代数幾何学シンポジウム記録
1989年度 pp.58-75

種数と共形場理論

東北大理 清水勇二 (Yuji Shimizu)

本論説は，共形場理論(Conformal Field Theory)の数学的モデルのもつ代数的側面についての最近の考察[KSU 1,2]に続くもので，上野健爾(京大理)，桂利行(お茶大理)両氏との最近の共同研究の結果を紹介する。(詳細は[KSU 3]を参照)

自由フェルミ粒子の共形場理論に於て，無限変数の多項式環(Fock空間)が登場して幾通りにか解釈でき，いくつかの分野を結びつけた。(e.g. ボゾン化[DJKM, KSU1]) 他方，閉じた紐の理論(closed string theory)に触発されて楕円種数の理論が注目を集めた。([L, O]) 種数の理論における複素同境環は，上の多項式環と抽象的には同型であり，両者の内在的結びつきが期待されてきた。ここでは，両者のexplicitな同型(定理3.3, 4.4)とその応用を与える。これは，A. Grothendieckの展望[Gr (0.11)]に部分的に応えるものと思う。

内容は次の通り。§1では，代数的トポロジーでの種

数と1次元可換形式群の関係を復習する。§2では，(boson) Fock空間とVirasoro代数の作用を復習する。§3で複素同境環とFock空間の同型の与え方(定理3.3)を述べ，種数への応用(定理3.6)を与える。§4では，Virasoro代数とコホモロジー作用素の対応に関するBuhshtaber-Shokurovの理論を思い起こし，§3の同型との関係を述べる。(定理4.4)

§1 種数，複素同境環

1.1 代数幾何でなじみ深いTodd種数をまず例にとろう。n次元複素多様体Mの全Chern類 $c(M) = c_0(M) + c_1(M) + \cdots + c_n(M)$ を

$$c(M) = \prod_{i=1}^{n} (1+\gamma_i) \qquad (\gamma_i : \text{Chern roots})$$

と形式的に分解した時，全Todd類$td(M)$は，

$$td(M) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{1-e^{-\gamma_i}}$$

と定義され，これは$c_1, \cdots, c_n$の形式的巾級数に表わされる:

$$td(M) = \sum_{i \geq 0} T_i(c_1, \cdots, c_i) \qquad (\deg c_i = i \text{ で，} T_i \text{ は } i \text{次斉次}).$$

n次の部分が<u>Todd種数</u> $T_n(c_1, \cdots, c_n)[M] = T(M)$ であり，定義から$T(M)$は乗法性をもつ: $T(M \times N) = T(M) \cdot T(N)$. ($M, N$: compactとする)

1.2 これを一般化して，$\frac{z}{1-e^{-z}}$の代りに勝手な巾級数$Q(z)$ <u>(特性巾級数)</u>から出発して，不定元$c_1, c_2, \cdots$の多項式の列$\{K_i\}$を同じ操作によって定める:

$$1+c_1z+\cdots+c_nz^n = \prod_{i=1}^{n}(1+\gamma_i z)$$

$$\Rightarrow \quad K(c,z) = K(\Sigma c_i z^i) = \sum_{i=1}^{\infty} K_i(c_1,\cdots,c_i)z^i := \prod_{i=1}^{n} Q(\gamma_i z)$$

($i>n$ では, $K_i(c_1,\cdots,c_i,0,\cdots,0)$ だが $n\to\infty$ として well-defined. 詳細は[H])

こうして得られる $\{K_n\}$ は乗法列になる:

$$\sum_i c_i z^i = (\sum_j c'_j z^j)\cdot(\sum_k c''_k z^k) \quad \Rightarrow \quad K(c,z) = K(c',z)\cdot K(c'',z)$$

1.3　Todd 種数は, signature, L 種数と共に代数的トポロジーで言う genus の例となっている。

一般に (1をもつ)可換環 A に値をとる種数(genus) とは, 環準同型 $\varphi: MU^* \longrightarrow A$, $\varphi(1)=1$, のことを言う。ここで MU^* は, 複素同境環である。(compact) C^∞ 多様体の接束 TM に自明束を足して複素 vector 束の構造が入るとき, M を弱概複素と呼び, そのような多様体の cobordism 類全体に disjoint union と直積で環構造を入れたものが MU^* であった。([H, K])

Milnor により,

$$MU^* \cong \mathbb{Z}[y_1, y_2, \cdots] \quad (\text{多項式環})$$

$$MU^*\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^2, \cdots] \quad (\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$$

であることが知られている。

1.4　A に値をとる種数 φ に対し, その対数(logarithm) $l_\varphi(z)$ を

$$l_\varphi(z) := \sum_{n\geq 1} \frac{\varphi(\mathbb{P}^{n-1})}{n} z^n \qquad \in A\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}[[z]]$$

とおく。この l_φ は次の 1 次元可換形式群を定める:

$$F_\varphi(X,Y) := l_\varphi^{-1}(l_\varphi(X)+l_\varphi(Y)) \qquad \in A\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}[[X,Y]]$$

