{a}(H^2(X, \mathbb{Z})/\mathrm{tor}).$$

Hodge index theorem によると，Néron - Severi 群

$$NS(X) \subset H^2(X, \mathbb{Q})$$

は $\mathbb{Q}$ を tensor すると，$\mathbb{Q}\, c(\omega_{X/S}) \perp V$ の形で，V は cup 積に関して負定値である。特に $D^2 \leqq 0$ である。一方 adjunction formula から

$$(C.C) + (\omega_{X/S}, C) = \frac{x^2}{a} + x + D^2 = 0$$

であり，$x \leqq M$ を考慮すれば $D^2 \geqq -\frac{M^2}{a} - M$。したがって，可能な $D \in \frac{1}{a} H^2(X, \mathbb{Z}) \cap V$ の個数は，M，a，および X の Picard 数 $\rho = \rho(X)$ の函数 $\beta(M, a, \rho)$ 以下である。また $x = (\omega_{X/S}, C) \in \mathbb{N}$ だから，結局

$$\# \Sigma \leqq \tilde{\beta}(M, X, S) = M\, \beta(M, a, \rho).$$

以上，$(\omega_{X/S}, C)$ に上限 M があることから effective Mordell が従うことを示した。次は M を実際求めてみる。いくつか方法が考えられるが最も簡明かつ最良の評価は，酒井による対数的 Chern 数の不等式から得られる。簡単のため，$g(S) \geqq 1$ とする（$S = \mathbb{P}^1$ なら，一般の4点で分岐する二重被覆 $S' \longrightarrow S$ による base change $\pi' : X' \longrightarrow S'$ を考れば，$(\omega_{X/S}, C) = \frac{1}{2}(\omega_{X'/S'}, C')$ 等より $g(S) \geqq 1$ の場合に帰着する）。この時，$\kappa(X) = 2$ となっ

て，不等式

$$c_1^2(\Omega_X^1(\log C)) \leqq 3c_2(\Omega_X^1(\log C))$$

が成り立つ（酒井）。Adjunction formula，および等式

$$\begin{aligned} c_1(\Omega_X^1(\log C)) &= \omega_{X/S} + \pi^*\omega_S + C, \\ c_2(\Omega_X^1(\log C)) &= c_2(X) + 2p-2 \\ &= \sum \delta(s) + 2(2g-1)(p-1) \end{aligned}$$

を用いてこれを書き直すと，求める評価が得られる：

$$(\omega_{X/S}.C) \leqq -\omega_{X/S}^2 + 3\delta + 4(2g-1)(p-1).$$

3. Effective Mordell in Geometric Case (2).

Arithmetic case との analogy を重視する立場からは，Ω^1，$\Omega^1(\log C)$ 等，高度に幾何的な対象より，可能な限り標準的なもの，相対標準束とか δ，ε といった fibre からの情報のみで議論できたほうが，応用がきくので好都合である。

前節では，いわば X から C を除去した開多様体を考察することで C にかんする情報を得たのであるが，完備多様体の category に留まりつつ C の情報を反映さすには，C

で分岐する被覆をとればよい。最も単純なのは C に沿って分岐する巡回被覆であるが，残念ながらそれは不可能である。実際，一般のファイバー X_s 上 C は一点であるが，コンパクト Riemann 面の分岐巡回被覆は必ず 2 つ以上分岐点をもたなくてはならぬことが

$$H_1(\text{Riemann面} \setminus \{\text{一点}\}) \cong H_1(\text{Riemann面})$$

からすぐわかる。しかし，non-abelian な被覆を許容すれば C と有限個のファイバーだけで分岐する有限次被覆面が構成できる。以下に述べる方法は，小平による正指数をもつ代数曲面の例を見直して A.N. Parshin が考案した。

