

## 商特異点を持つホモロジー平面について

阪大理 宮西 正宜

京大理 杉元 徹

## § 1. 序

$X$  を複素数体  $\mathbb{C}$  上で定義された非特異代数曲面とする。 $X$  のホモロジー群  $H_i(X, \mathbb{Z})$  が  $i \geq 1$  に於いて自明である時、 $X$  をホモロジー平面という。我々は、今年の城崎シンポジウムで、ホモロジー平面についてこれまで知られていた結果を紹介し、同時に小平次元  $K=2$  のホモロジー平面の、新しい無限個の例を構成した。またホモロジー平面の研究は、 $\mathbb{C}^*$  の  $\mathbb{C}^2$  への代数的な作用の *linearization* の問題と関連し、特に次の Petrie の予想を解決することが我々の目標であった。

*Homology plane conjecture* 自明でない、有限位数の自己同型を持つホモロジー平面は、 $\mathbb{C}^2$  に同型である。

さて、我々は、ホモロジー平面の概念を少し拡張し、 $H_i(X; \mathbb{Q}) = 0$  ( $\forall i \geq 1$ ) のとき、 $X$  を  $\mathbb{Q}$ -ホモロジー平面という。

また、 $X$  が高々商特異点のみを持つ正規曲面で、 $H_1(X; \mathbb{Z}) = 0$  のとき、 $\log$ -ホモロジー平面、 $H_1(X; \mathbb{Q}) = 0$  の時、 $\log$ - $\mathbb{Q}$ -ホモロジー平面という。 $K=0$  の $\mathbb{Q}$ -ホモロジー平面は、藤田氏によって分類されており、その中には自明でない自己同型を持つものが存在する。また、 $X$  がホモロジー平面で有限位数の自己同型を持つば、 $X/\sigma$  は、 $\log$ -ホモロジー平面になる。以上の様な理由から、我々は考える対象を拓げて  $\log$ - $\mathbb{Q}$ -ホモロジー平面の分類 ( $K \leq 1$  のケース) や例の構成 ( $K=2$  のケース) を行なう。但し、 $X$  が正規曲面の時、 $K(X) := K(X - \text{Sing} X)$  で定義する。一般に、 $\mathbb{Q}$ -ホモロジー平面は有理曲面になるかどうか、わかっていない。

§2では、 $K \leq 1$  の時を考察し、まず  $K=-\infty$  の  $\log$ - $\mathbb{Q}$ -ホモロジー平面の構造を決定する。 $K=0$  の  $\mathbb{Q}$ -ホモロジー平面は藤田氏によって分類されているが、特異点を持つ場合はよくわからない。次に  $K=1$  の時、 $\mathbb{C}^*$ -ファイバー空間の構造を持つ  $\log$ -ホモロジー平面を決定する。

§3では、 $K=2$  の時を扱がい、我々は例として、 $\mathbb{C}^*$ -ファイバー空間の構造を持つホモロジー平面を考える。その構成方法を具体的に書くことができるか、その中に自明でない自己同型を持つものが存在し、しかもその曲面は可縮である。従って、前掲の Petrie の予想は、(ホモロジー平面を可縮代数曲

面とおきかえても), 成立しないことがわかり,  $\mathbb{C}^*$  の  $\mathbb{C}^3$  への作用の *linearization* の問題に対する Kraft らのプログラムは, 有効でなくなった。

また, 昨年の城崎シンポジウムで, Petrie によって,  $K=1$  のホモロジー平面に対しては, 彼の予想は証明されているということを報告したが, 実は誤解があったようで, 彼の証明は, 可縮曲面に対してしか通用しない。実際, 任意の標数  $p$  に対して  $K(X)=1$  のホモロジー平面で,  $\mathbb{Z}/2p+1$  が作用するものが存在する。

*linearization* の問題は一般の *reductive* 群の  $\mathbb{C}^n$  への作用についても考えることができるが,  $SL_2(\mathbb{C})$  などについては, *linearizable* でない作用の例が最近 Schwartz によって与えられた。しかし,  $\mathbb{C}^*$  や有限アーベル群については未解決である。