A が torsion-free なら $F_\varphi \in A[\![X,Y]\!]$ である。(Miščenko)

さて，A 上の 1 次元可換形式群とは，次の条件を満たす $F(X,Y) \in A[\![X,Y]\!]$ のことであった：(cf. [Hz])

1) $F(X, F(Y,Z)) = F(F(X,Y), Z)$　　2) $F(X,Y) \equiv X+Y \pmod{\deg 2}$

3) $F(X,Y) = F(Y,X)$

$\mathbb{Q}$ 上では，1 次元可換形式群は互いに(強い意味で)同型であり，特に加法群 $F_{add}(X,Y) = X+Y$ との自然な同型を対数が与えている。

$A = MU^*$ 上には，次の自然な 1 次元可換形式群(の対数)が存る：　$\ell(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{[\mathbb{P}^{n-1}]}{n} z^n$．Quillen により，これは universal であることが知られる(cf. [K])．これから上記の Milnor の結果の別証も得られる。

1.5　以上まとめて，次の三位一体(trinity)があることを注意しよう。

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{種数 } \varphi \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
\text{乗法列 } K(c,z) \text{ or } Q(z) \arrow[rr, leftrightarrow] & & \text{1 次元可換形式群 } F(X,Y) \text{ or } \ell(z)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{cases}
d\ell(z) = \dfrac{dz}{\frac{\partial F}{\partial Y}(z,0)} \\[2ex]
Q(z) = \dfrac{z}{\ell^{-1}(z)}
\end{cases}
$$

§1 の最後に例を挙げておこう。

$Q(z)$	$\varphi(\mathbb{P}^n)$	$\ell(z)$	$F(X,Y)$	
1	0	z	$X+Y$	加法群 $\widehat{\mathbb{G}}_a$
$\frac{z}{1-e^{-z}}$	1	$-\log(1-z)$	$X+Y-XY$	Todd 種数，乗法群 $\widehat{\mathbb{G}}_m$

$\dfrac{z}{\tanh z}$	$\begin{cases} 1 & (n:\text{偶}) \\ 0 & (n:\text{奇}) \end{cases}$	$\tanh^{-1}(z)$	$\dfrac{X+Y}{1+XY}$	signature
$\dfrac{z}{sn(z)}$ (Jacobi の sine 関数)		$\displaystyle\int_0^z \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$	$\dfrac{X\sqrt{R(Y)}+Y\sqrt{R(X)}}{1-\varepsilon X^2Y^2}$	楕円種数 $R(X)=1-2\delta X^2+\varepsilon X^4$

§ 2　Fock 空間

2.1　共形場理論(CFT)とは共形対称性をもつ場の理論だが，狭い意味では Virasoro 代数の表現をそのモデルとする．(cf. [Ga])

Virasoro 代数 (/$\mathbb{Q}$) $\mathcal{L}$ の定義を復習する．$\mathbb{Q}[z,z^{-1}]\frac{d}{dz}$ は普通の bracket で Lie 環をなす．その 1 次元中心拡大が $\mathcal{L}$ である：

$$\mathcal{L} = \mathbb{Q}[z,z^{-1}]\frac{d}{dz} \oplus \mathbb{Q}\cdot c \ , \quad c \in \text{Center of } \mathcal{L}$$

$$[f\frac{d}{dz}, g\frac{d}{dz}] := \{fg'-f'g\}\frac{d}{dz} \oplus \mathrm{Res}_{z=0}(f'''g\,dz)\cdot c$$

$\mathcal{L}$ の basis としては普通 $L_n = -z^{n+1}\frac{d}{dz}$ とおく．すると，

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{1}{12}(n^3-n)\,\delta_{n+m,0}\cdot c$$

2.2　$\mathcal{L}$ の表現としては，Verma 加群等の最高ウェイト表現と並んで Fock 表現がある (cf. [FF, TK])．Fock 表現とは，U(1)-current 代数，又は Heisenberg 代数の既約表現に対して菅原構成法によって $\mathcal{L}$ が作用するようにしたものである．

場の理論では，生成·消滅演算子のなす Clifford 代数の表現から fermion Fock 空間 $\mathcal{F} = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_p$, $\mathcal{F}_p \cong \bigoplus_{Y} \mathbb{Q}\cdot|Y\rangle$ (Y は Young 図形を動く) が得られる．(cf. [DJKM, KNTY])

