代数幾何学シンポジウム記録
1989年度 pp.93-107

$\mathbb{C}^3$ の compact 化

琉球大・教育　古島幹雄

§0. 序

X を n 次元連結コンパクト複素多様体とし，Y を X における解析的内部分集合とする．2つ組 (X, Y) が $\mathbb{C}^n$ の解析的コンパクト化であるとは，$X \setminus Y$ が $\mathbb{C}^n$ に双正則同型であるときをいう．このとき，F. Hirzebruch により次の問題が提起された．

<u>問題</u>　第2ベッチ数 $b_2 = 1$ なる $\mathbb{C}^n$ の解析的コンパクト化をすべて決定せよ．

まず，$n = 1$ のときは，容易に $(X, Y) \cong (\mathbb{P}^1, \infty)$ であり，$n = 2$ のときは，Remmert - Van de Ven [11] により，$(X, Y) \cong (\mathbb{P}^2, \text{a line } \mathbb{P}^1)$ であることが示された．

そこで，我々は，$n = 3$ の時を考察する．最近，Th. Peternell 等により，$n = 3$ の時，$b_2 = 1$ なる任意の解析

的コンパクト化 X は射影代数的であることが示されたらしいので，我々は，以後，X は射影代数的と仮定する．

注意　$n \geqq 4$ に対しては，X の射影代数性は未解決である．又，$b_2 = 2$ なる射影代数的でない $\mathbb{C}^3$ のコンパクト化が存在するので，$b_2 = 1$ の仮定は本質的である．

§1．基本的事実

(X, Y) を $b_2(X) = 1$ なる $\mathbb{C}^3$ の解析的コンパクト化で，とくに，X は射影代数的と仮定する．そのとき，次を得る．

命題 1.1 ([2])　(1) Y は X 上の既約で，豊富な因子である．

(2) $H^i(X;\mathbb{Z}) \cong H^i(Y;\mathbb{Z})$，とくに

(ア) $H^1(X;\mathbb{Z}) \cong H^1(Y;\mathbb{Z}) \cong 0$

(イ)
$$\begin{array}{ccc} H^2(X;\mathbb{Z}) & \cong & \mathbb{Z}\cdot c_1(\mathcal{O}_X(Y)) \\ \wr\| & & \\ H^2(Y;\mathbb{Z}) & \cong & \mathbb{Z}\cdot c_1(\mathcal{O}_Y(Y)) \end{array}$$

(3) $K_X = -r\cdot Y$ $(r > 0,\ r \in \mathbb{Z})$，但し，$K_X$ は X の標準因子．特に，X は第1種 Fano 3-fold である．

命題1.1-(3) における整数 $r>0$ を X の <u>index</u> という.

<u>定理</u> 1.2 (c.f. [8]).

(1) Index $r \geqq 4 \Rightarrow (X, Y) \cong (\mathbb{P}^3, \text{a plane } \mathbb{P}^2)$

(2) Index $r = 3 \Rightarrow (X, Y) \cong (\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}_0^2)$, 但し, $\mathbb{Q}^3 \hookrightarrow \mathbb{P}^4$ は非特異2次超曲面で, $\mathbb{Q}_0^2$ は2次錐.

これより, 残るは, Index $r \leqq 2$ の場合の (X, Y) の構造である.

§2. Index $r = 2$ の場合

V_5 を index 2, genus $g = \frac{1}{2}(-K_X)^3 + 1 = 21$ の第1種 Fano 3-fold, 即ち, $\mathbb{P}^4$ 内の lines の Grassmann $G(2,5) \hookrightarrow \mathbb{P}^9$ の余次元3の部分空間 $\mathbb{P}^6$ による切断とする(c.f. [1], [8]). 向井-梅村 [10] により, $V_5 \hookrightarrow \mathbb{P}^6$ の定義式は

$$\begin{cases} x_0x_4 - 4x_1x_3 + 3x_2^2 = 0, & x_1x_6 - 3x_2x_5 + 2x_3x_4 = 0 \\ x_0x_5 - 3x_1x_4 + 2x_2x_3 = 0, & x_2x_6 - 4x_3x_5 + 3x_4^2 = 0 \\ x_0x_6 - 9x_2x_4 + 8x_3^2 = 0, & (\text{但し}, (x_0 : \quad : x_6) \end{cases}$$