## §2. $K \leq 1$ の *log*-ホモロジー平面.

いつものように,  $X$  を正規射影平面  $V$  の中に埋め込み,  $D = V - X$  とした時,  $V$  は  $D$  にそって非特異かつ  $D$  は高々単純正規交叉の因子とする。  $f: W \rightarrow V$  を  $V$  の特異点の極小特異点解消,  $Y := f^{-1}(X)$ ,  $\varphi := f|_Y$ ,  $Z = \text{Sing } X$ ,  $\Delta = f^{-1}(Z)$  とおく。この時, 次の補題が成り立つ。

補題 1. (1)  $X$  を  $\log$ - $\mathbb{Q}$ -ホモロジー平面とする。

$\Rightarrow \rho(W) = \rho_g(W) = 0$ .  $D$  は単連結で  $X$  はアフィン曲面。

(2)  $X$  を非特異有理曲面,  $X = V - D$  とおき次の条件を仮定する。

(a)  $D$  は連結かつ単連結

(b)  $H^2(V; \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(D; \mathbb{Q})$  は同型。

この時、 $X$  は  $\mathbb{Q}$ -ホモロジー平面になり、次の同型が成り立つ。

$$\text{Pic}(X) \cong H_1(X; \mathbb{Z}) \cong \text{Coker}(H^2(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(D; \mathbb{Z}))$$

さらに  $H_1(X; \mathbb{Z}) = 0$  が成り立つならば、 $X$  はホモロジー平面である。

(3)  $X$  を有理  $\log$  曲面 (高々商特異点しかもたない正規曲面) で次の条件をみたすと仮定する。

(a)  $D$  は連結かつ単連結

(b)  $H^2(W; \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(D \cup \Delta, \mathbb{Q})$  は同型。

この時、 $X$  は  $\log$ - $\mathbb{Q}$ -ホモロジー平面になり、次が成り立つ。

$$0 \rightarrow H_1(\partial T; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X^\circ; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X; \mathbb{Z}) \rightarrow 0 \text{ は exact,}$$

$$H_1(X^\circ; \mathbb{Z}) \cong \text{Pic}(W - D - \Delta) \cong \text{Coker}(H_2(D \cup \Delta; \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(W; \mathbb{Z}))$$

但し、ここで  $X^\circ = X - \Sigma$ ,

$\partial T =$  特異点の閉近傍の境界の union

である。

さらに  $H_1(X; \mathbb{Z}) = 0$  が成り立てば、 $X$  は  $\log$ -ホモロジー平面。

証) (2)の略証を与える。まず次の  $\mathbb{Z}$  係数のコホモロジー完全係列を考える。

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(V; D) \rightarrow H^0(V) \rightarrow H^0(D) \rightarrow H^1(V; D) \rightarrow H^1(V) \rightarrow H^1(D) \\ \rightarrow H^2(V, D) \rightarrow H^2(V) \rightarrow H^2(D) \rightarrow H^3(V, D) \rightarrow H^3(V) \rightarrow 0 \\ \rightarrow H^4(V, D) \rightarrow H^4(V) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

仮定より  $H^1(V) = H^1(D) = H^3(V) = 0$ 。これと双対定理から

$$H_4(X; \mathbb{Z}) = H^0(V, D; \mathbb{Z}) = 0$$

$$H_3(X; \mathbb{Z}) = H^1(V, D; \mathbb{Z}) = 0$$

$$H_2(X; \mathbb{Z}) = H^2(V, D; \mathbb{Z}) = 0$$

(10) と  $H^2(V; \mathbb{Z})$  が free であることによる。) )

$$H_1(X; \mathbb{Z}) = H^3(V, D; \mathbb{Z}) = \text{Coker}(H^2(V, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(D; \mathbb{Z}))$$

特に  $H_1(X, \mathbb{Z})$  は有限群である。また、

$$\begin{aligned} \text{Pic}(X) &= H^2(X, \mathbb{Z}) \\ &= \text{Hom}(H_2(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}^1(H_1(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \\ &\cong H_1(X, \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

§1で述べたように、log 曲面の小平次元を  $\kappa(X) := \kappa(X - \text{Sing}(X))$  で定義する。

Case  $\kappa = -\infty$   $\kappa(X) = -\infty$  の log ホモロジー平面について次の事柄が成り立つ。

定理 1.  $X$  を  $K(X) = -\infty$  の  $\log$ -ホモロジー平面とすると、 $X$  は次のどれかに同型である。

(1)  $\mathbb{C}^2$

(2)  $\mathbb{C}^2/G$ :  $G$  は  $GL(2, \mathbb{C})$  の *small* 有限部分群.

