代数幾何学シンポジウム記録
1989年度 pp.41-57

Limits of Instantons

京大・理 丸山正樹

1. Instanton bundles. S^4上の instanton と $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 上の階数2のベクトル束の関係について，よく知られてはいるが，以下で必要なことをまとめておく．以下簡単のため $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ を Xで表す。実数体 $\mathbb{R}$上の四元数体 $\mathbb{H}=\mathbb{R}+\mathbb{R}i+\mathbb{R}j+\mathbb{R}k$ を考える。$\mathbb{H}$の中の $\mathbb{R}+\mathbb{R}i$ を $\mathbb{C}$と同一視することにより，$\mathbb{C}$が$\mathbb{H}$に左から作用するから，$\mathbb{H}$は$\mathbb{C}$上のベクトル空間として，$\mathbb{C}^2$と同型である。従って，$\mathbb{H}^2$は$\mathbb{C}^4$と同型になる。$\mathbb{H}^2$へのjの左からの作用は$\mathbb{C}^4$上の antilinear map を導く．Xを $\mathbb{H}^2-\{0\}/\mathbb{C}^*$ と同一視すれば，この map はXからXへの同相写像$|\sigma|$を定める．$\mathcal{O}_X$の local section a に対して，$\sigma^*(a)=\overline{a\cdot|\sigma|}$ と定義すれば，$\sigma^*(a)$も$\mathcal{O}_X$の local section になり，σ^*は$\mathcal{O}_X$上の antilinear 写像になる．$|\sigma|$とσ^*の組 $\sigma=(|\sigma|,\sigma^*)$ は X上の real form を定める．すなわち，$\mathbb{R}$-scheme $X_{\mathbb{R}}$が存在し，Xは$X_{\mathbb{R}}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$と同型，$\sigma$は $id\otimes\gamma$ と同一視できる，ここでγは$\mathbb{C}$の共役写像である．このようにして，Xには実構造が入るが，これは $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ から定まる実構造とは全く違うものである．例えば，Xの real points の集合 $X_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ は空集合であることに注意して

欲しい。Xの中の直線($\cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$)は$\sigma$の作用で同じ直線に写る時，実直線であると言われる。次のことは明らかであろう。

(1.1) 直線lが実直線$\Longleftrightarrow$ $l \ni x$について，lはxと$\sigma(x)$を結ぶ直線である。

一方，自然な実解析的写像

$$\pi : X = \mathbb{H}^2 - \{0\} / \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{H}) = \mathbb{H}^2 - \{0\} / \mathbb{H}^* \cong S^4$$

がある．(1.1)から

(1.2) 直線lが実直線 $\Longleftrightarrow$ ${}^{\exists} y \in S^4$，$l = \pi^{-1}(y)$

がわかる。

$\sigma^2 = id_X$であるから，$\mathcal{O}_X$-加群Fについて，自然な同型$F \cong \sigma^* \sigma^*(F)$がある。以下は基本的な概念である．

定義 1.3. FはX上の連接層であるとする。

(1) Fが quaternionic であるとは，同型$\lambda : F \longrightarrow \sigma^*(F)$で，$\sigma^*(\lambda) \cdot \lambda = -id_F$となるものがあるときに言う．

(2) Fが real であるとは，同型$\lambda : F \longrightarrow \sigma^*(F)$で，$\sigma^*(\lambda) \cdot \lambda = id_F$となるものがあるときに言う．

Fが real であることと，$X_{\mathbb{R}}$上の連接層$F_{\mathbb{R}}$が存在して，F

が $F_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ と同型になることは同値である．例えば，

$$\mathcal{O}_X(n) \begin{cases} \text{quaternionic} & \text{if } n \text{ odd} \\ \text{real} & \text{if } n \text{ even} \end{cases}$$

Ω_X は real.