一般の $s \in S$ に対し，$C \cap X_s$ を基点とする Albanese 写像 α_s で X_s を $Jac(X_s)$ に埋め込む。Abel 多様体 X_s には n 倍写像があるから，それで X_s をひきもどすと，étale なアーベル被覆 $\tilde{X}_s \longrightarrow X_s$ が得られる。$C_s \cap X_s$ の逆像は n^{2g} 個の点となるから，そこで分岐する n 次の巡回被覆 $Y_s \longrightarrow X_s$ が標準的方法で構成できる。以上の操作はすべて $k(S)$ 上定義されており，$\{Y_s\}$ は S 上の family となる。したがって，適当な非特異モデル Y をとることで被覆面が得られる。作り方から $Y \longrightarrow X$ の分岐は C および特異ファイバー(の部分集合)の上にあり，写像度は n^{2g+1}。

Y は S 上のファイバー空間である。その一般のファイバーの種数 g' は

$$2g'-2 = n^{2g+1}(2g-2)+(n-1)n^{2g}$$

で与えられる。また $\pi' : Y \to S$ の特異ファイバーは，$\pi : X \longrightarrow S$ のそれの上にしかない。しかし，勿論 Y は一般には S 上の semistable curve ではないので，適当な base change $T \longrightarrow S$ により semistable reduction $Z \xrightarrow{\pi'} T$ をとる。$f : Z \longrightarrow X$ を自然な有理写像，$\tilde{C} = f^{-1}(C)$ とすると，log 分岐公式より

$$\begin{aligned} &K_Z + \tilde{C} + \sum(\pi' \text{の singular fibre}) \\ &\qquad = f^*(K_X + C + \sum(\pi \text{の singular fibre})) \end{aligned}$$

となって，これから相対 log 分岐公式

$$\begin{aligned} &K_{Z/T} \equiv f^*\left(K_{X/S} + \frac{n-1}{n}C - r\,(\text{fibre})\right), \\ &\qquad r \in \mathbb{Q}, \quad 0 \leqq r < \#\{\text{singular fibre of } \pi\} \end{aligned}$$

が得られる。この Z に対して不等式 $c_1^2 \leqq 3c_2$ を適用すると，$(\omega_{X/S}, C)$ のある種の評価がでる。n が陽に出てきてわずらわしいが，$n \longrightarrow \infty$ のとき，この評価は

$$(\omega_{X/S}, C) \leqq -\omega_{X/S}^2 - 4(2g-1)(p-1) + \frac{3}{n^{2g+1}}\sum_{t\in T}(\delta(t)+2g-1) + C\left(\frac{1}{n}\right)$$

の形である。ここで $\delta(t)$ は一般に上からおさえる有効な方法がないことに気付き，悩ましいのだが，この難点は不等式を orbifold に対するものにすることで解決して，

$$(\omega_{X/S}, C) \leqq -\omega_{X/S}^2 - 4(2g-1)(p-1) + \sum_{s\in S}(\varepsilon(s)+2g-1)$$

が最終点に得られる。

以上の概略を反省してみると，証明に用いた不等式 $c_1^2 \leqq 3c_2$ の係数 3 は本質的ではないことがわかる。係数を大きくすれば評価は悪くなりこそすれ，それなりの effective Mordell が得られることにはかわりない。

4. Arithmetic case。

前節で解説した Parshin の被覆 $Z \longrightarrow X$ は arithmetic case においても考えることができ，相対 log 分岐公式

$$\omega_{Z/T} \equiv f^*(\omega_{X/S} - \varepsilon(\text{fibre}))$$

その他も同様に成立する（ことが証明できる）。したがって，

$$(\omega_{X/S}, \omega_{X/S})^2 \leq \text{function in} \left\{ \begin{array}{l} g,\ d_{K/\mathbb{Q}},\ |K:\mathbb{Q}|,\ \varepsilon(\nu), \\ \mathcal{M}_g \otimes \mathbb{C} \text{ 上の連続函数} \end{array} \right\}$$

の形の不等式が成立すれば，

$$(\omega_{X/S}, C) = -(C, C)$$

の評価が得られることは前と同様である。$-(C, C)$ は本質的に logarithmic Néron-Tate height であり，Weil height と Néron-Tate height の間には effective な比較定理がある。つまり X の K有理点 C を $\mathbb{P}^N(\mathcal{O}_K)$ の点と思ったとき，座標の最大値がおさえられたことになる。言いかえると，上にあげたような $\omega_{X/S}^2$ に関する不等式は，有理点の height と個数の評価を導く。