(3)  $X$  は  $\mathbb{C}$ -ファイバー空間  $p: X \rightarrow \mathbb{C}$  の構造を持ち、 $p$  のファイバーはすべて既約、 $H_1, \dots, H_n$  を  $p$  の *multiple fibers* の全体で、その重複度を  $d_1, \dots, d_n$  とすると、各ファイバー  $H_i$  上に位数  $d_i$  の巡回特異点が丁度一個ずつ存在する。

(1), (2), (3) に属する曲面は、いずれも可縮曲面である。

証) 宮西-角田の *non-contractible boundary* を持つ、開曲面に対する構造定理によると、 $X$  に対して次の二つのケースのいずれかが成り立つことがわかる。

(I).  $X$  は  $A^1$ -ファイバー空間の構造を持つ。

または、

(II)  $X^\circ$  の Zariski 開集合  $U$  と、 $U$  から  $T$  への固有双有理写像  $\phi: U \rightarrow T$  が存在して次が成り立つ。

(1)  $U = X^\circ$  が、 $X^\circ - U$  は純一次元。

(2)  $T$  は  $T := \mathbb{C}^2/G - \{0\}$  の開集合で  $\dim(T - T) \leq 0$ 。

以下 (II) のケースを考える。 $X$  は  $A^1$ -曲面であるから、

特に、 $\phi$  は同型になる。従って、

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X^*) = \Gamma(T', \mathcal{O}_{T'})^* = \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^* = \mathbb{C}^*$$

いま、 $X^\circ - U$  が純一次元であるとし、 $X^\circ - U = G_1 U \cup \dots \cup G_s$  を既約成分への分解とすると、

$$m(\bar{G}_1 + \dots + \bar{G}_s) \sim F \quad \text{linear equiv} \quad \text{Supp } F \subseteq V - X$$

となる、正数  $m$ 、正因子  $F$  が存在し、このことは  $V$  上の、定数でない関数  $f$  に対して、 $U$  上で可逆になるものが存在することを意味する。これは矛盾。よって、 $X^\circ = U$ 、従って、

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \Gamma(T', \mathcal{O}_{T'}) = \Gamma(T, \mathcal{O}_T) = \Gamma(\mathbb{C}^2/G, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2/G})$$

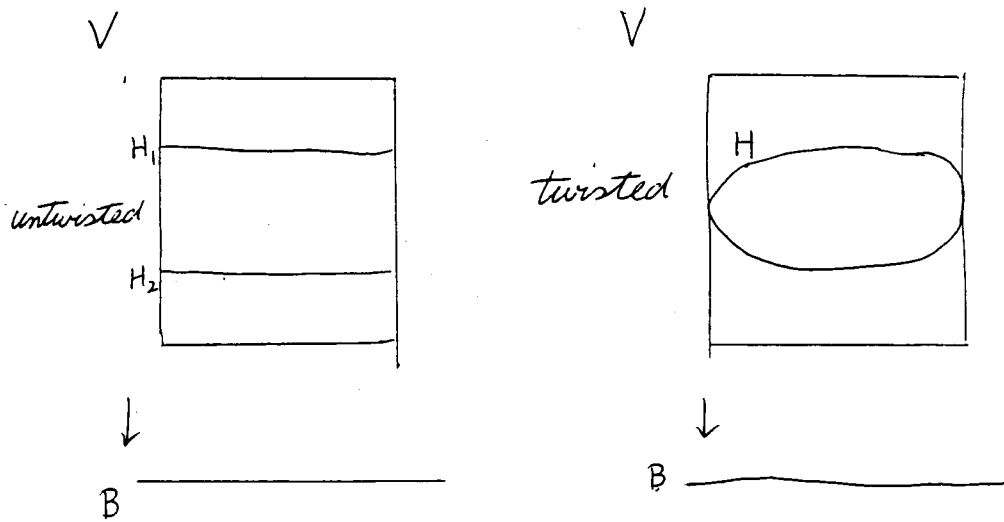
$$\therefore X = \mathbb{C}^2/G$$

(1) の時は、補題 1 を使って、(3) の主張を得る。log ホモロジ-平面についても、同様の結果を得る。

Case  $K=0$   $\mathbb{Q}$ -ホモロジ-平面は藤田氏によって分類されている。特にホモロジ-平面は存在しない。また藤田氏の記号で  $H[k, -k]$ ,  $\gamma\{3, 3, 3\}$  は自明でない自己同型を持つ。特異点を持つ場合はよくわからない。 $K=0$  の log ホモロジ-平面が存在するかどうか、わかっていない。