命題 1.4. F が単純連接層（すなわち，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F, F) \cong \mathbb{C}$）で，quaternionic ならば，決して real にはならない．

さて，S^4 上の SU(2)-bundle E 上の connection ∇ を考える。∇ の curvature form $\Theta(\nabla)$ について，$*\Theta(\nabla) = \Theta(\nabla)$ となるとき，∇ は self-dual connection，又は instanton であると言う．E の Pontrjagin 数と ∇ の instanton 数と定義する．$\pi^*(E)$ 上の connection $\pi^*(\nabla)$ が $\pi^*(E)$ 上の複素構造を定めることと，∇ が instanton になっていることは同値である．従って，instanton ∇ は X 上の正則ベクトル束を導く．GAGA-principle により，このベクトル束は代数的になる．次は M.F. Atiyah と R.S. Ward による基本定理である．

定理 1.5. Pontrjagin 数 n の instanton の同型類の集合は，次の 3 つの性質を持つ X 上の階数 2 の代数的ベクトル束（局所自由層）F の同型類の集合と，上の対応で全単射になっている：

(1) $c_2(F) = n$,

(2) Fは quaternionic,

(3) すべての実直線 l について, $F|_l \cong \mathcal{O}_l^{\oplus 2}$.

n, r は正整数で, $2n \geqq r$ となるものとする。$\overline{M}(n,r)$ で X 上の階数 r の半安定層 E で, Chern 類 $c_1(E)=0$, $c_2(E)=n$, $c_3(E)=0$ を持つものの moduli 空間であるとする。$\overline{M}(n,r)$ は射影的 scheme である。X の実構造はこれらの moduli 空間に実構造を導く, すなわち, 実射影的 scheme $\overline{M}(n,r)_{\mathbb{R}}$ が存在して, $\overline{M}(n,r) \cong \overline{M}(n,r)_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. real な半安定層はもちろん $\overline{M}(n,r)_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ の元を定めるが, quaternionic 半安定層も $\overline{M}(n,r)_{\mathbb{R}}$ の実点に対応している。一方, instanton 数 n を持つ instanton の全体は $8n-3$ 次元の連結, 実解析多様体をなす。これを instanton の moduli と言い, $I(n)$ で表す。上の定理により, $I(n)$ は $\overline{M}(n,2)_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ の部分空間になるが, 性質(3)により, $I(n)$ は "classical" topology での $\overline{M}(n,2)_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ の開集合になっている。$\overline{M}(n,2)_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ は compact であるから, $I(n)$ の $\overline{M}(n,2)_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ での閉包は $I(n)$ の compact 化になる

記号 1.6. $I(n)$ の $\overline{M}(n,2)_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ での閉包を $\overline{I}(n)$ で表す。

instanton から定まる X 上のベクトル束を, 以下 instanton bundle と呼ぶことにする。

2. Universal extension と Donaldson の compact 化.

$\overline{M}(n,2)$ の元 E で $H^2(X,E)=0$ となるものの全体は開集合 $\mathcal{U}$ をなす。$E\in\mathcal{U}$ ならば, $\dim H^1(X,E)=2n-2$ になる。自然な同型

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(H^1(X,E)\otimes\mathcal{O}_X, E)\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H^1(X,E), H^1(X,E))$$

で右辺の id に対応する左辺の元を ξ で表す. ξ は層の拡大

$$0\longrightarrow E\longrightarrow \mathcal{U}(E)\longrightarrow H^1(X,E)\otimes\mathcal{O}_X\longrightarrow 0$$

をきめる。

定義 2.1. $\mathcal{U}(E)$ を E の universal extension と呼ぶ.

$\mathcal{U}(E)$ の性質をまとめておく.

命題 2.2. E は上の $\mathcal{U}$ の元であるとする。
(1) $r(\mathcal{U}(E))=2n$, $c_1(\mathcal{U}(E))=0$, $c_2(\mathcal{U}(E))=n$, $c_3(\mathcal{U}(E))=0$.
(2) $H^i(X,\mathcal{U}(E))=0$, $\forall i$.
(3) E が μ-stable ベクトル束ならば, $\mathcal{U}(E)$ は安定である (もちろん, μ-stable ではない).

$E\in\mathcal{U}$ について, $\mathcal{U}(E)$ は必ずしも半安定ではない. E が μ-stable でも, ベクトル束でなければ, $\mathcal{U}(E)$ は半安定にさえ

ならないことがある．そこで，$V \subset \mathcal{U}$ を $E \in \mathcal{U}$ で $\mathcal{U}(E)$ が半安定になるものの全体とする．V は $\overline{M}(n,2)$ の中で Zariski 開集合である．V の元 E について，$\mathcal{U}(E)$ の S-同値類を対応させることにより，V から $\overline{M}(n,2n)$ への写像 $\varphi(n)$ を得る．

