代数幾何学シンポジウム記録
1990年度　pp.124-136

genus と KP 方程式

お茶大・理　桂　利行 (Toshiyuki Katsura)

§1. 序

本稿は，[KSU] の genus と KP 方程式に関する部分の紹介である。Boson Fock space と complex cobordism ring とには，類似した面が多々ある。例えば boson Fock space $\mathcal{H}_T(\mathbb{Q})$ には，Vertex operator, current operator が作用し complex cobordism ring $MU^*(pt)$ には Landweber-Novikov operator が作用しているが，この状況は大変よく似ている (cf. [KSU])。我々は，$MU^*(pt)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ と $\mathcal{H}_{T,0}(\mathbb{Q})$ ($\mathcal{H}_T(\mathbb{Q})$ の charge 0 の部分) との pairing を保つ同型をつくることによって genus と KP hierarchy が結びつくことを示す。ここで得られる KP hierarchy の解は trivial なものであり，一般の KP hierarchy の解に対応する "genus" を調べるのは今後の課題となる。

§2. Boson Fock space と complex cobordism ring

2.1. Boson Fock space と pairing

$\mathcal{H}_{T,0}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[t_1, t_2, t_3, \cdots]$ を boson Fock space の charge 0 part という。ただし，t_i $(i=1,2,3,\cdots)$ は変数で，$\deg t_i = i$ とする。以下，$t = (t_1, t_2, \cdots)$ とおく。$\mathcal{H}_{T,0}(\mathbb{Q})$ は次のような pairing を持つ。

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}[t_1, t_2, \cdots] \times \mathbb{Q}[t_1, t_2, \cdots] & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ \Psi & & \Psi \\ (f(t) \quad , \quad g(t)) & \longmapsto & f\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t_2}, \cdots, \frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial t_n}, \cdots\right) g(t)\Big|_{t=0} \end{array}$$

2.2. Complex cobordism ring

M を compact differentiable manifold，Θ_M をその tangent bundle とする。trivial bundle λ，complex vector bundle η および同型 $\rho : \eta \xrightarrow{\sim} \Theta_M \oplus \lambda$ が存在するとき，M を weakly almost complex manifold という。その total Chern class を $c(M) = c(\eta)$ と定義する。この概念は boundary 付きの manifold にも拡張され，weakly almost complex manifolds M, N に対し，M, N がこのような manifold の boundary になるとき，M, N は cobordant であるといい，$M \sim N$ とかく。weakly almost complex manifolds 全体の集合を cobordant で類別したものの集合を $MU^*(pt)$ とかく。これには，

Addition = disjoint sum , Multiplication = direct product

によって ring structure がはいる。Milnor によれば，compact almost complex manifold $\mathcal{Y}_i$ $(i=1,2,\cdots)$ があって，

$$MU^*(pt) = \mathbb{Z}[y_1, y_2, \cdots\cdots]$$

とかける。さらに，

$$MU^*(pt)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} = \mathbb{Q}[\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^2, \cdots\cdots]$$

となる。ここに，$\mathbb{P}^n$ は n 次元複素射影空間である。universal Chern class を c_i とかけば，pairing

$$(2) \qquad \begin{array}{ccccc} \mathbb{Q}[c_1, c_2, \cdots\cdots] & \times & MU^*(pt)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & \Psi & & & \Psi \\ (c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_\ell} & , & M\ ) & \longmapsto & c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_\ell}(M) \end{array}$$

(Chern number)

をうる。

2.3. 同型

Def. z を変数とし

$$\exp(t_1 z + t_2 z^2 + \cdots\cdots) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(t) z^i$$

となるとき，$\{p_i(t)\}$ を elementary Schur functions という。

Th. 2.4. ring homomorphisms

$$\begin{array}{rccc} K: & MU^*(pt)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathcal{H}_{T,0}(\mathbb{Q}) \\ & \Psi & & \Psi \\ & \mathbb{P}^n & \longmapsto & p_n((n+1)t) \\ K^+: & \mathbb{Q}[c_1, c_2, \cdots\cdots] & \longrightarrow & \mathcal{H}_{T,0}(\mathbb{Q}) \\ & \Psi & & \Psi \\ & c_n & \longmapsto & (-1)^n p_n(-t) \end{array}$$

