代数幾何学シンポジウム記録
1989年度 pp.1-17

Mordell-Weil Lattices と その応用

立教大理学部 塩田徹治

序. Mordell-Weil lattice なる概念は，当初考えていたよりはるかに深さとひろがりをもつもののようで，未だにその全貌を把握したとはいえない状況である。勿論，基礎理論は出来ている（[1], I）し，また，これを最初に適用した有理楕円曲面の場合にはかなりのことが分っている（[1], II, [7]）。この場合の M.W. lattices は，root lattice E_8 を頂点とする hierarchy をなし，それらの間には，family, specialization, degeneration, … といった代数幾何における常とう的手段が，自然に反映される構造となっている。しかし，基礎の体を任意の体（たとえば有理数体 $\mathbb{Q}$）としてよいので，その arithmetic まで論ずることにすると，有理楕円曲面の場合に限っても相当豊かな内容があり，$E_8, E_7, E_6, \ldots$ 等の各論も，十分面白い理論と応用がある。

たとえば，E_8 についていえば，

(i) "E_8 型" 代数方程式論（cf. [2]），後述

(ii) M.W. rank = 8 なる $\mathbb{Q}(t)$ 上の楕円曲線の構成，

その際，$E(\mathbb{Q}(t))$ の基底 $\{P_1, \cdots, P_8\}$ も explicit に与えることができる．(cf.[1], III. Th.7.2, [4], [5])

(iii) Weyl 群 $W(E_8)$ 全体を像にもつ Galois 表現 (M.W. lattice 上の) の存在と構成 ([1], Th.7.1)，とくに，

$Gal(K/\mathbb{Q}) = W(E_8)$ なる $K/\mathbb{Q}$ の構成 (準備中).

(iv) 特異点 (E_8-sing.) の変形理論への応用 ([6])，後述

(v) del Pezzo surface との関係．

等がある．そして，これらの $E_7, E_6, \cdots$ に対する variants も考えられる．

さて，有理楕円曲面をこえて，M.W. lattices を考えるときの，第1の問題点（主要な困難＋新しい興味）は，"超越的サイクル"あるいは"周期"の存在による。それを避けるための一つの方法は，標数 p の supersingular な楕円曲面を考えることである。実際，この観点から試みた最も簡単な例から生ずる M.W. lattices は，sphere packings の意味で，かなり面白いものを与える (cf.[3])．これについては，他の機会に述べたい．

去る1月の城崎におけるシンポジウムにおいては，話の順序として，M.W. lattices の定義と基本的な定理を述べ，次に，有理楕円曲面で，M.W. rank ≥ 6 なるものの構造決定をやった後，上記の(i)と(iv)について説明をした．

以下は、これらのうち、他の機会にすでに書いた部分([1]', [2])との重複はなるべく避けて、かつその後の考察も多少加えて概略を記すことにする。時間の制約であまり詳しく述べられない点お許し下さい。また、私にとっては新しく学んだ分野のことも多いので、お気付きの点は御注意頂ければ有難く思います。

1. 定義と若干の結果

k を任意の代数的閉体、$K = k(C)$ 1変数代数関数体、

E/K 楕円曲線、$E(K) = \{K\text{-有理点}\} \ni O$.
$\qquad = \{f \text{ の sections}\}$

$f : S \to C$ 附随する楕円曲面、0-section O をもつ。

(仮定) f は smooth でない ($\exists$ singular fibre).

このとき、$E(K)$ は有限生成 abel 群 (Mordell-Weil Th.) であるが、S 上の intersection theory により、自然に $E(K)$ 上の "height pairing", $\langle P, Q \rangle$ が定義され、これにより $E(K)/(\mathrm{tor})$ および $E(K)^0 = \{P \in E(K) \mid \mathrm{section}(P)$ と (O) は全ての fibre $f^{-1}(v)$ $(v \in C)$ において同じ既約成分で交わる$\}$ は、正定値な lattice となる。これらを、Mordell-Weil lattice、および narrow M.W. lattice とよぶ。

より具体的には、$\langle P, Q \rangle$ は次の形に与えられる:

$$\langle P, Q \rangle = \chi + (PO) + (QO) - (PQ) - \sum_{v \in R} \mathrm{Contr}_v(P, Q)$$

