代数幾何学シンポジウム記録
1990年度　pp.162-174

平面曲線の非存在定理について

埼玉大学理学部　酒井文雄

次数dの平面曲線はどのような特異点を許容するかという古典的な問題を考えてみたい．この問題の答としては存在定理と非存在定理が考えられる．可能な特異点の分類表が完成すれば理想的であるが，dが大きい場合にはそれは事実上不可能である．5次曲線の特異点の分類については難波氏の著作［N］を，6次曲線の特異点の分類については卜部氏の論文［U］を参照されたい．本稿では平面曲線の総ミルナー数に焦点を合わせて非存在定理について考察する．詳細については，［S］および［MS］を参照していただきたい．

Cをd次の複素平面曲線とする．Cの特異点pについてm_pで重複度をr_pで局所分枝の個数を表わすことにする．特異点pは$r_p=1$の時に尖点と呼ばれる．特に局所的に $x^2-y^3=0$で定義される尖点は通常尖点と呼ばれる．

定義　曲線Cのpにおける局所定義方程式をf(x,y)とすると，Cのpにおけるミルナー数は次式で与えられる．

$$\mu_p = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x,y\}/(f_x,f_y)$$

Cのすべての特異点のミルナー数の総和を $\mu(C)$で表わしCの総ミルナー数と呼ぶ．次の種数公式がある．

$$\mu(C) = d(d - 3) + e(C)$$

ここでe(C)はCの位相的オイラー数．したがって，Cの既約成分の個数をrとすれば不等式 $\mu(C) \leq (d-1)(d-2)+r-1$ が成り立つ．

存在定理について触れておく．平面曲線を構成する方法として次のようなものが知られている．1）曲線を定義するd次の3変数斉次多項式を書き下す．2）双対曲線の利用．3）高い次元の射影空間からの射影．4）射影平面のBLOW－UP＆BLOW－DOWN．5）変形理論の援用．6）その他．最近tom Dieckは4）の方法で3個の尖点を持つ有理尖点曲線の系列を構成した．5）に関して次の結果を引用しておく．

定理（Shustin［Sh］） d次平面曲線Cが与えられ，$\mu(C) \leq 4d-5$ が成り立っているとする．このとき，Cの各特異点の局所的な変形を実現するd次曲線が存在する．

1． 非存在定理

平面曲線の非存在を証明するには大別すると以下の3通りの手段がある．a）Plücker関係式 b）宮岡型不等式 c）被覆曲面の不変量．この章では b）の宮岡型不等式から得られる存在条件を

2通り述べる．まず対数的宮岡不等式を引用しておく．

定理（LOG－宮岡不等式）　Sは非特異射影曲面，DはS上の正規交差因子であるとする．ある自然数nについて，$|n(K+D)| \neq \phi$ ならば，次の不等式が成立する．ここでKはSの標準因子である．

$$(K + D)^2 \leq 3e(S-D).$$

与えられたd次平面曲線Cの特異点解消をSとし，Cの全逆像をDとして上の結果を適用する．Cの特異点pについて，$m_1, \ldots, m_n$ でpの無限近傍点の重複度列を，E_p でp上の例外曲線の和を表わす．そこで次の不変量を定義する．

$$\eta_p = \Sigma(m_i - 1)$$
$$\omega_p = -E_p^2$$
$$I_p = \omega_p + r_p - 3 + \eta_p - \mu_p/m_p.$$

注意　このとき $I_p \geq 0$ が成立する．またCの補集合の対数的小平次元を $\bar{\kappa}$ とすると，定義から $\bar{\kappa} = -\infty \iff$ すべての自然数nについて，$|n(K+D)| = \phi$．

定理Ａ　d次平面曲線CについてCの補集合の対数的小平次元が非負ならば次の不等式が成立する．

$$\sum_{p \in \mathrm{Sing}(C)} \left\{ (2 + \frac{1}{m_p})\mu_p + I_p \right\} \leq 2d^2 - 3d.$$

