1989年度 pp.134-143

General Néron Desingularization.

高知大理 小駒哲司 (Tetsushi Ogoma)

本稿を通して、常に次の状態の下で考える。

*) A-algebra A' と、finite type A-algebra B 及び、A-hom $B \longrightarrow A'$ が与えられている。

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr] & \\ A \arrow[ur] \arrow[rr] & & A' \end{tikzcd}$$

General Néron Desingularization が成立とは次のことである。

G.N.D. $A \longrightarrow A'$ が regular hom. であれば、$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[dr] & B' \arrow[d] \\ & A' \end{tikzcd}$ を可換にする finite type smooth A-algebra B' が存在する。

ここで、$A \longrightarrow A'$ が regular hom. であるとは、flat であって、各点 $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$ での fibre $A' \otimes_A k(\mathfrak{q})$ が、$k(\mathfrak{q}) = A_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}$ 上 geometrically regular となることである。
なお、regular hom. であることと、各 $P \in \operatorname{Spec} A'$ について、$A \longrightarrow A'_P$ が formally smooth であることは同値であることが知られている[1]。

さて、G.N.D が成立するかが、この話のテーマであるが、先ずこれが成立する意義を見ておこう。その為に、代数的近似定理について述べる。

<u>A.P.</u>　環 A 上の多項式の組 $f_1, \ldots, f_m \in A[X_1, \ldots, X_n]$ が、A の $\mathfrak{a}$-adic completion $\hat{A} = (A, \mathfrak{a})^\wedge$ に根 $x = (x_1, \ldots x_n)$ をもてば、(i.e. $x_i \in \hat{A}$ で $f_j(x) = 0$ $j = 1, \ldots m$) どのような自然数 c についても、x と高々 $\mathfrak{a}^c \hat{A}$ しか違わない $f_j = 0$ の根 $y = (y_1, \ldots, y_n)$ が、A に存在する。(i.e. $y_i \in A$ で $f_j(y) = 0$ & $y_i - x_i \in \mathfrak{a}^c \hat{A}$)

これについては、M. Artin の結果がある。

Theorem [2]　A が excellent Dedekind 環上有限生成な環 C の henselization $A = (C, \mathfrak{a})^h$ であれば、A はイデアル $\mathfrak{a}A$ について性質 <u>A.P.</u> をもつ。

そして更に次の予想を述べている。

Conjecture　$(A, \mathfrak{a})$ が henselian で、$A \longrightarrow \hat{A}$ が regular hom. となれば、A は性質 <u>A.P.</u> をもつであろう。

さて、G.N.D. が成立すれば、この Conj. は肯定的であるということを見よう。(c.f. [9])

$f_j(X)$ の根 x の i 成分 $x_i\in\hat{A}$ に変数 X_i を対応させることにより、A-hom. $B=\dfrac{A[X_1,\dots,X_n]}{(f_1,\dots,f_m)}\longrightarrow\hat{A}$ が induce されるが、G.N.D. を適用すれば、

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[dr] & C \arrow[d] \\ & \hat{A} \end{tikzcd}$$

なる finite type smooth A-algebra C が存在する。これから

$$\begin{tikzcd} & C/\mathfrak{a}C \arrow[dr] & \\ A/\mathfrak{a} \arrow[ur] \arrow[rr, phantom, "\simeq"] & & \hat{A}/\mathfrak{a}\hat{A} \end{tikzcd}$$

となるが、$(A,\mathfrak{a})$ は henselian, $A\longrightarrow C$ は smooth より $C/\mathfrak{a}C\longrightarrow A/\mathfrak{a}$ は A-hom として $C\longrightarrow A$ へもち上がることが、Artin 及び Elkik によく使われている議論からわかる。[2][4] よって合成写像 $B\longrightarrow C\longrightarrow A$ の X_i の像を y_i としてやれば、$y=(y_1,\dots,y_n)$ が f_j の根となることがわかる。y が x に十分近いという条件は $x_i=x_i^0+\sum_{j=1}^{t}a_{ij}Z_{ij}$, $x_i^0\in A$, $a_{ij}\in\mathfrak{a}^c$, $z_{ij}\in\hat{A}$ と書き改めて、z_{ij} の方程式として前の議論を使えば、この条件も同時に付け加えられることがわかる。

G.N.D が成立する系として更に(実は Cor.1 は強 A.P. が成立することを言う必要があるが)。

Corollary 1. [9] $(A,\mathfrak{m})$ が excellent hensel local unique factorization domain ならば、その完備

化 $\hat{A}$ も U.F.D. になる。

U.F.D. の完備化が U.F.D. にならない例は、P. Samuel によって作られているが、この方向の定理としては、これが最良のものの一つと思われる。

Corollary 2 [10] 体を含む regular local ring R 上の多項式環 $R[X_1, .. X_n]$ の finite projective module は、free である。

この証明は、G.N.D. を使って、R が affine 環の場合に帰着させ、Lindel の結果 [5] を適用するものである。Bass-Quillen 予想は、体を含むという条件をつけない形のものであるが、G.N.D. を適用するには、体を含んでいないとうまくいかない。