ここで、χ は、S の arithmetic genus (仮定の下に、$\chi > 0$)
(PO) は、section (P) と (O) の交点数、…、R は、$f^{-1}(v)$ が可約(2個以上の既約成分をもつ)となるような $v \in C$ の集合。
各 $v \in R$ に対し、$\mathrm{Contr}_v(P,Q) \in \mathbb{Q}$ は "local contribution" で、singular fibre $f^{-1}(v)$ のタイプと、section (P), (Q) が、そのどの成分と交わるかで定まる数である (cf. [1])。
とくに、P 又は $Q \in E(K)^0$ のときは、$\mathrm{Contr}_v(P,Q) = 0$.
従って、$E(K)^0$ は、つねに、

$$\begin{cases} \langle P,Q \rangle = \chi + (PO) + (QO) - (PQ) \in \mathbb{Z} \\ \langle P,P \rangle = 2\chi + 2(PO) \in 2\mathbb{Z} \end{cases}$$

により positive definite even integral lattice となる。

一方、M.W. rank r は、

$$r + 2 + \sum_{v \in R} (m_v - 1) = \rho = \text{Picard number of } S.$$

$(m_v = \# f^{-1}(v)$ の既約成分の個数。$)$

で定まる。

さて、一般的な定理は省略して、S が、有理的楕円曲面になる場合を考える。このときは

$$C = \mathbb{P}^1, \quad K = k(t), \quad \chi = 1, \quad \rho = 10$$

次の結果は、一連の結果の最初のものである。

<u>Th. 1</u> $f: S \longrightarrow \mathbb{P}^1$ が、可約な fibre をもたなければ、

$$r = 8 \quad \text{かつ、} \quad E(K) = E(K)^0 \cong E_8. \quad (\text{torsion free})$$

ここで、E_8 は、この記号で表わされる root lattice (cf. [B], [CS])
即ち、rank 8, pos. def. even unimodular な唯1つの lattice
(2次形式論, topology, … でもよく出てくる).

M.W. lattice の考え方が役に立つことを示す例として次の Manin の結果([M1])に、簡単な証明を与えよう。

<u>Prop.</u> $\mathbb{P}^2$ の3次曲線 Γ, Γ' の定める linear pencil が 9コの base points をもち、かつ、全ての member は既約であるとする。$\mathbb{P}^2$ から 9コの base points を blow up すると、rational elliptic surface $f: S \to \mathbb{P}^1$ ができ、

$$\begin{array}{ccccc} E & & S & \xrightarrow{\text{blow up}} & \mathbb{P}^2 \\ / & f & \downarrow & & \\ K & & \mathbb{P}^1 & & \end{array}$$

9コの section $P_0, P_1, \dots, P_8$ をもつ。$P_0 = O$ ととる。

このとき、$P_1, \dots, P_8$ は $E(K)$ において独立で、index 3 の部分群を生成する。さらに、$Q = \frac{1}{3}(P_1 + \dots + P_8)$ は $E(K)$ に属し、$E(K)$ は $P_1, \dots, P_7, Q$ で生成される。

<u>証明</u> Th 1. により $E(K) \simeq E_8$. かつ blow up の excep. curve (P_i) は互いに交わらないから、$i \neq j$ のとき

$$\langle P_i, P_j \rangle = \chi + (P_i P_0) + (P_j P_0) - (P_i P_j) = 1$$

$$\langle P_i, P_i \rangle = 2\chi + 2(P_i P_0) = 2 \quad (i \geq 1)$$

$$\therefore \left(\langle P_i, P_j \rangle \right)_{1 \leq i,j \leq 8} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 \cdots & 1 \\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & \cdots 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ 8 \\ \downarrow \end{array}$$

$$\therefore \det = 9 = 3^2$$

よって、$\{P_1, \cdots, P_8\}$ は、$E(K)$ の index 3 の部分群となる。

今 $Q \in E(K)$ が、この $\{P_i\}$ に属さないとする。$3Q \in \{P_i\}$

故に $3Q = n_1 P_1 + \cdots + n_8 P_8$, $n_i \in \mathbb{Z}$

とかけるが、Q に、P_i を加減して、$-1 \le n_i \le 1$ $^{(*)}$ と仮定してよい。

また、$\langle Q, P_i \rangle \in \mathbb{Z}$ ($E(K) = E(K)^0$ は integral lattice) 故