定理 2.3. $\varphi(n)$ は V から $\overline{M}(n,2n)$ の morphism になる．$V_0^{\mu}(n)$ で V の元で μ-stable ベクトル束となるものがなす Zariski 開集合とすると，$\varphi(n)$ は $V_0^{\mu}(n)$ から $\overline{M}(n,2n)$ への埋め込み (immersion) を導く．$\varphi(n)$ は X の実構造と可換，すなわち $\mathbb{R}$-morphism $\varphi(n)_{\mathbb{R}} : V_{\mathbb{R}} \longrightarrow \overline{M}(n,2n)_{\mathbb{R}}$ が存在して，$\varphi(n) = \varphi(n)_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ となる。

$I(n)$ が $(V_0^{\mu}(n))_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ の部分空間であることは良く知られている．従って，$\varphi(n)_{\mathbb{R}}$ は $I(n)$ の $\overline{M}(n,2n)_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ への埋め込みを導く．

記号 2.4. $I(n)$ を $\overline{M}(n,2n)_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ の部分空間とみたときの閉包を $\overline{\overline{I}}(n)$ で表す。

$\varphi(n)$ の構造を調べるために，μ-stable ベクトル束の "modification" を考えよう。$\overline{M}(n-a,2)$ の元 E で，μ-stable ベクトル束になっているものを取る。$l_1, \cdots, l_a$ は互に交らない X の直線であるとする．さらに，$E|_{l_i} \cong \mathcal{O}_{l_i}^{\oplus 2}$ と仮定しておく．$\mathcal{O}_{l_i}(1)$ の

global section s_1, s_2 で，$\{s_1=0\}\cap\{s_2=0\}=\phi$ となるものを取ると，$E|_{\ell_i}\cong\mathcal{O}_{\ell_i}^{\oplus 2}$ の basis に s_1, s_2 を対応さすことにより，全射 $E|_{\ell_i}\longrightarrow\mathcal{O}_{\ell_i}(1)$ を得る．制限射 $E\rightarrow E|_{\ell_i}$ との合成をとることにより，全射 $\gamma_i : E\longrightarrow\mathcal{O}_{\ell_i}(1)$ ができる。$\gamma=(\gamma_1,\cdots,\gamma_a)$ として，全射

$$\gamma : E\longrightarrow\bigoplus_{i=1}^{a}\mathcal{O}_{\ell_i}(1)$$

が定まる。$E(\ell_1,\cdots,\ell_a;\gamma_1,\cdots,\gamma_a)=\ker(\gamma)$ とおく．

命題 2.5. $F=E(\ell_1,\cdots,\ell_a;\gamma_1,\cdots,\gamma_a)$ とおく．

(1) F は μ-stable であり，$c_1(F)=0$, $c_2(F)=n$, $c_3(F)=0$ となる．従って，F は $\overline{M}(n,2)$ の元になる．

(2) $U(F)$ の連接部分層による filtration $0=F_0\subset F_1\subset F_2\subset\cdots\subset F_a\subset F_{a+1}=U(F)$ で，$F_i/F_{i-1}\cong Q(\ell_i)$ $(1\leq i\leq a)$，$F_{a+1}/F_a\cong U(E)$ となるものが存在する。ここで，$Q(\ell_i)$ は自然な全射 $H(X,\mathcal{O}_{\ell_i}(1))\otimes\mathcal{O}_X\longrightarrow\mathcal{O}_{\ell_i}(1)$ の kernel である。

$Q(\ell_i)$ は $c_1(Q(\ell_i))=0$, $c_2(Q(\ell_i))=1$, $c_3(Q(\ell_i))=0$ となる階数 2 の安定層であることがわかるから，上記 (2) の filtration が $U(F)$ の S-equivalence 類を与えるものであることが知られる．すなわち，$gr(U(F))=\left(\bigoplus_{i=1}^{a}Q(\ell_i)\right)\oplus U(E)$ となる．ところで，各 γ_i は $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ の Zariski 開集合で parametrize されていて，この parametrization で $(\gamma_1,\cdots,\gamma_a)$ が $(\gamma_1',\cdots,\gamma_a')$ と違っていれば，