系　νでCの特異点の重複度の最大値を表わすことにすると，定理と同じ仮定の元で $\mu(C)$に関する次の評価を得る．

$$\mu(C) < \frac{\nu}{2\nu + 1}(2d^2 - 3d).$$

特にCが既約で特異点を持つ場合にはこの評価は無条件で成り立つ．

Orbifold版の宮岡不等式がある．[KNS] 参照．これを用いて単純な特異点のみを許容する平面曲線の総ミルナー数の上限が与えられる．

定義　ここでは次のような特異点を単純特異点と言うことにする．

LTS　（ADE特異点）

$$x^2 + y^{n+1} = 0,\ y(x^2 + y^n) = 0,\ x^3 + y^4 = 0,$$
$$x(x^2 + y^3) = 0,\ x^3 + y^5 = 0.$$

この場合には $z^2 = f(x, y)$で定義される曲面の特異点は商特異点で $\mathbb{C}^2 / G(p)$の形をしている．

LCS

$$x^4 + y^4 = 0,\ x(x^2 + y^4) = 0 \text{ 等}$$

$z^2 = f(x, y)$で定義される特異点が単純楕円型又はカスプ型特異点になるもの．

定理B（小林亮一－酒井）　Cが単純特異点のみを持つd次平面曲線のときには次の不等式が成立する．ただし $d \geq 6$とする．

$$\mu(C) \le \frac{5}{6} d^2 - d + \sum_{p \in LTS} \frac{1}{|G(p)|} - \#(\mathrm{Sing}\ C)$$

注意　次数ｄが偶数の場合にはこの結果は既知である．［Ｉ］参照．

注意　最近宮岡不等式の帰結として通常特異点に有用な評価式が吉原氏によって得られた．［Ｙ３］参照．

２．　巡回被覆曲面

Ｃをｄ次平面曲線，ｋをｄの約数とする．このときＣで分岐する射影平面の被覆曲面Ｗを作ることができる．π：$\tilde{W} \to W$をＷの特異点除去とすると，$h^{1,1}(\tilde{W}) > \#\{\pi$に関する例外曲線$\}$という事実から不等式

$$\sum_{q \in \mathrm{Sing}(W)} (\mu_q - c_q) < 10\,\chi(O_W) - K_W^2 + 2q(\tilde{W})$$

を証明することができる．ここで各項は以下のような意味を持つ．

$q(\tilde{W}) = \dim H^1(\tilde{W}, O)$　　Ｗの不正則数

μ_q = ｑのミルナー数

$c_q = 2 \dim (R^1\pi_* O_{\tilde{W}})_q - \dim H^1(\pi^{-1}(q), \mathbb{R})$

Ｗの特異点はＣの特異点の上に唯一点載っている．Ｗの特異点ｑがＣの特異点ｐに対応しているとすると関係式

$$\mu_q = (k - 1)\mu_p$$

が成り立つ．したがってもし$q(W)=0$ということがあらかじめ分かれば上の不等式から$\mu(C)$の上限を得ることができる．

定理C　Cはd次平面曲線とし，k，Wは上のようにとる．もしWの不正則数が消滅していれば次の不等式が成立する．

$$\mu(C) < \frac{4k+1}{6k} d^2 - \frac{3}{2} d + \frac{k}{k-1} \sum_{q \in \mathrm{Sing}\, W} c_q .$$

さてWの不正則数はいつ消滅するのであろうか．

命題　以下の場合にWの不正則数は消滅する．

a)　$k=2$でCの特異点はＡＤＥ特異点のみの場合，

b)　kが素数の巾でCが既約の場合，

c)　Cのすべての特異点pについて局所アレクサンダー多項式

$\Delta_p(t)$の根は1を除いて1のk乗根ではない場合．

a)の場合にはWの特異点は有理2重点のみということから不正則数の消滅が従う．b)はZariskiの定理である．

注意　局所アレクサンダー多項式は(C,p)のミルナー・ファイバーに関するモノドロミーの特性多項式として定義される．［M］参照．

例えば，pが結節点の時，$\Delta_p(t)=t-1$，pが通常尖点の場合，

$\Delta_p(t)=t^2-t+1$である．

定義　$V=\{x, y, z \in \mathbb{C}^3 \mid F(x, y, z)=0\}$と置く．ここでFはCを定義する斉次多項式．このとき，$\lambda=\exp(2\pi i/d)$はVに作用する．λの$H^1(V, \mathbb{C})$への作用の特性多項式$\Delta_C(t)$をCの大域的アレキサンダー多項式と呼ぶ．

c）の証明には以下の事実を使う．1）$\Delta_C(t)$の根は1のk乗根，2）　Wの不正則数$=\frac{1}{2}\{\Delta_C(t)=0$の根で1でないものの個数$\}$，3）$\Delta_C(t)$の根はどれかの$\Delta_p(t)$の根．3）の事実はCが既約の場合には以前から知られていたが（［L］，［K］），一般の場合にも成立することが最近［LV］によって証明された．次の事実はCが既約の場合にはZariskiによって発見された．