は $\mathbb{P}^6$ の同次座標)で与えられる. 実際, index 2, $g=21$

の第1種 Fano 3-fold はすべて射影同値である(c.f. [8]).
そこで, $H_5^0 := V_5 \cap \{x_5 = 0\}$, $H_5^\infty := V_5 \cap \{x_6 = 0\}$ なる超平面切断を与える. すると, 次が分る:

(1) $\mathrm{Sing}\, H_5^0$ は唯1個の A_4-型の有理2重点よりなる.

(2) $\mathrm{Sing}\, H_5^\infty =: \ell$ は法束 $N_{\ell|V_5} \cong \mathcal{O}_\ell(-1) \oplus \mathcal{O}_\ell(1)$ をもつ V_5 における直線である. 特に, H_5^∞ は non-normal.

(3) $V_5 \setminus H_5^0 \cong \mathbb{C}^3$, $V_5 \setminus H_5^\infty \cong \mathbb{C}^3$.

こうして, (V_5, H_5^0), (V_5, H_5^∞) は index $r = 2$ の $\mathbb{C}^3$ のコンパクト化の例を与える.

一方, (V_5, H_5^0), (V_5, H_5^∞) は以下のようにしても構成できる:

非特異2次超曲面 $\mathbb{Q}^3 \hookrightarrow \mathbb{P}^4$ 上に直線 f をとる. $0 \neq \infty \in f$ を f 上の異なる2点とする. Q_0, Q_∞ にて, 0, ∞ をそれぞれ頂点にもつ2次の錐とする. すると, $Q_0 \cdot Q_\infty = 2f$ を得る. Q_∞ に含まれる非特異3次有理曲線 C で, 0, ∞ を通るものがとれる. $\varphi : W \longrightarrow \mathbb{Q}^3$ を C に沿う blowing up とし, $C' = \varphi^{-1}(C)$ $(\cong \mathbb{F}_3)$ とおく. $\overline{Q_0}$, $\overline{Q_\infty}$ をそれぞれ, Q_0, Q_∞ の W における proper transform とする. すると, $\overline{Q_\infty} \cong \mathbb{F}_2$ であり, この $\overline{Q_\infty}$ が曲線につぶれる. こうして得られた非特異3-fold が index 2, $g = 21$ の第1種 Fano 3-fold V_5 である. $\sigma : W \longrightarrow V_5$ をこの

contraction morphism とする．

$\sigma(\overline{Q}_\infty) =: \ell$ は $N_{\ell|V_5} \cong \mathcal{O}_\ell(-1) \oplus \mathcal{O}_\ell(1)$ なる（V_5における）直線である．

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ V_5 \arrow[rr, dashed, "\pi_\ell"] & & Q^3 \end{tikzcd}$$

(D−1)

右の (D−1) は，V_5 のこの直線 ℓ からの射影 $\pi_\ell : V_5 \dashrightarrow Q^3$ の不定点解消を与えている．

(4) $H_5^\infty \cong \sigma(C')$．とくに，$H_5^\infty$ は $\ell = \sigma(\overline{Q}_\infty)$ と交わる直線全体で張られる ruled surface である．

(5) $H_5^0 \cong \sigma(\overline{Q}_0)$，とくに，$\ell = \sigma(\overline{Q}_\infty)$ は H_5^0 に含まれる，V_5における唯1つの直線である．

(6) $V_5 - H_5^\infty \overset{\sigma}{\cong} W - (C' \cup \overline{Q}_\infty) \overset{\varphi}{\cong} Q^3 - Q_\infty \cong \mathbb{C}^3$

(7) $V_5 - H_5^0 \cong W - (C' \cup \overline{Q}_0) \cong \mathbb{C}^3$ (c.f. [2])．

このことからも，(V_5, H_5^0)，(V_5, H_5^∞) が $\mathbb{C}^3$ のコンパクト化であることが分る．実は，次がいえる．

<u>定理</u>2.1 ([2], [7], [12])．Index $r = 2$ のときの $\mathbb{C}^3$ のコンパク化は，同型をのぞき，(V_5, H_5^0) 又は (V_5, H_5^∞) に限る．