$E(l_1,\cdots,l_a;\gamma_1,\cdots,\gamma_a)$ は $E(l_1,\cdots,l_a;\gamma_1',\cdots,\gamma_a')$ と同型でないことは明らかである。ところが，それぞれの universal extension の S-equivalence 類は同じ $\left(\overset{a}{\underset{i=1}{\oplus}} Q(l_i)\right)\oplus \mathcal{U}(E)$ で代表される。結局 $\varphi(n)$ は $\overbrace{\mathbb{P}^3(\mathbb{C})\times\cdots\times\mathbb{P}^3(\mathbb{C})}^{a}$ のある Zariski 開集合を一点につぶしている。

命題2.5では $l_1,\cdots,l_a$ は互に交わっていないと仮定したが，$\left(\overset{a}{\underset{i=1}{\oplus}} Q(l_i)\right)\oplus \mathcal{U}(E)$ の S-equivalence class は l_i，l_j が交わっても，あるいは一致しても $\overline{M}(n,2n)$ の点を与えている。定理2.4を考慮すると，これは $V_0^M(n-a)\times\Sigma^a Gr(3,1)$ が $\overline{M}(n,2n)$ に入っていて，そのある開集合が $\varphi(n)$ の像に含まれていることを示している，ここで $\Sigma^a Gr(3,1)$ は X の直線のなす Grassmann の a 個の対称積である。

実構造のことを考慮して，上の考察をふりかえってみよう。$l_1,\cdots,l_a$ は X の実直線で互に異なるものとする。このとき，i と j が異なれば，$l_i\cap l_j=\phi$ である。$\mathcal{O}_{l_i}(1)$ は quaternionic 層であるから，σ の l_i への作用は $\mathcal{O}_{l_i}(1)$ の作用に拡張されている。$\mathcal{O}_{l_i}(1)$ の零でない global section s_i を取り，$t_{i1}=s_i+\sigma^*s_i$ $t_{i2}=s_i-\sigma^*s_i$ とおく。$\sigma^*t_{i1}=-t_{i2}$，$\sigma^*t_{i2}=t_{i1}$ である。c_2 が $n-a$ である instanton bundle E を取って，$E|_{l_i}\cong\mathcal{O}_{l_i}^{\oplus 2}$ の quaternionic 層としての symplectic 基 e_{i1}, e_{i2} を選んで，$\gamma_i(e_{i1})=t_{i1}$，$\gamma_i(e_{i2})=t_{i2}$ で，$\gamma_i: E\longrightarrow\mathcal{O}_{l_i}(1)$ を定める。$\gamma=(\gamma_1,\cdots,\gamma_a)$

とおけば，γ は real 射で $E(l_1,\cdots,l_a;\gamma_1,\cdots,\gamma_a)$ は quaternionic 層となる．この場合，$Q(l_i)$ も quaternionic になり，$\left(\bigoplus_{i=1}^{a} Q(l_i)\right) \oplus U(E)$ が，$\varphi(n)(E(l_1,\cdots,l_a;\gamma_1,\cdots,\gamma_a))$ を代表している．$I(n-a)\times\Sigma^a S^4$ が $\overline{M}(n,2n)_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ に含まれていることは上と同様であるが，次の定理が証明される．証明は非常に複雑で，長い．

定理 2.6. $\overline{\overline{I}}(n) = \coprod_{a=0}^{n} I(n-a)\times\Sigma^a S^4$. ここで，$I(0)$ は一点であるとみなす．$\overline{\overline{I}}(n)$ は $\overline{M}(n,2n)$ の中で semi-algebraic.

Donaldson は上の定理の右辺に適当な位相を導入して (instanton の極限を取ると，いくつかの pole を持つ "connection" を得るが，それらの pole は除去可能である．pole を除去すると，pole の数だけ instanton 数が下り，$I(n-a)$ の元を得る．$\Sigma^a S^4$ は pole の位置を parametrize している)，それが $I(n)$ の compact 化になっていることを示した．上の定理は Donaldson の compact 化が "代数幾何学的" に構成でき，従って semi-algebraic な構造を持つことを示している。

3. Limits of instantons.

$I(n)$ の $\overline{M}(n,2n)_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ での閉包は定理 2.6 で完全に決まり，それが Donaldson の compact 化であることまでわかった．しかし，