Case  $K=1$  特異点のある場合、 $K=1$  でも  $\mathbb{C}^*$ -ファイバー空

間の構造を持つかどうかわかっていない。ここでは、 $X$ が  $\mathbb{C}^*$ -fibration  $\pi: X \rightarrow C$  を持つと仮定する。また、コンパクト化  $X \hookrightarrow V$  は、 $\pi$  の  $V$  への拡張  $p: V \rightarrow B$  が存在する様を選んでおく。  $D$  の既約成分で、 $p$  の一般のファイバー  $p^{-1}(b)$  ( $b \in B$ ) と交わるものの数は、2本以下であるが、丁度2本であるとき、*untwisted* 一本の時、*twisted* という。



次の3つのケースに分けて考える。

- (A) *untwisted*  $C \cong \mathbb{P}^1$   
 (B) *twisted*  $C \cong \mathbb{A}^1$   
 (C) *untwisted*  $C = \mathbb{A}^1$

(以上で全ての可能性が尽されている)

$X$  を  $\mathbb{C}^*$ -ファイバー空間の構造を持つ  $\log Q$ -ホモロジー平面とすると、次が成り立つ。ここでは、(A)、(B)のケースの結



果のみ述べる。(C)については論文参照。

Case (A)  $F_0, \dots, F_n$  を  $\pi$  の特異ファイバーで、それぞれの重複度を  $m_0, m_1, \dots, m_n$  とすると、 $(F_0)_{red} \cong \mathbb{C}$ ,  $(F_i)_{red} = \mathbb{C}^* (1 \leq i \leq n)$ .

$H_1$  と  $H_2$  を  $P$  の section で、 $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ ,  $(H_i^2) = -a$  ( $a \geq 0$ ),  $H_1, H_2 \subset D$  とするように選んでおく。  $V$  の特異点解消  $W$  から、

Hirzebruch 曲面  $\Sigma_a$  への morphism  $\sigma: W \rightarrow \Sigma_a$  で  $\bar{H}_1 = \sigma(H_1)$  が minimal section になるものが存在する。  $\sigma^*(\bar{H}_2) = \sum \delta_i (F_i)_{red} + \dots$  とする。但し  $(F_i)_{red}$  は  $(F_i)_{red}$  の  $W$  上の proper transform の閉包である。この時、次の事柄が成り立つ。

(1)  $\kappa(X) = 1, 0, -\infty$

$$\Leftrightarrow (n-1) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} > 0, =, < 0.$$

(2) 特異点は存在すれば、 $d$  次の巡回商特異点が  $F_0$  上に一個だけ存在する。  $H_i(X; \mathbb{Z})$  は有限群で、位数は

$$\frac{1}{d} | m_0 m_1 \dots m_n a - \sum_{i=0}^n m_0 \dots \hat{m}_i \dots m_n \delta_i |$$

但し  $d | m_0, d | \delta_0$ . さらに  $H_i(X; \mathbb{Z}) = 0$  ( $i \geq 2$ ).

(3)  $X$  が可縮  $\Leftrightarrow a=1, m_0=d, n=2, m_1 m_2 - m_1 \delta_2 - m_2 \delta_1 = \pm 1$ .

Case (B)  $H$  を  $D$  に含まれる  $P$  の 2-section とする。

(1)  $p|_H: H \rightarrow B$  の分岐点を  $P_0, P_\infty, Q_0 = p|_H(P_0), Q_\infty = p|_H(P_\infty)$  とする。  $\bar{p}^*(Q_\infty) \subset D$  としよ。  $F_0 := \pi^*(Q_0) = m_0 C_0, C_0 \cong \mathbb{A}^1$

と書けるが、 $X$  が特異点を持つ時  $C_0$  は、

- (i) 一個の巡回商特異点か
- (ii) Dynkin タイプが  $D_r$  の商特異点か
- (iii) 二個の  $A_1$  タイプの有理二重点

のいずれかを持つ。

(2)  $F_i = m_i C_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ) を他の特異ファイバーとする時  $C_i \simeq \mathbb{C}^*$

(3)  $H_i(X, \mathbb{Z}) = 0$  ( $i \geq 2$ )

(i), (ii) の時は  $H_1(X, \mathbb{Z}) = \prod_{i=1}^r \mathbb{Z}/m_i \mathbb{Z}$

(ii) 又は  $X$  が非特異の時  $H_1(X, \mathbb{Z})$  は  $\mathbb{Z}/m_i \mathbb{Z} \times \prod_{i=1}^r \mathbb{Z}/m_i \mathbb{Z}$  の  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  による extension.