$\mathbb{C}^3$ のコンパクト化としての Fano 3-fold V_5 の詳しい構造については [6] [7] を見て下さい．

§3. Index $r=1$ の場合

この場合，X は index 1 の第1種 Fano 3-fold で Y はその特異点をもつ超平面切断である．

<u>定理</u> 3.1（[4]）．Y は non-normal である．

（証明の方針）．Y を normal として矛盾を導く．

$K_X=-Y$ より，Y は自明な標準層 $\omega_Y \simeq \mathcal{O}_Y$ をもつ．

$$S:=\{x\in \operatorname{Sing} Y \ ;\ x \text{ は有理型特異点でない}\}$$

とおく．$\pi : \tilde{Y}\to Y$ を最小特異点除去とし，$\pi^{-1}(S)=: C=\cup C_i$ とおく．$\operatorname{Sing} Y \setminus S$ は有理2重点よりなる．

<u>補題</u> 3.2 (1) $-K_{\tilde{Y}}=\sum m_i C_i \quad (m_i>0,\ m_i\in\mathbb{Z})$

(2) 多重種数 $P_m(\tilde{Y})=0 \quad (\forall m>0)$

(3) $q:=h^1(\mathcal{O}_{\tilde{Y}})=\frac{1}{2}b_3(X)$

<u>系</u>．$\tilde{Y}$ は rational surface 又は genus q のコンパクトリーマン面上の ruled surface．

<u>補題</u> 3.3（梅津[13]）．$S=\{x_0\}$（1点）で $p_g(x_0)=q+1$．

命題 3.4 ([3]). $0 \leqq q \leqq 3$，特に，$q = 3$ のときは $\tilde{Y}$ は genus 3 のコンパクトリーマン面上の $\mathbb{P}^1$-束である．

補題 3.5 (Iskovskih の分類表 [8]).

g	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
q	52	30	20	14	10	7	5	3	2	0

ここに，$q = \frac{1}{2}b_3(X)$，$g = \frac{1}{2}(-K_X)^3 + 1$ ．

命題 3.4，補題 3.6 より，$(g, q) = (9, 3), (10, 2), (12, 0)$ を得るが，$\tilde{Y}$ の構造を詳しく見ることにより，

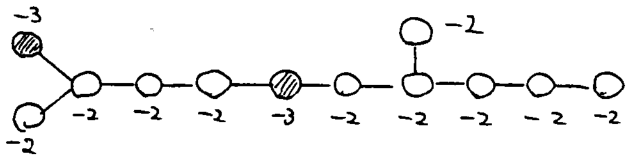
命題 3.6． $(g, q) = (12, 0)$，即ち，X は index 1 genus 12 の第 1 種 Fano 3-fold で，その超平面切断 Y は rational surface である．特に，$S = \{x_0\}$ は最小楕円型特異点である．

Laufer [9] による最小楕円型特異点の分類結果を細かく見ることにより，Y の特異点集合 Sing Y について，

命題 3.7． Sing Y は次のいずれかである

(a) Sing $Y = S = \{x_0\}$ (1点) で $\pi^{-1}(x_0) = C$ の

dual graph は：



(b) $\operatorname{Sing} Y = \{x_0, y_0\}$（2点）で，$\pi^{-1}(x_0) = C$ は $(C^2)=-2$ なる1コの cusp をもつ $\mathbb{P}^1$ であり，y_0 は A_{10}-型の有理2重点である

Case (a) が起きない事： $\operatorname{Sing} Y = \{x_0\}$ からの3重射影は X から $\mathbb{P}^3$ への rational map $\pi_{3x_0} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ を定める．Y の最小特異点除去 $\tilde{Y}$ を調べることにより，$x_0 \in X$ を通る X 内の line は存在せず，x_0 を通る X の conic は唯1つ存在することが分る．それを γ とする．$\sigma_1 : X_1 \longrightarrow X$ を x_0 での blowing up とし，$E := \sigma_1^{-1}(x_0) \cong \mathbb{P}^2$ とおく．γ_1 を γ の X_1 における proper transform とすると，linear system $|\sigma_1^*H - 3E|$（但し $H \in |\mathcal{O}_X(1)|$）の base locus $\operatorname{Bs}|\sigma_1^*H - 3E| = \gamma_1$ である．又，γ_1 の X_1 における法束は $N_{\gamma_1|X_1} \cong \mathcal{O}_{\gamma_1}(-2) \oplus \mathcal{O}_{\gamma_1}$ が分る．