$\overline{M}(n,2)_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ の中での閉包$\overline{I}(n)$は，はるかに難しい．例えばEを$I(n-1)$から取ってきて，実直線l，real 射γにより$E(l;\gamma)$を作る．定理2.6は$U(E(l;\gamma))$の S-equivalence 類は$I(n)$の点列の極限にはなっていることを示している。証明を見ると，実は$Q(l)\oplus U(E)$が$I(n)\subset\overline{M}(n,2n)_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$の中の1-parameter family の極限になっていることが証明されていて，$U(E(l;\gamma))$がどうなっているかはわかっていなかった。

以下で，比較的簡単な構造を持った階数2の安定 quaternionic 層は$\overline{I}(n)$に含まれているという，我々の結果について解説する。本質的な部分で，大変な計算によっており，その大部分は共同研究者である G. Trautmann による。

$l_1,\cdots,l_a$は相異る実直線とする．$\mathcal{O}_{l_i}(1)$は quaternionic だから$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{l_i}(1),\mathcal{O}_{l_i}(1))$は自然な実構造を持っている．この中で real point を取り，それに対応する$\mathcal{O}_X$-加群としての拡大

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_{l_i}(1)\longrightarrow L_{i1}\longrightarrow\mathcal{O}_{l_i}(1)\longrightarrow 0$$

を考えると，L_{i1}は quaternionic になる．L_{ij}まで quaternionic 層が定義されたとする。上と同様に$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(L_{ij},\mathcal{O}_{l_i}(1))$の real point で決まる拡大

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_{l_i}(1)\longrightarrow L_{ij+1}\longrightarrow L_{ij}\longrightarrow 0$$

は quaternionic 層である。この様にして定まる quaternionic $\mathcal{O}_X$-加群で，その support がl_iであるものL_iを取る．L_iがb_i個の

$\mathcal{O}_{\ell_i}(1)$の拡大になっているとする．$b=\sum_{i=1}^{a} b_i$ として，E は $I(n-b) \subset \overline{M}(n-b,2)_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ の元とする。E から $L=\bigoplus_{i=1}^{a} L_i$ への全射 γ があったと仮定して，$E(L)=\ker(\gamma)$ とおく．

よく知られた instanton bundle の性質により $H^i(X,E(-2))=0$ $i=1,2$，$H^2(X,E)=0$ がわかるから，E(L)の定義から $H^i(X,E(L))=0$ $i=1,2$，$H^2(X,E(L))=0$ となる。従って，Beilinson のスペクトル列を使って次の補題を得る。

補題3.1. 複体

$$\mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X(-1) \xrightarrow{k} \mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{C}} \Omega_X(1) \xrightarrow{m} \mathbb{C}^{2n-2} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X$$

で，k が単射 m が全射になるものが存在して，E(L) はこの複体の cohomology 層になっている。

容易にわかるように，準同型 k（必ずしも単射ではない）を与えることと，$\mathbb{C}$-線型写像 $K:\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^2 V$ を与えることは同値である，ここで V は $X=\mathbb{P}(V)$ となる 4次元 $\mathbb{C}$-vector space. 同様に m は $M:\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{2n-2} \otimes_{\mathbb{C}} V$ と対応している。行列の積 $K \wedge M$ を $\bigwedge^3 V$ に係数を持つものとして自然に定義できるが，これは $\mathbb{C}$-線型写像の結合

$$\mathbb{C}^n \xrightarrow{K} \mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^2 V \xrightarrow{M\otimes 1} \mathbb{C}^{2n-2} \otimes_{\mathbb{C}} V \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^2 V \longrightarrow \mathbb{C}^{2n-2} \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^3 V$$

に対応するものである．mk が0になることと $K \wedge M=0$ とは同値である。$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^2 V) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{2n-2} \otimes_{\mathbb{C}} V)$ の部分

scheme Y_nを次の条件で定める：$(K, M) \in Y_n \Leftrightarrow$

① $K \wedge M = 0$,

② kは単射，mは全射，

③ k, mが定める複体のcohomology層が安定．

Y_nには$G = GL(n, \mathbb{C}) \times GL(n, \mathbb{C}) \times GL(2n-2, \mathbb{C})$が

$G \ni (R, S, T)$, $Y_n \ni (K, M)$に対して，

$$(K, M) \longmapsto (RKS^{-1}, SMT^{-1})$$

となるように作用する。これは，$\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^{2n-2}$の座標の取りかえに対応する．$t \in \mathbb{C}^*$について(tI_n, tI_n, tI_{2n-2})が自明に作用しているから，$\bar{G} = G/\mathbb{C}^*$がY_nに作用している。