は同型であり，pairings (1), (2) を保つ。ただし，$mt = (mt_1, mt_2, \cdots\cdots)$ である。

注意. K^+ は

$$(3) \qquad 1 + \sum_{i\geq 1} c_i z^i = \exp\left(\sum_{i\geq 1} (-1)^{i+1} t_i z^i\right)$$

からきまる ring homomorphism である。

Th 2.4 の証明のスケッチ

$u_i = i t_i$ とおく。

$$\left((K^+)^{-1}(u_{j_1}u_{j_2}\cdots u_{j_r}),\ \mathbb{P}^{i_1}\times\cdots\times\mathbb{P}^{i_s}\right) = \left(u_{j_1}u_{j_2}\cdots u_{j_r},\ K(\mathbb{P}^{i_1}\times\cdots\times\mathbb{P}^{i_s})\right)$$

を $\sum_{k=1}^{s} i_k = \sum_{\ell=1}^{r} j_\ell$ ($= n$ とおく) のときに示せば十分。

$CH^*(\mathbb{P}^n)$ を $\mathbb{P}^n$ の Chow ring, ξ_n を $\mathbb{P}^n$ の hyperplane class とする。$\mathbb{P}^n$ の total Chern class は

$$c(\mathbb{P}^n) = 1 + \sum_{i\geq 1} c_i(\mathbb{P}^n) z^i = (1+\xi_n)^{n+1}$$

である。(3) の log をとって

$$\sum_{i\geq 1} (-1)^{i+1} \frac{u_i(\mathbb{P}^n)}{i} z^i = \log(1+\xi_n z)^{n+1} = (n+1)\sum_{i\geq 1}(-1)^{i+1}\frac{\xi_n^i}{i} z^i$$

をうる。これから

$$u_i(\mathbb{P}^n) = (n+1)\,\xi_n^i .$$

また,

$$c(\mathbb{P}^{i_1}\times\cdots\times\mathbb{P}^{i_s}) = c(\mathbb{P}^{i_1})c(\mathbb{P}^{i_2})\cdots c(\mathbb{P}^{i_s}) = (1+\xi_{i_1}z)^{i_1+1}\cdots\cdots(1+\xi_{i_s}z)^{i_s+1}$$

$$\|$$

$$1+\sum_{i=1}^{n} c_i(\mathbb{P}^{i_1}\times\cdots\times\mathbb{P}^{i_s}) z^i = \exp\left(\sum_{i\geq 1}(-1)^{i+1}\frac{u_i(\mathbb{P}^{i_1}\times\cdots\times\mathbb{P}^{i_s})}{i} z^i\right).$$

log をとって

$$u_j(\mathbb{P}^{i_1}\times\cdots\times\mathbb{P}^{i_s}) = \sum_{k=1}^{s}(i_k+1)\,\xi_{i_k}^{j} .$$

故に

(4) $$\left((K^+)^{-1}(u_{j_1}\cdots u_{j_r}),\ \mathbb{P}^{i_1}\times\cdots\times\mathbb{P}^{i_s}\right) = \prod_{\ell=1}^{r} u_{j_\ell}(\mathbb{P}^{i_1}\times\cdots\times\mathbb{P}^{i_s}) = \prod_{\ell=1}^{r}\left\{\sum_{k=1}^{s}(i_k+1)\,\xi_{i_k}^{j_\ell}\right\}.$$

他方,

(5) $$\left(u_{j_1}\cdots u_{j_r},\ K(\mathbb{P}^{i_1}\times\cdots\times\mathbb{P}^{i_s})\right) = \left(\prod_{\ell=1}^{r}\frac{\partial}{\partial t_{j_\ell}}\right)\left(\prod_{k=1}^{s} P_{i_k}((i_k+1)t)\right)\Bigg|_{t=0} .$$

初等的な計算によって，(4)(5)の右辺は等しい。　q.e.d.