2.3　ボゾン化という手続きにより，$\mathcal{F}$は次のboson Fock空間に同型である：$\mathcal{H}_T = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_{T,p}$，$\mathcal{H}_{T,p} = \mathbb{Q}[t_1, t_2, \cdots]u^p = \mathcal{H}_{T,0}\cdot u^p$　(t_i, u はすべて不定元)．ボゾン化はcharge p を保ち，又，$\mathcal{F}_0$ の基底 $|Y\rangle$ の行き先は $\chi_Y(t)$ で与えらる。但し，$\chi_Y(t)$ はYoung図形 Y に対応するSchur多項式であり，Y に対応するpartitionを $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\ell)$ $(\lambda_1 \geqq \cdots \geqq \lambda_\ell > 0)$ とするとき，$\chi_Y(t) := \det(p_{\lambda_i + j - i}(t))_{1\leq i,j\leq \ell}$ で与えられる。($p_n(t)$ は基本Schur多項式で $\exp(\sum_{i=1}^{\infty} t_i z^i) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n$ で定義される。)

上の記述から $\mathbb{Z}$ 上のボゾン化は直ちに得られる．(cf. [KSU1, CKK]) Witt ring scheme や curve の Jacobian の形式群との関係については，[KSU 1,2] を参照されたい。

2.4　次に $\mathcal{H}_T$ への Virasoro 代数 $\mathcal{L}$ の作用を変数 t_n に関する微分作用素で表示した結果を記しておこう。$n \geqq 1$ について，

$$L_n = \sum_{m=1}^{\infty} m t_m \frac{\partial}{\partial t_{n+m}} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial t_m}\cdot\frac{\partial}{\partial t_{n-m}} + \frac{\partial}{\partial t_n}\cdot u\frac{\partial}{\partial u}$$
$$L_{-n} = \sum_{m=1}^{\infty} (n+m) t_{n+m} \frac{\partial}{\partial t_m} + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n-1} m(n-m) t_m t_{n-m} + n t_n \cdot u\frac{\partial}{\partial u}$$
$$L_0 = \sum_{m=1}^{\infty} m t_m \frac{\partial}{\partial t_m} + \frac{1}{2}\left(u\frac{\partial}{\partial u}\right)^2$$

これから，例えば $L_n\,(n\geqq 1)$ の p_j への作用が求まる：

$$L_n(p_j(t)u^p) = (j - \tfrac{1}{2}(n+1) + p)\, p_{j-n}(t) \quad \text{if } j \geqq n, \quad 0 \quad \text{if } j < n$$

2.5　次に，§4で必要となる $\mathcal{H}_{T,0}$ への $L_n\,(n\geqq 1)$ のもう一つの作用を導入しておく。

$\{L_n\}_{n\geqq 1}$ の生成する $\mathcal{L}$ の部分Lie環を $\mathcal{L}(1)$ とすると，$\mathcal{L}(1)$

は（$\mathbb{Z}$上の）群scheme $D^{(1)}$のLie環となっている。$D^{(1)}$のR-valued points（R；可換環）は，

$$D^{(1)}(R) = \{ z \longmapsto z + t_1 z^2 + t_2 z^3 + \cdots \ ; \ t_n \in R \ (n \geq 1) \}$$

で与えられる。即ち，formal line $\widehat{\mathbb{A}}^1$の座標変換の群である。

$D^{(1)}(R)$の元$z \mapsto z + t_1 z^2 + t_2 z^3 + \cdots$の係数$t_1, t_2, \cdots$は$D^{(1)}$の座標関数と思えて，$\mathcal{H}_{T,0}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[t_1, t_2, \cdots]$とおくとき$D^{(1)} = \mathrm{Spec}\, \mathcal{H}_{T,0}(\mathbb{Z})$となる。すると，$D^{(1)}$の$\Gamma(D^{(1)}, \mathcal{O}) = \mathcal{H}_{T,0}(\mathbb{Z})$への（left actionによる）作用がある。そこで$\mathcal{H}_{T,0}(\mathbb{Z})$上の左$D^{(1)}$不変微分作用素全体のなす代数$\mathcal{S}$を考える。$\mathcal{S}$は次の形の元$D_\alpha$で張られる：

$$P(u \cdot v) = \sum_\alpha (D_\alpha P)(u) v^\alpha \quad \text{for } P(t) \in \mathcal{H}_{T,0}(\mathbb{Z})$$

$$\left(\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots) \text{ は, } \alpha_i \geq 0,\ |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots < \infty \text{ を動く} \right).$$

但し，$u = (u_1, u_2, \cdots)$, $v = (v_1, v_2, \cdots)$に対し$u \cdot v = (t_1, t_2, \cdots)$は次の式で与えられる：$\displaystyle\sum_{i \geq 0} t_i z^{i+1} = \sum_{j \geq 0} u_j \Big(\sum_{k \geq 0} v_k z^{k+1} \Big)^{j+1} \quad (t_0 = u_0 = v_0 = 1)$.