今，linear system $|\sigma_1^*H - 3E|$ で定義される rational map $\Phi := \Phi_{|\sigma_1^*H-3E|} : X_1 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ の不定点解消を注意深

く見ることにより,

(i) $\Phi(X_1) \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ は2次超曲面

(ii) γ_1 に沿う X_1 の flip $\rho : X_1 \dashrightarrow W_1$ および W_1 から $\Phi(X_1)$ の上への morphism

$$\exists\, \varphi : W_1 \longrightarrow \Phi(X_1)$$

が存在して,次は可換:

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, dashed, "\rho"] \arrow[d, "\sigma_1"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & W_1 \arrow[d, "\varphi"] & \\
X \arrow[r, dashed, "\pi_{3x_0}"'] & \Phi(X_1) \arrow[r, hook] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & \mathbb{P}^3 \\
 & \mathbb{Q}^2 &
\end{tikzcd}$$

(iii) $\Phi(X_1) \cong \mathbb{Q}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ は非特異2次超曲面で, $\varphi : W_1 \longrightarrow \Phi(X_1) \cong \mathbb{Q}^2$ は conic bundle の構造をもつ.

さて, (iii) より, $b_2(W_1) = b_2(\mathbb{Q}^2) + 1 = 3$. 一方, $2 = b_2(X_1) = b_2(W_1)$. こうして矛盾. よって, Case (a) は起きない.

<u>Case (b) が起きない事</u>． Y の x_0 での重複度は2である．$\sigma_1 : X_1 \to X$ を x_0 での blowing up とし，$E := \sigma_1^{-1}(x_0) \cong \mathbb{P}^2$ とおく．Y_1 を Y の X_1 における proper transform とすると，$Y_1 \cap E = 2L$（但し，L は $E \cong \mathbb{P}^2$ における line）．$\sigma_2 : X_2 \to X_1$ を L に沿う blowing up とし，$L' := \sigma_2^{-1}(L)\ (\cong \mathbb{F}_2)$ とおく．そこで，X_2 上に linear system $\mathcal{L} := |\sigma_2^* Y_1 - L'|$ を考える．すると，$\mathcal{L}$ は base point free であり，X_2 から $\mathbb{P}^6$ への birational morphism $\Phi = \Phi_{\mathcal{L}} : X_2 \longrightarrow \Phi(X_2) \hookrightarrow \mathbb{P}^6$ を定める．Φ の exceptional set は $x_0 \in X$ をとおる X の conic の X_2 における proper transform のみである．$W = \Phi(X_2)$ とおくと，$\deg W = 4$，こうして W は rational scroll 又は Veronese surface 上の cone である．よって，$b_2(W) = 1$．一方，$3 = b_2(X_2) = b_2(W)$ より矛盾を生ずる．こうして，Case (b) は起きない．以上が定理3.1の証明のあらすじである．

<u>定理</u> 3.2（Peternell- Schneider [12]）．Y を <u>non-normal</u> とする．すると，X は index 1，genus 12 の第1種 Fano 3-fold である．

制限　$\pi_{21} : V_{22}' - H_{22}' \xrightarrow{\sim} V_5 - H_5^{\infty}$ $(\cong \mathbb{C}^3)$ は同型である.

<u>問題</u>. index 1 の $\mathbb{C}^3$ のコンパクト化は, (V_{22}', H_{22}') に限るか?