§3. Genera

Def. ring homomorphism $\varphi : MU^*(pt)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ を genus という。

genus を作るには次のようにする。

λ-ring $\Lambda(\mathbb{Q}) = \{1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \mid c_i \in \mathbb{Q}\}$.

multiplication は formal power series の積として定義する。これは abelian group になる。c_i は変数にも用いる。このとき，$\deg c_i = i$ とする。$T_\ell(c_1, \cdots, c_\ell)$ ($T_0 = 1$, $\ell = 1, 2, \cdots$) を $\mathbb{Q}$ に係数をもつ ℓ 次の同次式とする。

Def. $T = \{T_\ell(c_1, \cdots, c_\ell)\}_{\ell=0,1,2\cdots}$ が multiplicative sequence とは，

$$\begin{array}{ccc} \Phi_T : \Lambda(\mathbb{Q}) & \longrightarrow & \Lambda(\mathbb{Q}) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots & \longmapsto & 1 + T_1 z + T_2 z^2 + \cdots \end{array}$$

が homomorphism になるものをいう。

このとき，

$$Q(z) = \Phi_T(1+z)$$

を T の characteristic power series という (cf. [H]).

multiplicative sequence と characteristic power series は1対1に対応する。multiplicative sequence T があれば，n 次元の weakly almost complex manifold M に対し

$$\varphi(M) = T_n(c_1, \cdots, c_n)[M]$$

とおいて genus をうる。

Th.2.4 における同型 k^+ を自然に延長して

$$\hat{k}^+ : \mathbb{Q}[[c_1, c_2, \cdots]] \longrightarrow \mathbb{Q}[[t_1, t_2, \cdots]]$$

をうる。ただし，完備化は $\deg c_i = \deg t_i = i$ としてのものをとる。

$$T(c) = \sum_{n \geq 0} T_n(c_1, \cdots, c_n)$$

とおく。

Def. $\tau_T(t) = \hat{k}^+(T(c))$ を T に付随したて函数という。

T の characteristic power series を $Q(z)$ とし

(6) $$\frac{1}{Q(z)} = 1 - a_1 z + a_2 z^2 - a_3 z^3 + \cdots\cdots$$

と展開しておく。

$(\lambda_1, \cdots, \lambda_g)$　$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_g$　$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_g$ (n の分割)

とし，$x_1, x_2, \cdots\cdots$ に対して，

$$D(x; \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_g) \underset{\mathrm{def}}{=} \begin{vmatrix} x_{\lambda_1} & x_{\lambda_1+1} & x_{\lambda_1+2} & \cdots & x_{\lambda_1+g-1} \\ x_{\lambda_2-1} & x_{\lambda_2} & x_{\lambda_2+1} & \cdots & x_{\lambda_2+g-2} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ x_{\lambda_g-g+1} & \cdots & & \cdots & x_{\lambda_g} \end{vmatrix}$$

とおく。ここに，$x_0 = 1$，$x_m = 0$ $(m < 0)$ とする。これらの記号を用いて

Th.3.1. (i) $\tau_T(t) = \exp\left(\sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} b_i t_i\right)$.

ただし，b_i は $T_i(c_1, \cdots, c_i)$ における c_i の係数である。

(ii) $\tau_T(t) = \hat{k}^+(T(c))$ は次で与えられる。

$$(*)\quad T(c) = 1 + \sum_{n\geq 1}\ \sum_{n\text{の分割}} D(c;\lambda_1,\cdots,\lambda_q)\,D(a;\lambda_1,\cdots,\lambda_q)$$

$$= \det\left(\begin{array}{cccc|cccc} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 & & & & \\ & 1 & c_1 & c_2 & c_3 & & & \\ & & 1 & c_1 & c_2 & c_3 & & \\ 0 & & & 1 & c_1 & c_2 & c_3 & \ddots \end{array}\right)\left(\begin{array}{cccc} \ddots & & & 0 \\ 1 & & & \\ a_1 & 1 & & \\ a_2 & a_1 & 1 & \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ \hline & a_3 & a_2 & a_1 \\ & & a_3 & a_2 \\ & & & a_3 \\ & & & \ddots \end{array}\right)$$