D_αは$|\alpha|$階の微分作用素であり，例えば$e_i = (0, \cdots, 0, \overset{i}{1}, 0, \cdots)$について

$$D_{e_i} = \frac{\partial}{\partial t_i} + \sum_{k=i+1}^{\infty} (k+1-i) \frac{\partial}{\partial t_k} \quad .$$

§3 複素同境環とFock空間の関係

ここでは，MU^*とChern多項式全体のなす環の間のChern数をとるpairingを，Fock空間上の自然なpairingと比較できるように，$MU^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$と$\mathcal{H}_{T,0}$の間の（$\mathbb{Q}$上の）同型を与える。

3.1　まず Chern 多項式の環を $Ch^* = \mathbb{Q}[c_1, c_2, \cdots]$ とおく。(c_i は不定元と思う。) n 次元多様体 M と $P(c_1, c_2, \cdots) \in Ch^*$ に対して、

$$P(c_1, c_2, \cdots)[M] = P(c_1(M), c_2(M), \cdots) \text{ の degree } n \text{ の部分}$$

とおくことにより，pairing $Ch^* \times (MU^* \otimes \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Q}$ が定まる。

Fock 空間 $\mathcal{H}_{T,0}$ 上の自然な pairing としては，次のものを考える：$\tilde{\partial} = (\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t_2}, \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial t_3}, \cdots)$ とおく時，

$$(f(t), g(t)) := f(\tilde{\partial}) g(t)|_{t=0} \quad (\text{微分作用素 } f(\tilde{\partial}) \text{ を作用させて，} t=0)$$

これは pairing $\mathcal{H}_{T,0} \times \mathcal{H}_{T,0} \longrightarrow \mathbb{Q}$ を定める。定義の仕方から $\mathcal{H}_{T,0}^{+} := \mathbb{Q}[\partial_{t_1}, \partial_{t_2}, \cdots]$ と $\mathcal{H}_{T,0}$ の間の pairing と考えることもできる。§2 の Schur 多項式はこの pairing に関して orthonormal である：$(\chi_Y(t), \chi_Z(t)) = \delta_{Y,Z}$ 。(この pairing の役割については，cf. (3.8))。

3.2　さて，$MU^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ と $\mathcal{H}_{T,0}$ (resp. Ch^* と $\mathcal{H}_{T,0}$) を比べる為にそれらの間の環準同型を定めよう。

$$K : MU^* \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathcal{H}_{T,0} \quad : \quad \mathbb{P}^n \longmapsto p_n((n+1)t)$$

$$K^{+} : Ch^* \longrightarrow \mathcal{H}_{T,0} \quad : \exp\Big(\sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} t_i z^i\Big) = 1 + \sum_{i \geq 1} c_i z^i$$

とおく。但し，$p_n(t)$ は基本 Schur 多項式 (2.3) であり，$(n+1)t = ((n+1)t_1, (n+1)t_2, \cdots)$ の意である。又，K^{+} は左辺の exp を巾級数に展開した時の z^i の係数である t の多項式を c_i に対応させるという対応である。

$\mathbb{Q}$ 係数の範囲では t_i を $\mathbb{P}^n$ に (resp. t_i を c_j に) ついて解くことができるから，K, K^{+} は環同型である。

$1+\sum_{i\geq 1} c_i z^i = \prod_{j=1}^{\infty}(1+\gamma_j z)$ なる変数 γ_j を形式的に導入すると，c_i は γ_j の基本対称式であり，t_i は γ_j の Newton 多項式 $(=\gamma_1^i+\gamma_2^i+\cdots)$ であることに注意しておく。

3.3　以上の準備の下に次の定理が成立つ。

<u>定理</u>　同型 K, K^+ により次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccccc} Ch^* & \times & MU^*\otimes\mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & \wr| & K^+\times K & & \| \\ \mathcal{H}_{T,0} & \times & \mathcal{H}_{T,0} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \end{array} \qquad \left(\leftrightarrows (3.1) \text{ の pairing} \right).$$

この定理は直接計算して示される。その際の基になるのは $\mathbb{P}^n$ の Chern 類の計算である：ξ_n を $\mathbb{P}^n$ の超平面の類として，

$$1+\sum_{i\geq 1} c_i(\mathbb{P}^n)z^i = (1+\xi_n z)^{n+1} \Rightarrow i\,t_i(\mathbb{P}^n) = (n+1)\xi_n^i \quad (1\leq i\leq n)$$

これから，n の２つの分割 $(i_1,\cdots,i_s)$, $(j_1,\cdots,j_r)$ について，$t_{j_1}\cdots t_{j_r}(\mathbb{P}^{i_1}\times\cdots\times\mathbb{P}^{i_s})$ と $\left(\frac{1}{j_1}\frac{\partial}{\partial t_{j_1}}\right)\cdots\left(\frac{1}{j_r}\frac{\partial}{\partial t_{j_r}}\right)\left(p_{i_1}((i_1+1)t)\cdots p_{i_s}((i_s+1)t)\right)$ の値を比べる。

3.4　boson Fock 空間に関係して，次の観察ができる．(cf. [KNTY, §4])

(i)　$\mathcal{H}_{T,0}\simeq\mathcal{H}^+_{T,0} : t_i \longleftrightarrow \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t_i}$ で total Chern 類を書き直すと，

$$1+\sum_{i\geq 1} c_i z^i = \exp\left(-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial t_n}\left(-\frac{1}{z}\right)^{-n}\right)$$