$$
\begin{aligned}
3\mathbb{Z} \ni 3\langle Q, P_i \rangle &= \langle 3Q, P_i \rangle = \langle \sum_j n_j P_j, P_i \rangle \\
&= 2n_i + \sum_{j \ne i} n_j \\
&= n_i + N, \quad N = \sum_{j=1}^{8} n_j
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad n_i \equiv -N \pmod 3, \quad \forall i$$

(*) より $n_1 = \cdots = n_8$、かつ $= 0$ or ± 1、$=0$ なら $3Q = 0$

で、$E(K)$ は torsion free 故 $Q = 0$ となって矛盾。よって

$3Q = \pm (P_1 + \cdots + P_8)$.　　　　q.e.d.

Th 1. について。($R = \{v \mid f^{-1}(v)$: 可約$\}$)

<u>Th 2</u>. (i) $\# R = 1$, $m_v = 2$ $\iff$ $r = 7$ $\iff$ $E(K) \simeq E_7^*$, $E(K)^0 \simeq E_7$ (with $E(K) \supset E(K)^0$, $E_7^* \supset E_7$)] 2

[I_2 又は III]

(ii) $\# R = 2$, $m_v = m_{v'} = 2$ $\Rightarrow$ $r = 6$, $E(K) \simeq D_6^*$, $E(K)^0 \simeq D_6$] 4

(iii) $\# R = 1$, $m_v = 3$ $\Rightarrow$ $r = 6$. $E(K) \simeq E_6^*$, $E(K)^0 \simeq E_6$] 3

($r=6 \Rightarrow$ (ii) or (iii)) [I_3 又は IV]

(cf. [1], 別にトとrについては [7] 参照。)

2. "E型"代数方程式論 (cf.[2])

$r=8,7,6$ に対して, E_r 型の基本方程式 (cf.[2]) Φ_{E_r} が定義されて, 次の対比

一般 n 次方程式	:	E_r 型の基本方程式
$=$ A_{n-1}	:	E_r

が成立つ. これを[2]よりも明確に述べてみる.

一般 n 次方程式とは, 周知のように, n 次方程式

(1) $f(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n = 0$

で, 係数 $a_1, \cdots, a_n$ が基礎体 k, たとえば $k=\mathbb{Q}$ 上代数的独立なるものをいう. 根を $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ とすると,

(2) $\pm a_i = \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ の i 次基本対称式

(根と係数の関係). 今 $X \to X + a_1/n$ ととりかえて,

$$a_1 = 0, \quad a_2, \cdots, a_n \text{ は代数的独立}$$

とするとき, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 0$, α_i のうち $(n-1)$ 個は代数的独立. かつ, 次の3つの著しい事実が成立つ。 $k_0 = \mathbb{Q}(a_2, \cdots, a_n)$ とおく.

① $K := f(X)$ の分解体 $/k_0$
$= k_0(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \mathbb{Q}(\alpha_2, \cdots, \alpha_n)$
は $\mathbb{Q}$ 上の純粋超越拡大

② K/k_0 は Galois 拡大, $Gal(K/k_0) = \mathfrak{S}_n = W(A_{n-1})$

③ $\mathbb{Q}[\alpha_2, \cdots, \alpha_n]^{W(A_{n-1})} = \mathbb{Q}[a_2, \cdots, a_n]$ (対称式の基本定理)

($W(A_{n-1})$ は, A_{n-1} 型の Weyl 群.)