(4)  $\kappa(X) = 1, 0, -\infty$

$$\Leftrightarrow (r-1) - \sum_{i=1}^r \frac{1}{m_i} > 0, = 0, \text{ or } < 0.$$

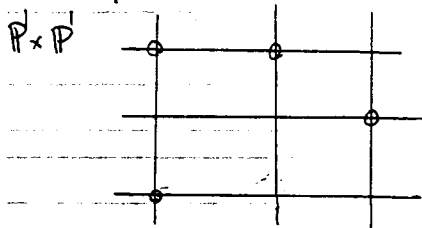
(5) 特に  $H_1(X, \mathbb{Z}) = 0 \Rightarrow \kappa(X) = -\infty$ .

### §.3. $\kappa=2$ の $\log$ -ホモロジ-平面の例

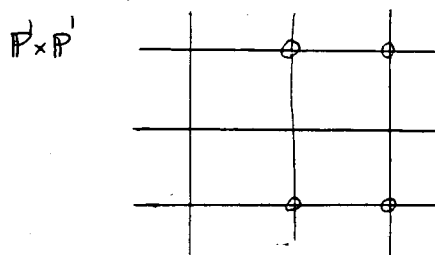
この節では  $\mathbb{C}^{**}$  (=  $\mathbb{C}$ -2点)-ファイバー空間の構造を持つ  $\log$ - $\mathbb{Q}$ -ホモロジ-平面を考える。  $\kappa(\mathbb{C}^{**})=1$  であるので、このタイプの  $\log$ - $\mathbb{Q}$ -ホモロジ-平面は  $\kappa=2$  になる可能性がある。明らかに、 $\mathbb{C}$ -ないし  $\mathbb{C}^*$ -ファイバー空間の構造を持つ場合を除くと、 $\mathbb{C}^{**}$ -ファイバー空間の構造を持つ  $\log$ - $\mathbb{Q}$ -ホモロジ-平面は、 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  または  $F_1$  上の曲線の次の様な配置から

得られることがわかる。

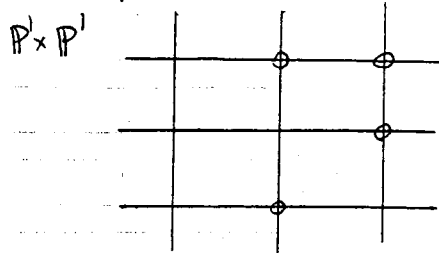
Type( $UP_{3-1}$ )



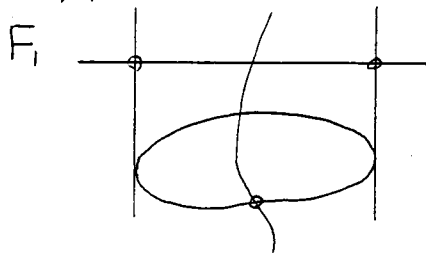
Type( $UC_{2-1}$ )



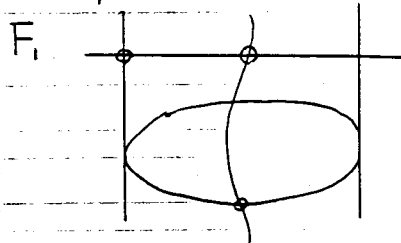
Type( $UC_{2-1}'$ )



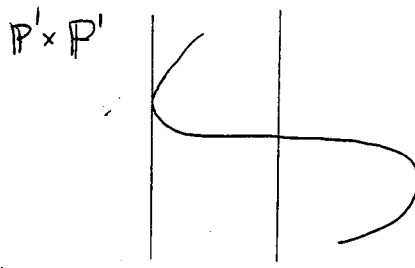
Type( $TP_2$ )



