代数幾何学シンポジウム記録
1989年度　pp.144-152

永田さんの環論における業績とその影響

名古屋大学理学部　松村英之（Hideyuki Matsumura)

Emmy Noether がイデアルの昇鎖律を導入して，ネーター環の理論が始まったのが１９２１年である．それを可換環論の歴史の始まりとすれば，今年までに７０年が流れたわけであるが，永田さんがこの方面に精力を注いだのは１９５０年から６０年にかけてであるから，丁度７０年の真ん中の１０年と思ってよい．一方，１９５５年頃から可換環論はホモロジー代数の手法の導入やスキーム理論の影響によって，新しい時代に入った．永田さんは新旧の両時代の接点に現われて，どちらの面でも大きな業績を残したが，どちらかといえば前期の（つまりイデアル論的手法の）理論の完成者としての姿がよく知られている．

永田さんの環論における主な論文，本を挙げてみると，

[1] On the structure of complete local rings,
NMJ (=Nagoya Math. Journal) 1 (**1950**), 63-70.

[2] On the theory of Henselian rings,
ibid. 5 (**1953**), 45-57.
--- II, ibid. 7 (1954), 1-19,
---III, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 32 (1959-60), 93-101.

[3] Some remarks on local rings. NMJ 6 (**1953**), 53-58.

[4] On the derived normal rings of Noetherian integral domains, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 29 (**1955**), 293-303.

[5] An example of normal local ring which is analytically ramified, NMJ 9 (**1955**), 111-113.

[6] The theory of multiplicity in general local rings. Proc. Intern'l Symp. Tokyo-Nikko **1955**, pp.191-226.

[7] On the chain problem of prime ideals, NMJ 10 (**1956**), 51-64.

[8] A jacobian criterion of simple points, Illinois J. Math. 1 (**1957**), 427-432.

[9] A general theory of algebraic geometry over Dedekind domains. II, Amer. J. Math. 80 (**1958**), 382-420.

[10] On the closedness of singular loci, Publ. IHES, 2 (**1959**), 29-36.
[11] Local Rings, Interscience, New York, **1962**. 書き終えたのは**1960**.

そのほか，代数幾何学の分野でも，射影空間に入らないアブストラクト多様体の構成とか，ヒルベルト第１４問題の否定的解決（１９５８）とかの大きな業績がこの間に得られているが，ここでは環論に限って，いくつかのトピックを取り上げて解説しよう．

１．Hensel 局所環．

ネーター局所環 (A, m,k) が Hensel 局所環であるとは，

（１）Aに係数を持つモニック多項式 f (x) の k [x] における像が互いに素な二つのモニック多項式の積に分解するとき，f 自体がそれに応じてA[x]で分解する

ことをいう．この定義は

東屋：On maximally central algebras, NMJ 2 (1951)

によって与えられた．ほかにも幾つかの同値な定義がある．少し挙げれば

（２）Aの任意の module-finite な拡大環Bと，Bの任意のイデアルJと，B/J の冪等元$\bar{e}$とに対して，Bの冪等元 e で$\bar{e}$の代表元になっているものがある．（東屋loc.cit)

（３）（Aが normal domain のとき）Aのどんな integral extention も local ring である．

（４）（Aが一般のとき）Aの任意の integral な拡大環Bはlocal rings の直積である．（Raynaud, Anneaux Locaux Henseliens, Springer Lecture Notes 169 (1970).)

永田さんは[2]において，任意の局所環のHensel 化を定義しその存在を証明した．完備な局所環はHensel 環であるから，局所環の完備化はHensel 環になるが，Hensel 化は最初の環の上に代数的で，完備化よりずっと小さくてすむ．

Hensel 環の理論はGrothendieck, M.Artin によってetale cohomology の理論に用いられたことは良く知られている.

この理論は，後に局所環でない場合にも次のように拡張された.

ring A とSpec A の閉集合 V が与えられた時， A がVでHenselian であるとは，次の条件が成り立つことである.

$F(x) \in A[x]$， $F(0)=0$ on V， $F'(0)$ は V上で unit,

V上で0になる元a A があって $F(a)=0$ となる.

これは Kurke が与えた定義である． Cf. H. Kurke, G. Pfister und M. Roczen, Henselsche Ringe und Algebraische Geometrie, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1975, p.49.

この時，$V=V(I)$ なら $I \subseteq \mathrm{rad}(A)$ となる．なぜなら， $a \in I$ に対して $F(x)=(1+a)(1+x)-1$ を考えれば，$(1+a)$ が Aのunitであることがわかるから.