相対的Beilinsonスペクトル列の局所普遍性により，$Y_n/\bar{G}$は（存在すれば）$H^i(X, F(-2)) = 0$ $(i=1,2)$, $H^2(X, F) = 0$, $r(F) = 2$の安定層Fで，$c_1(F) = 0$, $c_2(F) = n$, $c_3(F) = 0$となるもののmoduli空間となる。$a=1$, $b_1=1$の場合，すなわち$F = E(\mathcal{O}_\ell(1))$について，$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(F, F) = 0$となることは，$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(E, E) = 0$（これは大変むずかしい）を使えば，それほど困難なく導ける．故に，moduli空間はFでsmoothになっている．我々はY_nのFに対応している点での接ベクトルの状態を調べたいので，Y_nがその点でsmoothになっていることを知りたい．そのための標準的方法は，その点が$\bar{G}$の作用についてstableになっていること

とを示すことである。実はこれが非常に難しく誰も成功していない。Verdier が [Astérisque 71-72, Exposé VII] で intrinsic な証明を書いているが，彼の方法がだめであることは [Mumford, Geometric Invariant Theory, Ch4, §3] にある永田雅宜氏の反例でわかる。“どんなに作用の状態が良くても，stability はそれから自動的にはでてこない”。結局は 1-parameter subgroup を使っての計算しかないようで，我々の場合にはあまりにも複雑すぎる。

ところで，次の補題は [EGA, Ch III 7.7.8, 7.7.9] を使えば，良い演習問題程度である。

補題 3.2. $\bar{G}$ の Y_n への作用は（強い意味で）自由である。

これにより，$Y_n/\bar{G}$ は complex spaces の圏，または algebraic spaces の圏で存在し，それは F で smooth かつ Y_n は $Y_n/\bar{G}$ の $\bar{G}$ を群とする principal fibre space となる。従って，Y_n が F に対応する点で smooth になることが分る。

$F = E(\mathcal{O}_\ell(1))$ を考える。V の基底 (x, y, v, w) をうまく選んで，ℓ が $x = y = 0$ で定義され，$\sigma^* x = y$, $\sigma^* y = -x$, $\sigma^* v = w$, $\sigma^* w = -v$ となるようにする。このとき，次の命題を得る。

命題 3.3. F は Y_n の点 (K, M) で次の形をしたもので代表される；

$$K = \left(\begin{array}{c|c} x \wedge y & 0 \cdots 0 \\ \hline A & K' \end{array}\right), \quad M = \left(\begin{array}{cc|c} x & y & 0 \cdots 0 \\ \hline B & C & M' \end{array}\right)$$

ここで，(K', M') は Y_{n-1} の点で instanton bundle E に対応している．さらに，$A\wedge x\wedge y=0$ としてよい。

Y_n の (K,M) での tangent space を考える．Y_n を定義する条件のうち②と③は開集合をきめる条件であることに注意して，次の写像を見よう：

$$\mu: \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n\otimes_{\mathbb{C}}\overset{2}{\wedge}V)\times\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{2n-2}\otimes_{\mathbb{C}}V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{2n-2}\otimes_{\mathbb{C}}\overset{3}{\wedge}V)$$

$$\mu(K_1, M_1) = K_1\wedge M + K\wedge M_1$$

μ の source は Y_n の ambiant space の tangent space であり，μ は①の方程式の微分であるから，$\ker(\mu)$ が Y_n の (K,M) の tangent space $T_{(K,M)}$ になる。Y_n の中でベクトル束に対応していないものは閉 scheme Y_n' をなしている．

命題 3.4. (K,M) は命題3.3のように取る．

(1) Y_n' は (K,M) で smooth，余次元1の subscheme である．

(2) $T'_{(K,M)}$ は Y_n' の (K,M) での tangent space であるとする。$(K_1, M_1)\in T_{(K,M)}$，$K_1=(k_{ij})$ が $T'_{(K,M)}$ に含まれるための必要十分条件は $k_{ij}\wedge x\wedge y=0$ となることである

ここで，Y_n の実構造について注意をしておく．σ の V への作用は $\wedge V$ への作用に拡張される．従って，$(K,M)\in Y_n$ について，(σ^*K, σ^*M) が各行列の係数への σ の作用として定義