さて、G.N.D. については、D. Popescu による論文 [8] [9] があるが、M. Artin, C. Rotthaus 達には受け入れられていない。c.f. [3]. しかしながら、彼のアイデアは、解決の方向を示していると思われるので、彼のアイデアと論文における問題点、及びその修復の方法について、雰囲気を話したいと思う。(修復の証明の詳細は [7] 参照)

finite type A-algebra B を, $B = A[Y]/\mathfrak{g}$ と表わす。 m コの多項式 $f=(f_1,\ldots,f_m)$ ($f_i \in A[Y]$) について, Jacobian matrix $\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)$ の $m\times m$ 小行列式で生成される $A[Y]$ のイデアルを Δ_f と表わす。今 $H_{B/A} = \sqrt{\sum_{(f)\subseteq \mathfrak{g}} \Delta_f((f):\mathfrak{g})B}$ とおけば, $H_{B/A}$ は B の A 上の singular locus を定義することがわかる。但し, Σ は $f_i\in\mathfrak{g}$ となる組 $f=(f_1,\ldots,f_m)$ (m も任意) すべてを動かしたものの和である。($(f):\mathfrak{g} = \{g\in A[Y] \mid g\mathfrak{g}\subseteq (f_1,\ldots,f_m)A[Y]\}$)

さて, Popescu のアイデアの中心は, 次である。

Key Lemma. *) の下で, $d\in A$ は,

1) $\mathrm{Ann}_A d^e = \mathrm{Ann}_A d^{e+1}$, $\mathrm{Ann}_{A'} d^e = \mathrm{Ann}_{A'} d^{e+1}$ $(e\geq 2)$

2) $d \in \Delta_f((f):\mathfrak{g})B$ with $B = A[Y]/\mathfrak{g}$, $f=(f_1,\ldots,f_m)$, $f_i\in\mathfrak{g}$

なるものとする。 $\begin{tikzcd} \bar{B} \arrow[r] \arrow[dr] & E \arrow[d] \\ & \bar{A'} \end{tikzcd}$ を可換にする, finite type $\bar{A}$-algebra E が存在すれば, $\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[dr] & F \arrow[d] \\ & A' \end{tikzcd}$ を可換にして, $\pi^{-1}(H_{E/\bar{A}}\bar{A'}) \subseteq H_{F/A}A'$ なる finite type A-algebra F が存在する。但し, A-algebra C に対し, $\bar{C} = C/d^{4e+2}C$ であり, $\pi: A' \longrightarrow \bar{A'}$ は自然な準同型である。

$H_{B/A}A'$ の元について, 本質的には Key Lemma が適用されるというのが次である。

Lemma 1　$\mathfrak{d} \in H_{B/A} A' \cap A$ について，finite type B-algebra C と，B-hom $C \to A'$ で $\mathfrak{d}$, $H_{B/A} \subseteq H_{C/A}$ なる C が存在する。

Lemma 2　$\mathfrak{d} \in H_{B/A} \cap A$ について，finite type B-algebra D と B-hom $D \to A'$ で，Dのある表現 $D = A[Y]/\mathfrak{F}$ について，$\mathfrak{d} \in \Delta_f((f):\mathfrak{F})D$，$H_{B/A} \subseteq H_{D/A}$ なるDが存在する。

さて，$H_{B/A} A'$ が A' になる B-algebra B を捜すことが，G.N.D. を成立させることと同じになるから，$H_{B/A} A'$ について，A'におけるネーター帰納法を使う。一方，$\dim A'$ についても帰納法を考え，先ず A'が artin の場合に証明しておいて，2重の帰納法を使えば，$\mathrm{ht}(H_{B/A} A' \cap A) > 0$ となる場合には，Key Lemma と帰納法の仮定から，この場合はよいことがわかる。結局，問題となるのは，$\mathrm{ht}(H_{B/A} A' \cap A) = 0$ すなわち $A \to A'$ の fibre の次元が正となる所である。これについて，次の定理を使う。

Theorem (Nica-Popescu) [6]　$(A', \mathfrak{n})$ が complete local ring で，$A \to A'$ が formally smooth であれば，多項式環の局所化の inductive limit $\widehat{A} = \varinjlim A[X]_{\mathfrak{m}}$ と formally smooth な morphism $\widehat{A} \to A'$ により，

$(\mathfrak{n}\cap\hat{A})A' = \mathfrak{n}$ とできる。

formally smooth と言っても、標数正の場合は取扱いにくいものがある。例えば、kを標数 $p>0$ の体、t; x, y は変数で、$k(t) \longrightarrow k(x^{\frac{1}{p^\infty}})[[y]]$ を、$t \longmapsto x+y$ とするとこの morphism は formally smooth となる。定理は、A' が complete であれば、悪くてもせいぜい例くらいのものであるということを示していると思われる。