この拡張された意味でのヘンゼル化については，上記の本の外

S. Greco: Henselization of a ring with respect to an ideal,

Trans. AMS 144 (1969), 43-65

を挙げておく． Kurke 達の本はところどころあいまいな点がある．局所環の場合に限れば，永田さんの Local Rings と， Raynaud の Springer LN 169 を併読すれば十分であろう.

2．素イデアル鎖の問題

可換環環 A の素イデアルの列 $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n$の長さは n と定義される． 素イデアル$P \subset Q$ が与えられたとき，P から Q にいたる飽和された（つまり，もはや中間に素イデアルを挿入することができない）素イデアル鎖の長さが，P と Q だけによって定まるとき，A は catenary であると言われる． A の中の素イデアル鎖の長さの sup をA の Krull次元といいdim A で表わすことは良く知られている．ちょっと考えればわかるように，2次元までの環はcatenary である． A のみならず A上の多項式環がすべてcatenary であるとき，A はuniversally catenary であるといわれる.

ネーター環はすべてcatenary　であろうかというのは，多くの有名な代数学者がアタックして成功しなかった大問題であった．1955年に来日した Emil Artin は永田さんにこれについて意見を聞いた．永田さんは，non-noetherian なnon-catenary ring の存在は知っているが，ネーター環の場合は肯定的でありそうに思うと答え，それから本気でこの問題を考え始めた．いったんは証明できたと思ったが，チェックしてみると誤りが見つかった．その箇所を良く調べているうちに何と反例ができてしまった．これは永田さんが作った多くの反例（Local Rings の巻末に，Examples of bad noetherian rings としてまとめてある）の中でも最も有名なものである．これを説明しよう．

まず，代数的閉体 k を基礎体とするアフィン多様体 V の２点 p，q をくっつけて新しいアフィン多様体を作る技巧について述べよう．V の座標環を A，p と q に対応する A の極大イデアルを P,Q とする．$A/P=k=A/Q$ であるから $A=k+P=k+Q$. このとき　$B=k+P\cap Q$ とおくと，B は（A の元を V の上の関数とみて）点 p と点 q とで同じ値をもつ関数の全体である．B を座標環とするアフィン多様体が求めるものである．(B が k 上に有限生成であることは容易に証明できる．）例：直線上の点 $x=0$ と $x=1$ とをくっつければ，$B=k[x(x-1), x^2(x-1)]$ を座標環とする，２重点をもつ曲線　$y^3-z^2+yz=0$ がえられる．

永田さんは，k 上の２変数有理関数体　$k(x,z)$ の部分環 A で，$A/P=A/Q=k$, $\mathrm{ht}\,P=1$, $\mathrm{ht}\,Q=2$ となるような素イデアル P,Q をもつようなものを構成した．A はもちろん k 上有限生成ではない．$\mathrm{Spec}\,A$ は，点 P のまわりでは曲線のようで，点 Q のまわりでは曲面のようである．P と Q で A を半局所化する．即ち $S=(A-P)\cap(A-Q)$, $C=A_S$ とおくと C は２次元のネーター半局所整域になる．C の極大イデアル PC,QC を上と同様にしてくっつける，即ち $B=k+PC\cap QC$ を作れば，B 自身は２次元ネーター局所整域だからcatenary であるが，$B[X]$ はcatenaryでない．即ち B はuniversally catenary　ではないことが証明できる．

この $B[X]$ を正規化するとcatenaryになる．むりにくっつけたのが離れるからである．それでは，normal noetherian non-catenary domain が存在するかと言う問題が生ずる．これもむずかしい問題であ

ったが，２０年以上を隔てて小駒（Non-catenary pseudo-geometric normal rings, Jap.J.Math., 6 (1980)) においてそのような例が構成された． Heitman: Rocky mountain J. Math. 12(1982) は小駒氏の例をすこし簡単にした．

永田さんの２点をくっつける技巧を用いて，S. Greco は次のような例を作った．３次元の半局所整域 (A,I) で，I進位相で完備であり，A/I は excellent したがって universally catenary だが， A 自身は catenary でない．（NMJ 87(1982).)