される．$(2n-2)\times(2n-2)$ 行列

$$J=\begin{pmatrix} \begin{matrix}0&1\\-1&0\end{matrix} & & & 0\\ & \begin{matrix}0&1\\-1&0\end{matrix} & & \\ 0 & & \ddots & \end{pmatrix}$$

を取る．このとき，$(K,M)\in Y_n$ が quaternionic 層を与えることと，$(K,M)=(\sigma^*K,\sigma^*MJ)$ となることは同値である．この条件をみたす点の全体が real scheme $Y_{n\mathbb{R}}$ の real points になっており，$Y_{n\mathbb{R}}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}\cong Y_n$ となる．故に，命題3.4 は Y_n を $Y_{n\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ でおきかえても正しい．

命題3.4 と上の注意により，$T_{(K,M)}$ の real vector (K_1,M_1) で，$T'_{(K,M)}$ に入らないものがある．$K_1=(k_{ij})$ と書くと，$k_{ij}\wedge x\wedge y\neq 0$ である．(K_1,M_1) に沿っての (K,M) の近傍での real analytic 積分曲線 $(K(t),M(t))$ を作る．

$$K(t)=\left(\begin{array}{c|c} x\wedge y & 0\cdots 0\\ \hline A & K'\end{array}\right)+t\left(\begin{array}{c|c} k_{11} & \\ \hline & \end{array}\right)+t\text{の高次項}$$

ところで，$F'\in\overline{M}(n,2)$ が Y_n の元 (K',M') に対応したとする．$\mathbb{C}$ 上の 6 変数の多項式環 $S_{\mathbb{C}}(\overset{2}{\wedge}V)$ の元として $\det K'$ を考えると，$\{\det K'=0\}\cap Gr(3,1)\subseteq\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$ が丁度 F'の "divisor of jumping lines" $\{\ell\in Gr(3,1)\mid F'|_\ell\not\cong\mathcal{O}_\ell^{\oplus 2}\}$ になる．定理1.5. の条件(3) は $\phi=\{\det K'=0\}\cap S^4\subseteq\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$ に他ならない．さらに，(K',M') が Y_nの点で $\{\det K'=0\}\cap S^4=\phi$ ならば，対応する F'はベクトル

束になることも分る．さて，元にもどって実直線 $x=y=0$ に対応する S^4 の点を p とおいて，$t_{11}(p) = t_{11}\wedge x \wedge y \in (\wedge^3 V)_{real} = \mathbb{R}$ が正であると仮定してよい．すると $t(>0)$ が十分小さければ，$\det K(t)=0$ が S^4 と交わらないことは容易に示される．故に，十分小さい正の t について，$(K(t), M(t))$ は $I(n)$ の元に対応していることがわかるから，(K, M) に対応する F が $\overline{I}(n)$ に入っていることが分る．

定理3.5. ℓ は実直線 E は $I(n-1) \subset \overline{M}(n-1,2)_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ の元とする．任意の全射 $\gamma: E \to \mathcal{O}_\ell(1)$ に対して，$\ker(\gamma)$ は $\overline{I}(n)$ に入っている．

この定理の証明に現われた real analytic curve を使えば，$b_1=\cdots=b_a=1$ の場合に，すべての $E(L)$ が $\overline{I}(n)$ に入っていることもすぐにわかる．$b_i>1$ の時は非常に複雑で，我々が得た最良の結果は次の通りである．

定理3.6. $1\le i\le a$ について，$L_i\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_{\ell_i}$ が torsion free であるとすると，すべての $E(L)$ は $\overline{I}(n)$ に入っている．

注意 (1) 定理3.5 の γ は $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ で parametrize されている．§2 に使った開集合 U を使うと，写像 $\varphi(n): \overline{I}(n)\cap U \longrightarrow \overline{M}(n,2n)_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ が考えられるが，$I(n-1)\times S^4 \subset \overline{\overline{I}}(n)$ の点の

逆像に $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ が入っていることが分ったことになる。これは丁度 bubble の parameters である。

(2) 定理3.6 の条件をみたす L_i は存在し，そのような L_i について $L=\bigoplus_{i=1}^{a} L_i$ を考えれば，E から L への全射は必ず存在する。従って，上の(1)の写像 $\varphi(n)'$ の像は $\overline{\overline{I}}(n)$ になっていることが分る。