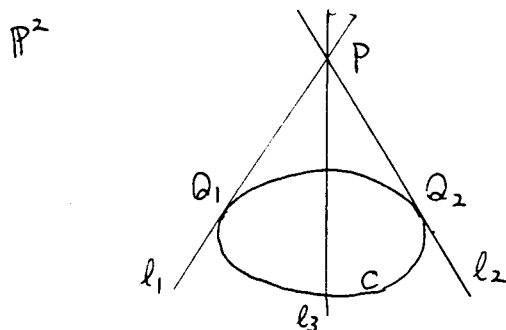
Type( $TC_{2-1}$ )



Type( $T3C_2$ )



ここでは Type( $TP_2$ ) を説明する。まず、 $P^2$  上の次の様な  
曲線の配置から出発する。



$(X_0, X_1, X_2)$  を  $\mathbb{P}^2$  の斉次座標とするとき、 $l_1, l_2, l_3, C$  は次式で定義される直線及び曲線である。

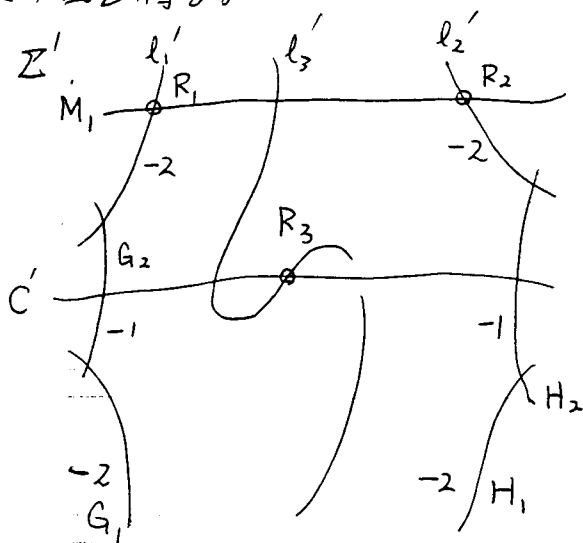
$$l_1: X_1 + X_0 = 0$$

$$l_2: X_1 - X_0 = 0$$

$$l_3: X_1 = 0$$

$$C: X_1^2 + X_2^2 = X_0^2$$

$\mathbb{P}^2$  の  $P$  を中心とする *blowing-up* によって最初の図を得るが、さらに  $C \cup l_1 \cup l_2 \cup l_3$  の *total transform* が単純正規交叉になる様に、 $Q_1, Q_2$  をそれぞれ 2 回ずつ *blowing-up* して次の図を得る。



$M_1$  は  $P$  の *blowing-up* によって得られる  $(-1)$  curve.

続いて単連結な boundary divisor を得るために.  $R_1, R_2, R_3$  及びその infinitely near points を中心として blowing-up を繰り返し, その合成を  $\sigma: V \rightarrow \Sigma'$  とする. 但し blowing-up は  $\sigma^{-1}(R_i)$  がそれぞれ  $(-1)$  curve を一個ずつ含み, その  $(-1)$  curve を  $E_i (1 \leq i \leq 3)$  とした時,  $D = \sigma^{-1}(M_1 + C' + l_1' + l_2' + l_3' + G_1 + G_2 + H_1 + H_2)_{\text{red}} - (E_1 + E_2 + E_3)$  が単連結になる様に選ぶ.  $X := V - D$  とおくと補題 1 により  $X$  は  $\mathbb{Q}$ -ホモロジイ - 平面になる. また,

$$\sigma^*(l_i') \sim u_i E_i + (\text{other components})$$

$$\sigma^*(M_1) \sim v_1 E_1 + v_2 E_2 + (\text{other components})$$

$$\sigma^*(C') \sim w_3 E_3 + \dots$$

とおくと,  $l_1' + G_1 + 2G_2 \sim l_2' + H_1 + 2H_2 \sim l_3'$  かつ  $2M_1 + 2l_3' \sim C' + \dots$  より,  $H_1(X, \mathbb{Z})$  は 次の関係式をみたす  $\xi_i := [E_i]$  で生成される.

$$u_1 \xi_1 - u_2 \xi_2 = 0$$

$$u_2 \xi_2 - u_3 \xi_3 = 0$$

$$2v_1 \xi_1 + 2v_2 \xi_2 + (2u_3 - w_3) \xi_3 = 0$$

従って,  $H_1(X, \mathbb{Z})$  の位数は,  $|d|$  に等しい. 但し

$$d = u_1 u_2 (2u_3 - w_3) + 2u_2 u_3 v_1 + 2u_1 u_3 v_2$$

特に  $d = \pm 1$  は, 例えば次の様な整数解を持つ.