となるが，これは頂点作用素 $V_+\left(-\frac{1}{z}\right)$ の表示の半分で，$t=0$ として見えている部分である。

(ii)　同様に，Chern 指標 $ch(M) = ch(\Theta_M)$ を書き直すと，

$$ch(M) = \dim M + t_1(M)z + t_2(M)z^2 + \cdots + t_n(M)\frac{z^n}{(n-1)!} + \cdots$$

$$= \dim M + \frac{\partial}{\partial t_1}z + \frac{1}{2!}\frac{\partial}{\partial t_2}z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{\partial}{\partial t_n}z^n + \cdots$$

となり，$U(1)$-current 作用素 $J(z)$ の半分に似た形をしている。

3.5　上の定理(とその定式化)の応用として，Todd 種数等の種数の Fock 空間を経由した解釈を与えよう。三位一体(1.5)により，乗法列(1.2)を取上げる。基本的結果を述べる為に少し準備をする。

次の affine scheme を考える：

$$\Lambda = \mathrm{Spec}(Ch^*)\ ,\quad \mathbb{G}_a^N = \mathbb{G}_a^\infty = \mathrm{Spec}(\mathcal{H}_{T,0}^+)$$

すると(3.2)の同型 K^+ は，$\mathbb{Q}$-scheme の同型 $\lambda : \mathbb{G}_a^N \simeq \Lambda$ を引起こす。$\mathbb{Q}$-algebra R に対して，R-valued points を考えると，

$$\Lambda(R) \cong 1 + zR[[z]]\ (\text{乗法群}),\quad \mathbb{G}_a^N(R) \cong R^N\ (\text{加法群})$$

であり，λ は群 scheme の同型である。

乗法列 $\{K_j\}$ は，準同型 $\Phi_K : \Lambda \to \Lambda\ ;\ 1 + c_1z + c_2z^2 + \cdots \mapsto K(c,z)$ を与えることと同値であり，環準同型 $\Phi_K^* : Ch^* \to Ch^*$ を引起こす。λ を通じて $\widetilde{\Phi}_K : \mathbb{G}_a^N \to \mathbb{G}_a^N$ 及び $\widetilde{\Phi}_K^* : \mathcal{H}_{T,0} \to \mathcal{H}_{T,0}$ が定まる。

3.6　乗法列 $K(c,1) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(c_1,\cdots,c_n)$ を(3.2)の同型により t の巾級数と思ったものを $\tau_K(t)$ と記し，乗法列 K に付随する<u>τ関数</u>と呼ぶ：　$\tau_K(t) = \tau_K(t_1, t_2, \cdots) := K(c,1)$

すると次の結果が成立つ。

<u>定理</u>　1)　$\tau_K(t) = \exp\left[\sum_{i\geq 1} (-1)^{i+1} b_i t_i\right]$

ここで，$b_i \in \mathbb{Q}$ は $\widetilde{\Phi}_K^*(t_i) = b_i t_i$ によって定まる数である。

2)　$Q(z) = K(1+z)$ (K に対応する特性巾級数)について，$Q(z)^{-1} = \sum_{i\geq 0} (-1)^i a_i z^i$

とする時，$\tau_K(t)$ は次の形の展開をもつ：

$$\tau_K(t) = 1 + \sum_{n\geqq 1} \sum_{\lambda} \Delta_\lambda(a)\cdot\Delta_\lambda(c)$$

$$\begin{cases} \lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell) \text{ は } n \text{ の分割を走る} \\ \Delta_\lambda(c) = \det\left(c_{\lambda_i+j-i}\right)_{1\leqq i,j\leqq \ell} \end{cases}$$

定理の主張1)では，$\tilde{\Phi}_K^*(t_i) = b_i t_i$ の形をしているという主張も含まれている。

定理の主張2)は，Todd種数の場合Hirzebruchによって，'50年代には知られていた。この公式は対称関数の理論の応用として得られる。(cf[Li]) 又，公式の右辺は次の無限行列の積の行列式(の定義)と見なせる：

$$\det\left(\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & 1 & c_1 & c_2 & c_3 & & \\ & & 1 & c_1 & c_2 & c_3 & \\ & & & 1 & c_1 & c_2 & c_3 \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddots & & \\ \ddots & 1 & \\ \ddots & a_1 & 1 \\ a_2 & a_1 & 1 \\ \hline a_3 & a_2 & a_1 \\ & a_3 & a_2 \\ & & a_3 \\ & & \vdots \end{pmatrix}\right)$$

$\left(\begin{array}{l} \mathbb{N}\times\mathbb{Z} \text{ 行列と} \\ \mathbb{Z}\times\mathbb{N} \text{ 行列の積} \end{array}\right)$