はじめに述べた対比は、これと全く平行なことが、E_8, …で成立するような方程式

(3) $\Phi_{E_r}(X) = X^N + I_1 \cdot X^{N-1} + \cdots + I_N = 0$

が定義できることをいっている。

定義は後で述べるとして、

$$N = \deg_X \Phi_{E_r}(X) = \begin{cases} 27 & r=6 \\ 56 & r=7 \\ 240 & r=8 \end{cases}$$

$k_0 = \mathbb{Q}(\overbrace{p_i, q_j}^{\exists r \text{コ}})$. $\mathbb{Q}$ 上の r 次元純粋超越拡大

$u_1, \cdots, u_N$: $\Phi_{E_r}(X)$ の根

とすると

<u>th</u> (E_r) $\Phi_{E_r}(X) \in k_0[X]$, かつ記号で

$$\begin{cases} \text{① } K (= \Phi_{E_r} \text{の分解体}/k_0) \\ \quad = k_0(u_1, \cdots, u_N) = \mathbb{Q}(\overbrace{u_1, \cdots, u_r}^{\exists r \text{コ}}) \\ \quad \text{とくに } K/\mathbb{Q} \text{ 純粋超越拡大} \\ \text{② } K/k_0 \text{ は Galois 拡大, かつ } \mathrm{Gal}(K/k_0) = W(E_r). \\ \text{③ } \mathbb{Q}[u_1, \cdots, u_r]^{W(E_r)} = \mathbb{Q}[p_i, q_j]. \end{cases}$$

とくに "根と係数の関係(2)の類似が成立つ:

(4) p_i, or q_j = $W(E_r)$-不変な $u_1, \cdots, u_r$ の多項式.

Φ の定義は次の通り. M.W. lattice を用いてなされる.

まず次の楕円曲線 $E/k_0(t)$ を考える.

$$(E_6)\quad \underline{y^2} = \underline{x^3} + x(p_0+p_1t+p_2t^2)+(q_0+q_1t+q_2t^2+\underline{t^4}),$$

$$(E_7)\quad \underline{y^2} = \underline{x^3} + x(p_0+p_1t+\underline{t^3})+(q_0+q_1t+q_2t^2+q_3t^3+q_4t^4),$$

$$(E_8)\quad \underline{y^2} = \underline{x^3} + x(p_0+p_1t+p_2t^2+p_3t^3) + (q_0+q_1t+q_2t^2+q_3t^3+\underline{t^5}).$$

$k_0 = \mathbb{Q}(p_i, q_j)$, p_i, q_j (のすべて) は $\mathbb{Q}$ 上独立.

$k = \overline{k_0}$ (k_0 の代数的閉包).

$K = k(t)$

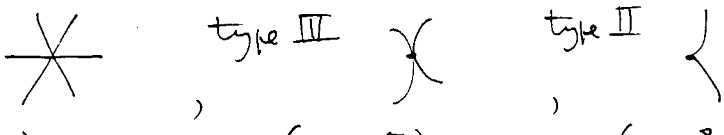
とすると, E/K の Mordell-Weil lattice は, 夫々

$E(K) \cong E_6^*,\ E_7^*$ 又は E_8 ($r=6,7,8$ に応じて)

となる. (証明: 定理. 対応する楕円曲面

$f: S \longrightarrow \mathbb{P}^1$

は, $t=\infty$ 以外には可約な fibre をもたず $f^{-1}(\infty)$ は

type IV  , type III , type II

($r=6$) ($r=7$) ($r=8$)

で与えられる. この次に Th1,2 を適用せよ. qed)

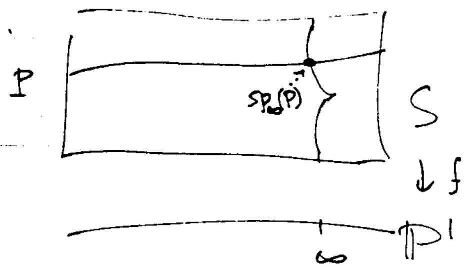
従って, $E(K)$ の minimal vectors の個数は, $r=6$ のとき 54, $r=7$ のとき 56, $r=8$ のとき 240 個である (cf [CS])

また, 上の $f^{-1}(\infty)$ から特異点を除いた $f^{-1}(\infty)^\#$ は, 自然に alg. group になり, その構造は (k上) $r=6,7,8$ に応じて,

$f^{-1}(\infty)^\# = \mathbb{G}_a \times \mathbb{Z}/3,\ \mathbb{G}_a\times\mathbb{Z}/2,\ \mathbb{G}_a$ となる.

今. $sp'_\infty : E(K) \longrightarrow \mathbb{G}_a(k)$ を specialization map とする.