系　Cがd次平面曲線で結節点および通常尖点のみを特異点とする場合，kが6の倍数でないならばWの不正則数は消滅する．

定理Cの系（［H］，［I］，［Y1］）　CをADE特異点のみを持つd次平面曲線とする．このとき

$$\mu(C) < \frac{3}{4}d^2 - \frac{3}{2}d + 2 \qquad d\text{偶数}$$

$$\mu(C) < \frac{3}{4}d^2 - \frac{3}{2}d + \frac{1}{4} \qquad d\text{奇数}$$

注意　この系の証明はdが偶数の場合にはCで分岐する2重被覆を考えればよいのであるが，dが奇数の場合には適当な直線Lを付け加えて$C\cup L$で分岐する2重被覆を考えるという吉原氏のアイデアが必要である．Cが3重尖点，2重尖点，結節点のみを持つ曲線の場合，Cが既約でdが3の倍数の時には3重被覆を使った評価式が［Y2］で得られている．証明には上記の命題のb）が使われた．上記の命題のc）を用いると，一般のdの場合にも適当な直線を加えた所で分岐する3重被覆を考えることによってCの総ミルナー数の評価を得ることが可能である．［S］参照．

定義　特異点pを解消した時に現われる例外曲線を$E_1,\dots,E_n$とする．$\pi^{-1}(p)$の近傍で，$\pi^*(C)=\tilde{C}+\Sigma e_s E_s$，$\tilde{K}=\pi^*(K)+\Sigma f_s E_s$となるとして，次の不変量を導入する．

$$\xi_p(k,i) = \frac{1}{2}\sum_{s,t} [e_s i/k](f_t-[e_t i/k])E_s E_t.$$

Wの不正則数の別の表現から次の評価式が得られる．

定理D　Cはd次平面曲線であるとし，k，Wは上と同様とする．Wの不正則数が消滅していれば，

$$\sum_{p\in \mathrm{Sing}\,C} \xi_p(k,i) \le 1 + ie(ie-3)/2$$

が$0<i<k$の範囲のiに対して成立する．ただし，$e=d/k$．

３． 応用

平面曲線の存在条件として，定理Ａ，定理Ｂ，定理Ｃ，定理Ｄと多少趣の異なるものが得られた．この章ではこれらの定理の有効性の比較をしたい．

まず通常尖点のみをもつ平面曲線Ｃを考えてみる．Ｃの通常尖点の個数をｓ(Ｃ)で表わすことにする．ｄ次曲線におけるｓ(Ｃ)の最大値をs(ｄ)としておく．Ｐｌüｃｋｅｒ関係式からは不等式

$$s(d) \leq d(d-1)/3$$

が従う．定理Ｂを適用すると次のより良い評価が得られる．

$$s(d) \leq \left[\frac{5}{16}d^2 - \frac{3}{8}d\right]$$

右辺Ｍ(ｄ)はｄが小さい時には次のような値をとる．

ｄ	６	７	８	９	１０	１１	１２	１３	１４
Ｍ(ｄ)	９	１２	１７	２１	２７	３３	４０	４７	５６

ｄが偶数の場合には上の評価は［Ｉ］で得られていることを注意しておく．ｄ＝７，８，１３，１４の時は定理Ｄを用いると評価は改善される．ｓ(７)≤１０，ｓ(８)≤１５，ｓ(１３)≤４５，ｓ(１４)≤５５．［Ｚ，ｐ．２２２］参照．この問題には定理Ａ，定理Ｃからはより良い評価は得られない．

次にA_n型の特異点１個のみを持つｄ次曲線Ｃを考えてみる．このとき定理Ｂによる評価は

$$n + \frac{n}{n+1} \leq \frac{5}{6}d^2 - d$$

であり，これは定理Cの系から得られる評価より悪い．

定理Aの利点はどのような特異点に対しても成り立つことである．尖点のみを許容する曲線（尖点曲線と呼ぶ）に定理Aを適用してみよう．この場合には，$\mu(C) = (d-1)(d-2)$である事に注意して不等式

$$d < 3\nu + 1 + \frac{4g+2}{3}$$

を示すことができる．ここでgはCの幾何種数とする．また ν は特異点の重複度の最大値であった．g＝0のときすなわち有理尖点曲線の場合上の不等式は$d \leq 3\nu + 1$になるが，これは次のように改善される（［MS］）．