この表示はKP方程式の理論の枠組で把えられる。その前に，Todd種数の場合を例示しておく(cf. (1.5))。

$$K(c,1) = 1 + \frac{1}{2!}c_1 + \frac{1}{3!}c_2 + \begin{vmatrix} 1/2! & 1/3! \\ 1 & 1/2! \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ 1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$+ \frac{1}{4!}c_3 + \begin{vmatrix} 1/3! & 1/4! \\ 1/2! & 1/3! \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1/2! & 1/3! & 1/4! \\ 1 & 1/2! & 1/3! \\ 0 & 1 & 1/2! \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & c_1 & c_2 \\ 0 & 1 & c_1 \end{vmatrix} + \cdots$$

$(a_n = 1/(n+1)!)$

$$\tau_K(t) = \exp\left(\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{12}t_2 - \frac{1}{720}t_4 + \cdots\right)$$

3.7　Fock 空間と KP 方程式のつながりを必要な分だけ復習する。(cf. [S])

KP hierarchy と呼ばれる一連の非線型方程式は，次の佐藤方程式 (乃至佐藤表示) に帰着する：

$$
\begin{cases}
LW = W\partial_x , & L \in \partial_x + \mathcal{E}_{\mathbb{C}}(-1) \otimes \mathbb{C}[[t_1, t_2, \cdots]] \\
\partial_{t_n} W = B_n W - W\partial_x^{\,n} & (n = 1, 2, 3, \cdots) , \quad B_n = (L^n)_+
\end{cases}
$$

$$
W \in 1 + \mathcal{E}_{\mathbb{C}}(-1) \otimes \mathbb{C}[[t_1, t_2, \cdots]]
$$

(ここで $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}(-1)$ は高々 −1 階の microdifferential operator 全体を表わし，$(L^n)_+$ は L^n の微分作用素の部分である。) これは W (又は L) の係数に関する方程式で $W = \sum_{j=0}^{\infty} w_j(t)\partial_x^{-j}$ ($w_0 = 1$) という形の解が $(1 + \mathbb{C}[[\partial_x^{-1}]]\partial_x^{-1}$ の元の掛算を除き一意に) 考えられる。解の存在する条件が，L の波動関数 $w(x,t) = W\exp(\sum_{n\geq 1} t_n x^n)$ に対する双線型等式，又は対応する τ 関数 $\tau(t)$ が広田双線型方程式を満たすことである。(τ と w の関係は，$w(x,t) = \tau(t_1 - \frac{1}{x}, t_2 - \frac{1}{2x^2}, t_3 - \frac{1}{3x^3}, \cdots)\exp[\sum_{n\geq 1} t_n x^n] / \tau(t)$)

3.8　上の定理 (3.6) の τ 関数としての意味付けを説明しよう。

双線型方程式を満たす τ 関数の全体は，無限次元 Grassmann 多様体上の $\mathbb{C}^*$ 束 (枠束) の構造をもち，fermion Fock 空間 $\mathcal{F}$ に埋込める。枠束の点 ξ に対応する τ 関数は，ξ の時間発展 $\xi(t) = \exp(\sum_{n\geq 1} t_n \Lambda^n)\cdot\xi$ (Λ は shift operator) と基準点 ξ_0 ($\leftrightarrow 1 \in \mathcal{H}_{T,0}$) との $\mathcal{F}$ での内積として与えられる。Grassmann の点と思うと，対応する枠 ($\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$-行列) $\xi(t)$ と ξ_0 の積の行列式

$$\det({}^t\xi_0\cdot\xi(t))$$

がτ関数に他ならない。そして，これは定理(3.6) 2) の表示を含んでおり，$\tau_K(t)$ は KP 方程式のτ関数と見なせるのである。特に，$\tau_K(t)$ は広田双線型方程式を満たす。

次に，$\tau_K(t)$ に対応する波動作用素 W，Lax 作用素 L がどうなるか見よう。(3.7) と定理(3.6), 1) により，

$$W = \exp\left[\sum_{n\geq 1}(-1)^n\left(-\frac{b_n}{n}\right)\partial_x^{-n}\right] = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i\left(-b_1, -\frac{b_2}{2}, \cdots, -\frac{b_i}{i}\right)\partial_x^{-i}$$

$$\therefore\ L = W\partial_x W^{-1} = \partial_x \qquad\qquad (\text{定数係数})$$

即ち，乗法列に付随するτ関数では Lax 作用素を変形しない。W が丁度 "$W \bmod L$" の不定性 $1+\mathbb{C}[[\partial_x^{-1}]]\partial_x^{-1}$ $(\cong\Lambda(\mathbb{C}))$ の分だけ時間発展する。

§4　Virasoro 代数とコホモロジー作用素

Buhshtaber-Shokurov [BS] は，Virasoro 代数(の半分)の包絡環と Landweber-Novikov 代数の作用が対応するような $\mathcal{H}_{T,0}$ と $MU^*\otimes\mathbb{Q}$ の同型を与えた。その場合の $\mathcal{H}_{T,0}$ (への作用)は (2.5) で復習した。この § では，その同型と § 3 の同型を比較した結果を述べる。