即ち.



$P \in E(K)$ の定める Section (P) と $f^{-1}(\infty)$ との交点を

$$sp_\infty(P) \in f^{-1}(\infty)^{\#}$$

とし　　↓ projection

$$sp'_\infty(P) \in \mathbb{G}_a$$

とする.

<u>Def.</u>

$$\Phi_{E_r}(X) = \prod_{\substack{P:\ E(K)\simeq E_r^* \\ \text{の min. vectors}}} \left(X - sp'_\infty(P)\right) \in k_0[X]$$

ただし, $r=6$ のとき, 54次の Φ_{E_6} は, $\Phi(X)\cdot\Phi(-X)$, $\deg \Phi = 27$, とかかれるので, Φ_{E_6} を Φ にとりかえる。

以上で, 定義はできたが, これの一つ $\underline{\mathrm{Th}}(E_r)$ の証明は, M.W. lattice $E(K)$ の min. vectors P の具体的表示を用い, 消去法によって, Φ の別の表現を与えることでなされる. その過程で (4) の具体的公式も得られる.

min. vectors P は,

$$P = (x, y), \quad \begin{cases} x = g t^2 + a t + b & (t\text{の2次式}) \\ y = h t^3 + c t^2 + d t + e & (\ 3\text{次式}) \end{cases}$$

で与えられることが分る. ここで, $r=6$ 又は 7 のときは, $g=h=0$ であり, $r=8$ のときは, $g\cdot h \neq 0$, かつ, 後者では $sp_\infty(P) = g/h$ である.

上の証明の詳細は略し、応用についてのべる。

まず、arithmetic への応用が2つある。一般n次方程式に戻って考えると、次のことは、よく知られている

(イ). 係数 $a_2, \cdots, a_n$ を特殊化して、有理数値をとるとき、これを"一般"にとると、$f(X)$ は、既約で、その分解体 $\mathfrak{K}_0/\mathbb{Q}$ は、Galois 拡大で $Gal(\mathfrak{K}_0/\mathbb{Q}) = \mathfrak{S}_n = W(A_{n-1})$.

一方、次のことは、さらに自明である：

(ロ). 根 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ を特殊化して、$\forall$有理数値をとるとき、それを根にもつ方程式 $f(X)$ を、(根と係数の関係により) 書き下すことができる。

E型方程式の類似の結果は、

Th. ((ロ)の類似). $\mathbb{Q}(t)$ 上の楕円曲線で、$r = 8$ ($\sim 7, 6$) となるものを、その基底とともに構成することができる。

(cf. [1], Th. 7.2, [4], [5])

Th ((イ)の類似) $p_i, q_j \in \mathbb{Q}$ を、一般にとると、

$\Phi_{E_r}(X) \in \mathbb{Q}[X]$ は、既約で、その分解体 $\mathfrak{K}_0/\mathbb{Q}$ は

$Gal(\mathfrak{K}_0/\mathbb{Q}) = W(E_r)$.

(cf. [1] Th. 7.1.) 具体例も、近く与えられるであろう。

3. 特異点の変形理論への応用

前節の方程式 (E_8), etc. は、その型の有理2重点の

semi-universal deformation として知られているものである。(以下 [DBT], [Sl], [O], ...を参照)

我々は、定理(E_r)を、初等的、代数的に証明することが出来るので、特異点の理論でよく知られた結果(Brieskorn, Tjurina, ...等多くの数学者の寄与がある)に簡単な証明を与えることが可能である。さらに、パラメタ空間の、特異点のタイプによる stratification を、具体的に記述することができる。(又、正標数の sing. も論じうる。)

以下、E_8 の場合に限る。まず方程式(E_8)によって定義される $\mathbb{C}^3$ の affine surface を X_λ ($\lambda = (p_0, p_1, \cdots, q_3) \in \mathbb{C}^8$)、$\mathbb{C}(t)$上の elliptic curve を E_λ、対応する elliptic surface (smooth projective) を S_λ、ell. fibration を $f: S_\lambda \to \mathbb{P}^1$ とかく。

$$D = \{\lambda \in \mathbb{C}^8 \mid X_\lambda \text{ not smooth.}\} \quad (\text{discriminant})$$