$$u_1 = u_2 = 1, \quad u_3 = m, \quad v_1 = v_2 = n, \quad w_3 = 2m + 4mn \pm 1 \quad (m, n \geq 1)$$

また、上の整数値に對して  $K(X)=2$  を示すこともできる。こゝで、 $K=2$  の  $\mathbb{C}^{2n}$ -ファイバー空間の構造を持つホモロジー平面の系列を得た。しかも、このホモロジー平面は可縮である。

$\mathbb{P}^2$  の involution  $\tilde{\iota}: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  を  $(X_0: X_1: X_2) \mapsto (X_0: -X_1: X_2)$  で定義すると  $\tilde{\iota}$  は  $V$  の involution  $\tilde{\iota}: V \rightarrow V$  を与え、 $\tilde{\iota}(D) = D$  をみたす。よつて  $\tilde{\iota}|_X$  は  $X$  の自明でない involution になり Homology plane conjecture の反例を与える。

残りのケースのうち、 $(UP_{3-1})$ ,  $(UC_{2-1})$  のタイプには、 $K=2$  のホモロジー平面が存在するか。残りのタイプには  $\mathbb{Q}$ -ホモロジー平面しか存在しない。

#### § 4. Some remarks

(I).  $K=1$  のホモロジー平面で 自明でない自己同型を持つものが存在する。次の定理が成り立つ。

定理. 任意の素数  $p \neq 2$  に對して、 $K=1$  のホモロジー平面  $X_m^{(p)}$  で  $\mathbb{Z}/m$  が作用するものが存在する。但しここで

$$m = \begin{cases} 2, 2r+1, \text{ or } 4r+1 & \text{if } p=4r+1 \text{ である,} \\ 2, 2r+1, \text{ or } 4r+3 & \text{if } p=4r+3 \end{cases}$$

(II) 代数群の  $\mathbb{C}^N$  への作用の *linearization problem* は一般の *reductive* な代数群に対しても考えることができるか。Schwartz は  $O_2 = \mathbb{C}^* \ltimes \mathbb{Z}/2$  の  $\mathbb{C}^4$  への作用及び  $SL_2$  の  $\mathbb{C}^3$  への作用で *linearizable* でない例を与えた。梶田氏らによって、この例から有限群の作用で *linearizable* でない例も構成されている。一方アーベル群  $\mathbb{C}^*$  や  $\mathbb{Z}/m$  の  $\mathbb{C}^N$  への作用については、 $N \geq 3$  の時未解決である。 $\mathbb{C}^*$  や  $\mathbb{Z}/2$  の作用が *linearizable* であることがわかれば、次の消去問題への応用がある。

*Cancellation Problem*  $X$  を  $n$  次元アフィン代数多様体で  $X \times \mathbb{C}^m \cong \mathbb{C}^{n+m}$  の時  $X = \mathbb{C}^n$  か?

与  $X \times \mathbb{C}^m$  への  $\mathbb{Z}/2$  の作用を  $\tilde{\tau} = id \times \tau$ ,  $\tau: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$  は  $\tau(x_1, \dots, x_m) = (-x_1, \dots, -x_m)$  で定義すると、 $X$  は  $\tilde{\tau}$  の *fixed point locus* になる。従って、もし  $\tilde{\tau}$  の  $\mathbb{C}^{n+m}$  への作用が *linearizable* であれば  $X = \mathbb{C}^n$ 。

$n=2$  の時 *Cancellation Problem* は肯定的に解かれている。 $\mathbb{C}^*$  の  $\mathbb{C}^3$  への作用は *fixed point locus* の次元が一次元以上の時、*linearizable* であることが証明されているが、実はその証明には、 $n=2$  の時 *Cancellation*

Problemの解決に本質的であった  $\mathbb{C}^2$  の特徴づけを使っている。

#### References

1. T. Fujita, On the topology of non-complete algebraic surfaces, J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, 29(1982), 503-566.
2. M. Miyanishi and T. Sugie, Homology planes with quotient singularities, preprint.
3. M. Miyanishi and T. Sugie,  $\mathbb{Q}$ -homology planes with  $\mathbb{C}^{**}$  fibrations, preprint.
4. G. Shwartz, Exiotic algebraic group actions, preprint.