4.1　最初にコホモロジー作用素を少し復習する。(cf. [Hz, K])

乗法的コホモロジー理論 MU^* は complex oriented なので，複素 vector 束 $V\to X$ の Euler 類 $e(V)\in MU^*(X)$ が定まる。すると，

$$MU^*(X\times\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) \cong MU^*(X)[u]/(u^{n+1}) \qquad (u=e(\xi_n),\ \xi_n: \mathbb{P}^n\text{の超平面類})$$

なる性質と標準的手法により，functorial で Whitney 和公式を満たし，複素直線束 L について $c_1(L)=e(L)$, $c_i(L)=0$, $i\geqq 2$，なる cobordism Chern 類 $c_i(V)\in MU^{2i}(X)$ が唯一つ存在する。

Chern 類を用いて，functorial で Whitney 和公式を満たし，複素直線束 L について，$c_t(L)=\sum_{i\geqq 0} t_i\cdot e(L)^i$ なる Chern 多項式 $c_t(V)\in MU^*(X)[t_1,t_2,\cdots]$ が唯一つ定まる。

全 Landweber-Novikov 作用素 $S_t: MU^*\to MU^*[t_1,t_2,\cdots]$ は，$MU^*(X)$ の各次元 x に $S_t(x):=f_*(c_t(\nu_f))\in MU^*(X)[t]$ を対応させて得られる。ここで x は $f:Z\to X$ で代表されるとし，$\nu_f=f^*TX-TZ$ とおいた。多重指数 α ごとに $S_t(x)$ の $t^\alpha=t_1^{\alpha_1}t_2^{\alpha_2}\cdots$ の成分 $s_\alpha(x)$ が定まる。

Landweber と Novikov により，s_α の全体は stable cohomology 作用素のなす代数の部分代数 $\mathcal{S}$ を成すことが知られている。定義により $\mathcal{S}$ は $MU^*=MU^*(pt)$ の上に作用している。

4.2　この MU^* 上の $\mathcal{S}$ の作用を，$\mathcal{H}_{T,0}(\mathbb{Z}):=\mathbb{Z}[t_1,t_2,\cdots]$ 上の $\mathcal{L}(1)$ の作用と比べたい。その為に，$\mathcal{H}_{T,0}(\mathbb{Z})$ 上に 1 次元可換形式群を構成する．

$$\theta_t(x):=\sum_{j\geqq 0} t_j x^{j+1}\quad (t_0=1),\quad F_t(X,Y):=\theta_t(\theta_t^{-1}(X)+\theta_t^{-1}(Y))$$

とおいて，$\mathcal{H}_{T,0}(\mathbb{Z})$ 上の形式群 F_t を定める。θ_t は F_t の対数の逆である。F_t の由来は，自然変換 $\gamma: MU^*\to H^*$ を $S_t: MU^*\to MU^*[t]$ と合成した Boardman 変換 $\beta_t=\gamma\cdot S_t: MU^*\to H^*[t]$ について，

$$\beta_t(e^U(L)) = \sum_{j\geq 0} t_j(e^H(L))^{j+1}$$

が成立することによる。(e^U, e^H は直線束 L の MU^*, H^* に於る Euler類)

これと $F(e^U(L_1), e^U(L_2)) = e^U(L_1 \otimes L_2)$ から直ちに F_t の式が得られる。

MU^* 上の普遍な形式群の存在により，$\beta: MU^* \to \mathcal{H}_{T,0}(\mathbb{Z})$ が得られる。これは injective であることが分かる。

4.3　Buhshtaber-Shokurov の結果は次の通り。

定理([BS]) 1)　$S \to \mathcal{S}: s_\alpha \mapsto D_\alpha$　は環同型である。($\mathcal{S}, D_\alpha$ については cf. (2.5))

2)　1) の同型の下，β は equivariant．

3)　$\mathrm{Im}\,\beta = \{P(t) \in \mathcal{H}_{T,0}(\mathbb{Z})\ ;\ 1-e^{-z} \in D^{(1)}(\mathbb{Q})$ による右移動で $P(t)$ は不変$\}$

又，$\beta_{\mathbb{Q}}: MU^* \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{T,0}$ によって，$\mathcal{H}_{T,0}(\mathbb{Z})$ は次の空間と同型になる：

$$MU^*(\mathbb{Z}) := \{x \in MU^* \otimes \mathbb{Q}\ ;\ x \text{ の Chern数の値が } \in \mathbb{Z}\}$$

[BS] においては群 $D^{(1)} = \mathrm{Spec}\,\mathcal{H}_{T,0}(\mathbb{Z})$ のことを $\mathrm{Diff}_1(\mathbb{Z})$ という"呼び方"をしている。

4.4　次に上の同型 $\beta_{\mathbb{Q}}$ と §3 の同型 K との関係を与える。その為に，環同型

$$\varphi: \mathcal{H}_{T,0} \to \mathcal{H}_{T,0}\ ;\ t_i \longmapsto p_i(-t) = p_i(-t_1, -t_2, \cdots, -t_i)$$