とおく。

<u>Lemma</u>. 次の同値が成立つ。

(i) $\lambda \notin D \iff X_\lambda$ smooth $\iff f$ は可約 fibre なし。$\iff$ M.W. lattice $= E_8$

そこで、$\lambda \in D$ とするとき、

(ii) X_λ が A_1-sing. をもつ $\iff$ M.W. lattice $= E_7^*$

(iii) X_λ が $2A_1$-sing. をもつ $\iff$ 〃 $= D_6^*$

(iv) X_λ が A_2-sing. をもつ $\iff$ 〃 $= E_6^*$

(v) X_λ が $3A_1$-sing. をもつ $\iff$ 〃 $= D_4^* \oplus A_1^*$

一方, E_8型の基本方程式を (X^2の多項式なる)

$$\Phi_{E_8}(X) = X^{240} + I_2 \cdot X^{238} + \cdots + I_{238} \cdot X^2 + I_{240}.$$

$$I_2, \cdots, I_{240} \in \mathbb{Q}[u_1, \cdots, u_8]^{W(E_8)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Th. ③}}}{=} \mathbb{Q}[p_0, \cdots, q_3]$$

とかく. まず

$$D = \{ I_{240} = 0 \}.$$

とおく. $\underline{\text{Th}}(E_8)$ ③ より ($\otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ で十分).

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[u_1, \cdots, u_8] & & \mathbb{C}^8 \\ \cup & \Rightarrow & \pi \downarrow \text{quotient map} \\ \mathbb{C}[u_1, \cdots, u_8]^{W(E_8)} = \mathbb{C}[p_0, \cdots, q_3] & & \mathbb{C}^8 / W(E_8) \cong \mathbb{C}^8 \supset D \end{array}$$

において, π は $\mathbb{C}^8 - D$ の不分岐 Galois 被覆で

Galois 群 $= W(E_8)$ なるものと定める. とくに

$\underline{\text{Prop}}$. $\pi_1(\mathbb{C}^8 - D) \twoheadrightarrow W(E_8)$ 全射.

さらに, $D \subset \mathbb{C}^8$ の stratification (のはじめの部分) は

次のように与えられる

$\underline{\underline{\text{Th}}}$. (i) X_λ smooth $\iff I_{240}(\lambda) \neq 0$

(ii) X_λ : A_1-sing $\iff I_{240}(\lambda) = 0,\ I_{238}(\lambda) \neq 0$

(iii) X_λ : $2A_1$-sing $\iff I_{240} = I_{238} = 0,\ I_{236} \neq 0$

(iv) X_λ : A_2-sing.

(v) or $3A_1$-sing

$\left.\begin{array}{l} \text{(iv)} \\ \text{(v)} \end{array}\right\} \iff I_{240} = I_{238} = I_{236} = 0,\ I_{234} \neq 0.$

$\cdots$

さらに,

$\Phi_{E_8}(X) = \Phi(X, \lambda)$ とかくとき. 上の場合に従って. Φ は. 次のように分解する: (X を u とかく).

(ii) $\Phi(u,\lambda) = u^2\, F_{56}(u)^2\, F_{126}(u)$

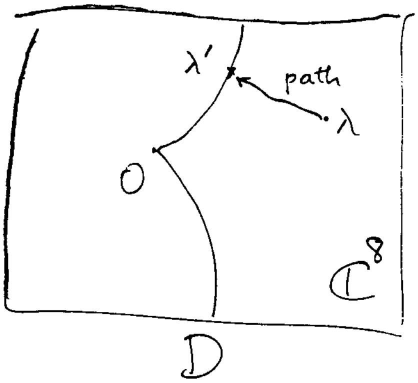
(iii) $\quad u^4\, F_{12}(u)^4\, F_{64}(u)^2\, F_{60}(u)$