<u>注意</u>. (V_{22}', H_{22}'), (V_5, H_5^{∞}), $(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}_0^2)$, $(\mathbb{P}^3, \mathbb{P}^2)$ は, 境界因子の特異点からの射影(又は, 2重射影)でつながっている, 即ち, birational maps

$$V_{22}' \overset{\pi_2}{\dashrightarrow} V_5 \overset{\pi_1}{\dashrightarrow} \mathbb{Q}^2 \overset{\pi_0}{\dashrightarrow} \mathbb{P}^3 ,$$

但し, $\left(\begin{array}{lll} \pi_2 : & \mathrm{Sing}\, H_{22}' \ (\mathrm{line}) & \text{からの2重射影} \\ \pi_1 : & \mathrm{Sing}\, H_5^{\infty} \ (\mathrm{line}) & \text{からの射影} \\ \pi_0 : & \mathrm{Sing}\, \mathbb{Q}_0^2 \ (\mathrm{pt}) & \text{からの射影} \end{array}\right.$

があって,

$$V_{22}' \setminus H_{22}' \overset{\pi_2}{\xrightarrow{\sim}} V_5 \setminus H_5^{\infty} \overset{\pi_1}{\xrightarrow{\sim}} \mathbb{Q}^3 \setminus \mathbb{Q}_0^2 \overset{\pi_0}{\simeq} \mathbb{P}^3 \setminus \mathbb{P}^2$$

$(\cong \mathbb{C}^3)$

References

[1] T. Fujita : On the structure of polarized

<u>定理</u>3.3（[5]）．　V_{22}' を向井－梅村 [10] によって構成された，index 1，genus 12 の第1種 Fano 3-fold とする．そのとき，V_{22}' の <u>non-normal</u> な超平面切断 H_{22}' で，$V_{22}' - H_{22}' \cong \mathbb{C}^3$ なるものが存在する．

最後に，(V_{22}', H_{22}') の構造についてのべる．

<u>命題</u> 3.4

(1) $\mathrm{Sing}\, H_{22}' =: L$ は V_{22}' における line で，その法束は，$N_{L|V_{22}'} \cong \mathcal{O}_L(-2) \oplus \mathcal{O}_L(1)$ である．

(2) L と交わる V_{22}' のその他の line はない．

(3) H_{22}' は L と交わる V_{22}' 内の conics で張られる ruled surface である．

<u>定理</u>3.5．　L からの2重射影 π_{2L} は V_{22}' から index 2，genus 21 の第1種 Fano 3-fold V_5 の上への birational map $\pi_{2L} : V_{22}' \dashrightarrow V_5$ を定め，

manifolds with total deficiency one II, J. Math. Soc. Japan 33 (1981) 415-434.

[2] M. Furushima : Singular del Pezzo surfaces and complex analytic compactifications of the 3-dimensional complex affine space $\mathbb{C}^3$, Nagoya Math. J. 104 (1986) 1-28.

[3] M. Furushima : Singular K-3 surfaces with hypersurface singularities, Pacific J. Math. 125 (1986) 67-77.

[4] M. Furushima : Complex analytic compactifications of $\mathbb{C}^3$, to appear in Compositio Math.

[5] M. Furushima : A note on a compactification of $\mathbb{C}^3$, in preparation.

[6] M. Furushima - N. Nakayama : A new construction of a compactification of $\mathbb{C}^3$, Tohoku Math. J. 41 (1989) 543-560.

[7] M. Furushima – N. Nakayama : The family of lines on the Fano 3-fold V_5, Nagoya Math. J. 116 (1989) 1–12

[8] V.A. Iskovskih : Anticanonical models of three dimensional algebraic varieties, J. Soviet Math. 13 – 14 (1980), 745 – 814.

[9]. H. Laufer : On minimally elliptic singularities, Amer. J. Math. 99 (1977) 1257 – 1295.

[10] S. Mukai – H. Umemura : Minimal rational threefolds, L.N.M 1016 (1983), 490 – 518

[11] R. Remmert – T. Van de Ven : Zwei Satze über die komplex – projektive ebene, Niew Arch. Wisk. 8 (3) (1960), 147 – 157.

[12] T. Peternell – M. Schneider, Compactifications of $\mathbb{C}^3$ I Math. Ann. 280 (1988), 129 – 146

[13]. Y. Umezu ; On normal projective surfaces with trivial dualizing sheaf, Tokyo J. Math 4 (1981), 343–354.