素イデアル鎖に関しては，永田さんの研究から出発して，Grothendieck や Ratliff が精密な研究をした．殊にRatliffの次の２つの定理は優れたものである．

定理．ネーター局所環（R， m）が catenaryであるためには，すべての素イデアル p について ht p + dim R/p = dim R が成り立つことが必要十分である．(1971)

定理．ネーター局所環（R， m）がuniversally catenaryであることは，次のどの条件とも同値である：
（１）すべての素イデアル p について，A/p の完備化が等次元である（即ち，どの極小素イデアルで割っても次元が等しい．）
（２）１変数多項式環 R[X] がcatenaryである．（1972)

Ratliff たちはその後も研究を続け，素イデアル鎖に関するいろいろな予想を発表しているが，最近西村純一氏が構成した例が正しければこれらはすべて否定的に解決される．

４．永田環（または pseudo-geometric rings).

ネーター局所整域 A の，商体の中での整閉包をA とする．A の完備化が冪零元をもたないならば(即ちA が analytically unramified ならば) Aが有限A加群である．このことは Krull がすでに知っていた．Chevalleyは

geometric local ring という局所環のクラスを定義し，geometric local domain は analytically unramified であることを証明した．

永田さんは正規ネーター局所整域 A で完備化が冪零元をもつものを構成した[5]. 一方，すでに[3] で，ネーター局所整域 A に関する次の条件を考え，これが analytically unramified のための十分条件であることを示している：

（＊）すべての素イデアル p に対し，A/p は，整拡大の有限条件をみたす．（整域R が整拡大の有限条件をみたすとは，R の商体の任意の有限次拡大体L におけるR の整閉包が有限R 加群であることをいう．）

さらに，Local Rings を書いたとき，その中で（＊）をみたすネーター局所環をpseudo-geometric ring と名付けて，その一般論を展開した．この概念は Grothendieck によっては universally Japanese ring と呼ばれた．今日では Nagata ringと言う名が定着しつつある．永田環のクラスはいろいろ良い性質を持っている．たとえば

Aが永田環ならばその剰余環，素イデアルによる商環，A上に有限生成の環も永田環である．（LR p.131-133）

完備局所環は永田環である．

A が永田環で I がそのイデアルならば，A の I 進完備化 $\widehat{(A,I)}$ も永田環である（J．Marot, 1973)．

しかし局所環が永田環でかつ正規であっても，その完備化が正規であるとは限らない．そこで Grothendieck は永田環よりさらに狭いクラスである excellent ring という概念を定義した．このクラスに属する局所環においては正規とか被約（冪零元を持たないこと）とかの性質が完備化に遺伝する．完備局所環や代数幾何学的な環はexcellentである．しかし極大でないイデアルによる完備化ではexcellentの性質が保たれるかどうか，まだ完全にはわかっていない．（半局所環のとき，および有理数体を含むときには Rotthaus によって1980年までに証明された．）

excellent ring の一番大事な性質は，（極大イデアルによる局所化の）完備化との関係がうまくいっている（ formal fibres が geometrically regular) ことである．永田環であってこの性質を持たないような局所環をはじめて構成したのがドイツ（現在アメリカ）の女流数学者Cristel Rotthaus である．彼女の方法は極めて複雑だが強力なものであり，上記の小駒氏の反例もこの方法を発展させたものである．

5．ネーター環の整閉包

A をネーター整域， A* をその商体の中での整閉包とする．

dim A＝1 ならば A と商体 の間の任意の環はネーターである（秋月，コーエン）．

dim A＝2 ならば A* はネーター環である（局所環のとき森誓四郎，一般のとき永田）が，A と A* との間の環は必ずしも相でない（永田）．

dim A＝3 以上のときは，A* がネーター環でない例がある（永田）．

しかし，A* はつねにクルル環である（局所環のとき森誓四郎，一般のとき永田）．クルル環は離散的付値環の交わりとして表わせるから，これは重要な定理であり，証明も難しい．

6．重複度

局所環の重複度は Chevalley によって導入されたが，彼の定義はわかりにくいものであった． P.Samuel : La notion de multiplicite en algebre et en geometrie algebrique (1951) によってヒルベルト関数を使う現代的な定義が与えられた．これは永田さんが研究を始めた頃のことであり，永田さんは重複度の理論をさらに整備しながら，主要な武器の一つとして使うようになる．今日極めて重要になっている Cohen-Macaulay 環の理論は，１９５５年頃に，一方ではSamuel や永田さんによって重複度を用いて定義され，他方では Auslander, Buchsbaum, Northcott, Rees, Serre などによって正則列の概念を使って定義された．ネーター局所環 R のパラメーター系で生成されたイデアル q に対し，一般に

$$e(q) \leqq \ell(R/q)$$

が成り立つ．ここに e(q) は q の重複度であり， $\ell(\ \ )$ は長さを表わす．ここで等号が成り立つとき，R を Cohen-Macaulay 環と呼ぶ．一つの q について等号が成り立てばどんな q に対しても成り立つ．また，このことと，いわゆる マコーレイの純性定理（ unmixedness theorem ）が成り