定理　d次の有理尖点曲線に対しては$d < 3\nu$ が成立する．

この不等式は単尖点という条件の元で吉原，角田の両氏によって予想された．角田氏は$d \leq 3\nu + 2$を示し，吉原氏は $\nu = 2$のときと$\nu = 3$でdが3の倍数のときに予想を解決した．証明を簡単に振り返ってみよう．$d \geq 3\nu$と仮定して矛盾を導く．定理A（尖点曲線のときには等号を含まない不等式が成り立つ）によって可能な場合は

$$\Sigma I_p < 5 - \frac{2}{\nu} \qquad d = 3\nu \text{ の場合}$$

$$\Sigma I_p < 2 \qquad d = 3\nu + 1 \text{ の場合}$$

である．ところで$I_p < 5$を満たす特異点は分類することができる．そこでCが有理曲線であるという条件を使うと結局以下の場合に曲線の非存在を証明すればよいことが判明する．

(a)	$d = 6, 7$	$\nu = 2$
(b)	$d = 9$	$\nu = 3$
(c)	$d = 10$	(3,37)型尖点1個
(d)	$d = 12$	(4,37)型尖点1個と通常尖点1個
(e)	$d = 15$	(5,46)型尖点1個と通常尖点1個

場合（a）は定理Cの系によって，場合（b）は定理Cを3重被覆に用いることによって除外される．場合（d）と場合（e）は定理Cをそれぞれ4重被覆と5重被覆に適用して矛盾が導かれる．場合（c）は一度2重被覆をとってからlog－宮岡不等式を用いる事によって除外される．

予想　楕円尖点曲線に対しては$d \leq 3\nu$が成立する．

References

[H] Hirzebruch.F.:Singularities of algebraic surfaces and characteristic numbers. Contemp. Math. **58**, 141–155 (1984)

[I] Ivinskis,K.:Normale Flächen und die Miyaoka-Kobayashi Ungleichung. Diplomarbeit Bonn (1985)

[K] Kohno,T.:Differential forms and the fundamental group of the complement of hypersurfaces. Proc. Symp. Pure Math. **40**, 655–662 (1983)

[KNS] Kobayashi,R., Nakamura,S. and Sakai,F.:A numerical characterization of ball quotients for normal surfaces with branch loci. Proc. Japan Acad., **65**, Ser.A, 238–241 (1989)

[L] Libgober,A.:Alexander polynomial of plane algebraic curves and cyclic multiple planes. Duke Math. J. **49**, 833–851 (1982)

[LV] Loeser,F. and Vaquié,M.:Le polynôme d'Alexander d'une courbe plane projective. Topology **29**, 163–173 (1990)

[M] Milnor,J.:Singular points of complex hypersurfaces. Ann. Math. Studies **61** Princeton Univ. Press 1968.

[MS] Matsuoka,T. and Sakai,F.:The degree of rational cuspidal curves. Math. Ann. **285**, 233–247 (1989)

[N] Namba,M.:Geometry of projective algebraic curves. New York, Basel:Dekker 1984

[S] Sakai,F.:Singularities of plane curves. Preprint

[Sh] Shustin,E.:Versal deformations in the space of planar curves of fixed degree. Func. Anal. Appl. **21**, 90–91 (1987)

[U] Urabe,T.:Dynkin Graphs and combinations of singularities on plane sextic curves. Contemp. Math. **90**, 295–315 (1989)

[Y1] Yoshihara,H.:A note on the existence of some curves. In Algebraic Geometry and Commutative Algebra, pp. 801–804. Kinokuniya, Tokyo 1987

[Y2] Yoshihara,H.:Plane curves whose singular points are cusps and triple coverings of $\mathbf{P}^2$. Manuscripta Math. **64**, 169–187 (1989)

[Y3] Yoshihara,H.:Double coverings of $\mathbf{P}^2$. Proc. Japan Acad., **66**, Ser. A, 233-236 (1990)

[Z] Zariski,O.:Algebraic Surfaces (Second Supplemented Edition). Springer–Verlag 1971