(iv) $\quad u^6\, F_{54}(u)^3\, F_{72}(u)$

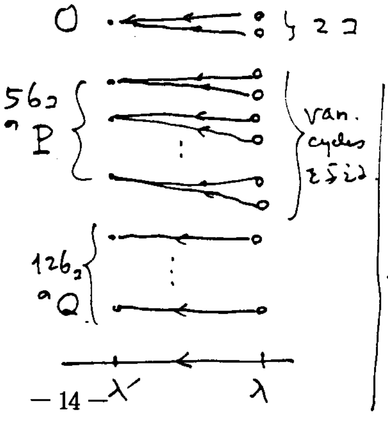
(v) $\quad u^6\, F_2(u)^8\, F_{24}(u)^4\, F_{48}(u)^2\, F_{26}(u)$

ここで. F_n は n次多項式, 夫々 even な多項式 $F(-u)=F(u)$.
より詳しく. $F_{54}(u) = F_{27}(u) \cdot F_{27}(-u)$., etc. が成立つ.
(iv) と (v) の generic な λ は. Φ の分解の仕方の相違で区別されるであろう.

以上の証明の idea は. $NS(S_\lambda)$ 内の "E_8-frame" における「240コの roots の行方を追う」ことである.
ちなみに. 上の Φ の分解は. "root" ⟷ "Milnor lattice における vanishing cycles" の挙動を. 反映している.
たとえば 下の図で. λ' が A_1-sing. に対応しているとき.



(ii) でいう $\Phi(u,\lambda')$ の分解は.



・P は $E_{\lambda_0}(\mathbb{C}(t))$ の min. vectors. ($\langle P, P\rangle = \frac{3}{2}$)

・Q は $E_{\lambda_0}(\mathbb{C}(t))^0$ の min. vectors ($\langle Q, Q\rangle = 2$)

となる様子を表わしている。(iii), (iv), … についても、同様の解釈ができるが、これらが、singularity の理論で既に知られていたか否か、私は知らない。

最後に、M.W. lattice が E_8, E_7^*, E_6^* になる場合の ell. surface は、unique な仕方で、degree = 1, 2 又は 3 なる del Pezzo surface ([M2] cf.) に blow down され、min. vectors は、そこでの第1種例外曲線 (その数は 240コ, 56コ, 27コ) にうつされる。とくに、我々の (E_6) 型の基本方程式は、3次曲面の 27本の lines の定める方程式となり、また (E_7) 型のそれは、4次曲線の 28本の double tangent の方程式と対応する ($56 = 28 \times 2$)。これより、たとえば、$\mathbb{Q}$ 上の3次曲面で、その上の27本の lines が全て $\mathbb{Q}$ 上定義されるものや、$\mathbb{Q}$ 上の4次曲線で 28本の double tangent が全て $\mathbb{Q}$ 上定義されるものを、構成できることを付記しておく。

(1990. 2. 10 記)

参考文献. ([1] or [1]′ の文献表も参照).

[B]. Bourbaki, N.: Groupes et Algèbres de Lie. Ch. 4, 5, 6.

[CS] Conway-Sloane: Sphere Packings, Lattices and Groups, Springer (1988)

[DPT]. Demazure, Pinkham, Teissier : Sém. sur les Singularités des Surfaces. SLN. 777 (1980)

[M1] Manin, The Tate height of points on an abelian var. ...., Izv. Akad. Nauk. SSSR, 28(1964); AMS. Tr.(2) 59. (1966)

[M2] " : Cubic Forms. North-Holland (1986)

[Sl] Slodowy, : Simple singularities and simple alg. gr. SLN. 815 (1980)

[O] Oda, T. : Introduction to Algebraic singularities. (to appear)

Shioda. T :

[1] Mordell-Weil lattices and Galois representation I, II, III Proc. Japan Acad. 65A (1989).

[1]′ 同題 (+ E_6の実例). 代数学シンポジウム報告集 (東北大, 1989年8月).

[2] M.W. lattices と、意義のある代数方程式の新しい系列. 代数的整数論シンポジウム, (京都 1989年12月)

[3] M.W. lattices and sphere packings. preprint.

[4] Construction of elliptic curves over $\mathbb{Q}(t)$ with high rank : a preview, Proc. Japan Acad. (to appear)

[5] Construction of elliptic curves with high rank via the invariants of the Weyl groups. (in preparation)

[6] M.W. lattices ~~of~~ type E_8 and deformation of singularities (in preparation.)

[7] (with K. Oguiso). The Mordell-Weil lattice of a rational elliptic surface (in prep.)