立つこととは同値である．永田さんはこれらのことを証明した（[6]）．

のちに，Buchsbaum は
「ネーター局所環Rに対して，差 $\ell(R/q)-e(q)$ は q のとり方によらないだろうか」
という問題を提出した． Vogel はこれに対する反例をつくったが，そこにとどまらず，さらに，この差が q のとり方によらないようなネーター局所環R を Buchsbaum ring と呼んで，その性質を研究した．この試みは大いに成功し， Vogel, Stückrad, 後藤などの手によって美しい理論に成長した． Buchsbaum局所環R の，極大でない素イデアル p による局所化はすべて Cohen-Macaulay 環になるから，Buchsbaum 環 は Cohen-Macaulay環にかなり近いことがわかる．
Cf. Stückrad - Vogel : Buchsbaum Rings and Applications, VEB Deutscher Verlag d. Wissenschaften, Berlin 1986.

7. Closedness of Singular Locus

論文 [8] では，体 k 上の冪級数環 $A=k[[x_1,\dots,x_n]]$ の素イデアル $p\subset q$ に対し， A_q/pA_q が正則局所環になる（すなわち，'algebroid variety' Spec(A/p) において '点' q/p が '特異点' でない）ための 'ヤコビアン判定法' が次の形で与えられ証明されている．
p の生成系 $f_1,\ \dots,\ f_r$ を取る．ヤコビアン行列 $J(f_1,\dots,f_r)$ は行列 $(\partial f_i/\partial x_j)$ を表わす．k が標数 p のとき，k^*を k の部分体で $[k:k^*]<\infty$ をみたすものならば，k のk^*上の derivations の加群 $\mathrm{Der}_{k^*}(k)$ の基底を $D_1,\dots,D_s$とし，f_i の係数に D_νを施したものを $f_{i\nu}$ として，行列 $(\partial f_i/\partial x_j,\ f_{i\nu})$ を $J(f_1,\dots,f_r\,;k^*)$ で表わすことにする．これは所謂 mixed Jacobian matrix である．

定理.
（1） A/q が k 上 separably generated なら（即ち A/q のパラメーター系 $y_1,\dots\dots,y_d$ が存在して A/q が k[[y]] 上に分離的なら），
A_q/pA_qが正則 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rank}\,(J(f_1,\dots\dots,f_r) \bmod q)=\mathrm{rank}\,p$.

（2） k が標数 $p>0$ なら，
A_q/pA_qが正則 $\Leftrightarrow$ k の部分体k^*で $[k:k^*]<\infty$ をみたすものがあって $\mathrm{rank}\,J(f_1,\dots,f_r\,;k^*)=\mathrm{rank}\,p$ が成り立つ．

この定理はザリスキーが代数多様体に対して与えたもの（上の A が冪級数環でなく多項式環）の拡張であるが，証明は（標数 p で $[k:k^p]=\infty$ のとき）きわめて難しい． [8] でもなお分かりにくい所があり， Grothendieck は EGA で永田さんの証明の細部を自分の流儀で補った．私の可換環論（共立）でも Grothendieck の方法に従ったが，相当大掛かりな証明であり，簡単化が望まれる．とにかく，これから次の定理が容易に得られる．

定理．を完備ネーター局所環とし p をの素イデアル，R＝A/p とする．
このとき，$\mathrm{Reg}(R)=\{Q\in \mathrm{Spec}(R) \mid R_Q$ が正則$\}$ は Spec(R) の開集合である．

[10] では，任意の有限生成 A 代数 R に対して Reg(R) が Spec(R) の開集合になるようなネーター環 A のクラスを考えその性質を調べる．この研究は Grothendieck によって excellent ring の理論の中に取り入れられた．また，Grothendieck やそのほか多くの人によって，正則性以外のいろいろな環論的性質についても，それらに対応する loci が開集合になるかという問題が研究された．

まだ小さな業績は沢山あり，ヒルベルト１４問題のように環論的にも重要なものもあるが，一応これで終わりにする．最後にもう一度強調しておきたいのは，上記の研究がなされた当時，可換環論の本はほとんどなかったこと，正則局所環の局所化が正則かどうかすら１９５５年頃までは知られていなかったことである．