を考える。このとき，

定理　次の図式は可換である。

$$\begin{tikzcd} MU^{*}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} \arrow[r, "\beta_{\mathbb{Q}}"] \arrow[dr, "K"'] & \mathcal{H}_{T,0} \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathcal{H}_{T,0} \end{tikzcd}$$

証明は定義に基いた直接的計算で行なう。

定理(3.3)と同様に，この定理も定式化するのが大変で発見してしまえば証明は容易である。

4.5　(3.3)と(4.4)の関係を明確にするのに，$\mathcal{H}_{T,0}$ 上の Chern 数をとる pairing と Landweber-Novikov 代数 $\mathcal{S}$ の作用を比較する必要がある。残念ながら，Virasoro 代数(の半分) $\mathcal{L}(1)$ の作用を見ると，2つの作用にはずれがある。即ち，$n>0$ について，Fock 表現としての $\mathcal{H}_{T,0}$ 上では，$p_j(t)$ を変数と思って書くと，

$$L_n = \sum_{j\geq n}\left(j-\frac{1}{2}(n+1)\right)p_{j-n}\frac{\partial}{\partial p_j}$$

となるが((2.4))，$D^{(1)}$ の座標環としての $\mathcal{H}_{T,0}$ 上では (2.5) の D_{e_n} となり，$\frac{1}{2}(n-3)\sum_{j\geq n}p_{j-n}\frac{\partial}{\partial p_j}$ の分の差がある。

4.6　(4.4)の対応 φ は，不定元 z を $-z$ におき換えることを除いて，(3.2)の K^{+} の対応と同じ形をしている。即ち，$D^{(1)}$ の座標環としての $\mathcal{H}_{T,0}$ が Ch^{*} に，Fock 表現としての $\mathcal{H}_{T,0}$ が $\mathcal{H}_{T,0}^{+}$ に対比できる。

§4 の内容，特に(4.5)で触れた問題点等は更に良く理解できる筈である。又，$GL(\infty)$ の指標環としての Fock 表現との関係，Grassmann 上の群作用との関係については，再び取り上

げ，別の機会に報告するつもりである。

References

[BS] V.M. Buhkshtaber, A.V. Shokurov, The Landweber-Novikov algebra and formal vector fields on the line, Funct. Anal. Appl. 12 (1978) 159-168.

[CKK] C. DeConcini, V.G. Kac, D.A. Kazhdan, Boson-fermion correspondence over $\mathbb{Z}$, Infinite dimensional Lie algebras and groups, World Scientific (1989) 124-137.

[DJKM] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa, Transformation groups for soliton equations, Proc. of RIMS Symp. on Non-linear Integrable System, Classical Theory and Quantum Theory, Kyoto, M. Jimbo-T. Miwa (eds.), World Scientific Publ. Co. (1983) 39-119.

[FF] B.L. Feigin, D.B. Fuchs, Invariant skew-symmetric differential operators on the line and Verma modules over the Virasoro algebra, Funct. Anal. Appl. 16 (1982) 114-126.

[Ga] K. Gadwedzki, Conformal field theories, Sém. Bourbaki 704 (1988)

[Gr] A. Grothendieck, Classes de Chern et representations linéaires des groupes discrets, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland (1968) 215-305.

[H] F. Hirzebruch, Topological methods in algebraic geometry, Springer-Verlag (1966).

[Hz] M. Hazewinkel, Formal groups and applications, Academic Press (1978)

[K] M. Karoubi, Cobordisme et groupes formels, Sém. Bourbaki 408 (1972)

[KNTY] N. Kawamoto, Y. Namikawa, A. Tsuchiya, Y. Yamada, Geometric realization of conformal field theory on Riemann surfaces, Commun. Math. Phys. 116 (1988) 247-308.

[KSU] T. Katsura, Y. Shimizu, K. Ueno,

1. New bosonization and conformal field theory over $\mathbb{Z}$, Commun. Math. Phys. 121 (1988) 603-622.

2. Formal groups and conformal field theory over $\mathbb{Z}$, Adv. Stud. Pure Math. 19 (1989) 347-366.

3. Article in preparation

[L] P.S. Landweber (ed.), Elliptic curves and modular forms in algebraic topology, Lecture Notes in Math. 1326, Springer-Verlag (1988)

[Li] D.E. Littlewood, The theory of group characters and matrix representations of groups, Oxford Univ. Press (1950)

[O] S. Ochanine, Sur les genres multiplicatifs définis par des intégrales elliptiques, Topology 26 (1987) 143-151.

[S] 佐藤幹夫(述), 野海正俊(記), ソリトン 方程式と普遍グラスマン多様体, 上智大学 数学レクチャーノート N° 18 (1984)

[TK] A. Tsuchiya, Y. Kanie, Fock space representation of the Virasoro algebra - Intertwining operators, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 22 (1986) 259-327.