さて、Popescu の論文でのこの先の議論であるが、$H_{B/A}A'$ の minimal prime $\mathfrak{q}$ を取る。$k(\mathfrak{q}\cap A)\otimes_A A'_\mathfrak{q}$ は regular local となるから、その regular system of parameters へ写るように、変数 $X_1,\dots,X_s$ を付け加えた hom $A[X]\longrightarrow A'$ を作れば、$\mathfrak{q}$ での fibre の次元は 0 となる。$A'_\mathfrak{q}$ の system of parameters を成す $d_1,\dots d_t \in H_{B/A}A'_\mathfrak{q}\cap A[X]$ について、

$$\begin{tikzcd} & \overline{B[X]} \arrow[dr] & \\ \overline{A[X]} \arrow[ur] \arrow[rr] & & \overline{A'_\mathfrak{q}} \end{tikzcd}$$

を考える。$\left(\overline{C} = C\otimes_{A[X]} \dfrac{A[X]}{(d_1^e,\dots,d_t^e)}\right)$

一方、Nica-Popescu の定理より、$\hat{A}\longrightarrow \widehat{A_\mathfrak{q}}$ が formally smooth で fibre の次元が 0 となる $\hat{A}$ が存在し、又、$\overline{A'_\mathfrak{q}}$ は $\widehat{A_\mathfrak{q}}$ の homomorphic image となっているから、この formally smooth な morphism で近似することによって、$\overline{A[X]}$ 上 smooth な $\overline{B[X]}$ algebra が作れるという筋道なので

あるが、Lemma 1 及び Lemma 2 の変型などの考察が、全く欠落している。(誤解の為か、単に帰着できるという言い方で済ましている。) この点の指摘について、本人もその不十分性、及びその完全化は簡単なことではないことを認めている。

そこで、その微妙なところの証明をはっきりさせる為に、次の定義をする。

$H_{B/A}A'$ の minimal prime $\mathfrak{z}$ について、$(B; A, A')$ が $\mathfrak{z}$ で residual smoothing をもつとは、

A-準同型 $\varphi : A[X] \longrightarrow A'$ と $d_1, \dots, d_s \in A[X]$ が存在して、次の 1) 2) を満たす。

1) $\varphi(d_1), \dots, \varphi(d_s) \in H_{B/A}A'$ で、$A'_{\mathfrak{z}}$ の system of parameters となっている。

2) Lemma 1, 2 の変形 C, D

$$\begin{tikzcd} & B[X] \arrow[r] \arrow[dr] & C \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[dl] \\ & A[X] \arrow[u] \arrow[r] & A' & \end{tikzcd}$$

について、

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dr] & \\ \overline{D} \arrow[ur] \arrow[rr] & & \overline{A'_{\mathfrak{z}}} \end{tikzcd}$$

を可換にする smooth $\overline{A[X]}$-algebra E が存在する。($\overline{F} = F \otimes_{A[X]} \frac{A[X]}{(d_1^e, \dots, d_s^e)}$)

Nica-Popescu の定理より

Lemma 3. $A \longrightarrow A'_{\mathfrak{z}}$ が formally smooth ならば、$(B; A, \widehat{A'_{\mathfrak{z}}})$ は $\mathfrak{z}\widehat{A'_{\mathfrak{z}}}$ で residual smoothing をもつ。

が証明され，更に．

Lemma 4. $(B; A, \widehat{A_{\mathfrak{z}}})$ が $\mathfrak{z}\widehat{A_{\mathfrak{z}}}$ で residual smoothing を持てば，$\mathfrak{z}A'_{\mathfrak{z}}$ で $(B; A, A'_{\mathfrak{z}})$ もそうである。

Lemma 5 $(B; A, A'_{\mathfrak{z}})$ が $\mathfrak{z}A'_{\mathfrak{z}}$ で residual smoothing を持てば，$\mathfrak{z}$ で $(B; A, A')$ もそうである。

ということが証明される。この residual smoothing から，Key Lemma によって G.N.D. が成立することを証明することができる。

References

1. André, M., Homologie des algèbre commutatives, Springer-Verlag, Berlin 1974.
2. Artin, M., Algebraic approximation of structures over complete local rings, Publ. Math. I.H.E.S. 36 (1969) 23-58.
3. Artin, M.-Rotthaus, C., A Structure Theorem for Power Series Rings, Algebraic Geometry and Commutative Algebra in Honor of Masayoshi Nagata, Kinokuniya Tokyo (1987) 35-44

4. Elkik, R., Solution d'équations à coefficients dans un anneau hensélien, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 4^e ser. 6 (1973) 553-604.

5. Lindel, H., On the Bass-Quillen Conjecture concerning projective modules over polynomial rings, Invent. Math., 65 (1981) 319-323.

6. Nica, V. - Popescu, D., A structure theorem on formally smooth morphism in positive characteristic, J. Algebra 100 (1986) 436-455.

7. Ogoma, T., General Néron Desingularization based on the idea of Popescu.

8. Popescu, D., General Néron Desingularization, Nagoya Math. J. 100 (1985) 97-126.

9. Popescu, D., General Néron Desingularization and Approximation, Nagoya Math. J. 104 (1986) 85-115.

10. Popescu, D., Polynomial rings and their projective modules, Nagoya Math. J. 113 (1989) 121-128.