となる。

無限次行列の積の行列式のとり方は次のとおり。

$$\det\left(\ {}_m\begin{array}{|c|c|}\multicolumn{1}{c}{m} & \multicolumn{1}{c}{n} \\ \hline \quad & \qquad \\ \hline\end{array}\ \right)\left(\begin{array}{r|c|} & m \\ m & \\ \hline n & \\ \end{array}\right) = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\left\{\det{}_m\begin{array}{|c|c|}\multicolumn{1}{c}{m} & \multicolumn{1}{c}{n} \\ \hline \quad & \qquad \\ \hline\end{array}\ \begin{array}{|c|l}\multicolumn{1}{c}{m} & \\ \hline \quad & m \\ \hline \quad & n \\ \hline\end{array}\right\}$$

注意 (*)の等式については1953年6月20日にHirzebruchがToddにあてた手紙の中に少なくともTodd genusについては述べられている。

例 Todd genus

$$Q(z) = \frac{z}{1-e^{-z}}$$

$$T(c) = \det\left(\begin{array}{ccc|cccc} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 & & & \\ & 1 & c_1 & c_2 & c_3 & & \\ 0 & & 1 & c_1 & c_2 & c_3 & \ddots \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} \ddots & & 0 \\ \frac{1}{2!} & 1 & \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 \\ \hline & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} \\ & & \frac{1}{3!} \\ & & \ddots \end{array}\right)$$

Th.3.1. の証明

(i) 同型 $K: \mathbb{Q}[c_1, c_2 \cdots] \simeq \mathcal{H}_{T,Q}$ は group scheme の同型

$$\kappa: \mathbb{G}_a^\infty \xrightarrow{\sim} \Lambda$$

を与える。multiplicative sequence T は group schemes の homomorphism $\Phi_T: \Lambda \longrightarrow \Lambda$ に対応する。

$$\widetilde{\Phi}_T = \kappa^{-1} \circ \Phi_T \circ \kappa$$

とおく。$\mathbb{G}_a^\infty(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^\infty$ は $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間であるから $\widetilde{\Phi}_T$ の加法群としての準同型性から，$\widetilde{\Phi}_T$ は $\mathbb{Q}$ 線型であることが従う。すなわち，$\widetilde{\Phi}_T$ は

$$t_i \longmapsto \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} t_j \quad (\text{for } \forall i = 1, 2, 3, \cdots; \ \alpha_{ij} \in \mathbb{Q})$$

の形となる。κ, Φ_T は次数を保つから $\widetilde{\Phi}_T$ も次数を保ち，従って $\widetilde{\Phi}_T$ は

$$t_i \longmapsto b_i t_i \qquad (b_i \in \mathbb{Q})$$

の形となる。可換図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{G}_a^\infty(\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\kappa} & \Lambda(\mathbb{Q}) \\
\widetilde{\Phi}_T \downarrow & & \downarrow \Phi_T \\
\mathbb{G}_a^\infty(\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\kappa} & \Lambda(\mathbb{Q})
\end{array}$$

より

$$\exp\left(\sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} b_i t_i z^i \right) = 1 + T_1 z + T_2 z^2 + \cdots\cdots$$

をうる。両辺を t_n で偏微分して $t = 0$ とおいて，

$$(-1)^{n+1} b_n = \frac{\partial}{\partial t_n} T_n \Big|_{t=0}$$

をうる。T_nは次数nの同次多項式で

$$c_n = (-1)^n p_n(-t) = (-1)^{n+1} t_n + \{t_i \text{を1次とみて, 2次以上の項}\}$$

であるから，$\frac{\partial}{\partial t_n} T_n \Big|_{t=0}$ は T_n における c_nの係数の $(-1)^{n+1}$ 倍となる。

(ii) $$g(z) = \prod_{r=1}^{n} (1 - \alpha_r z) = 1 - a_1 z + a_2 z^2 - \cdots\cdots + (-1)^n a_n z^n$$

$$Q(z) = \frac{1}{g(z)}$$

とする。$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_q)$ $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_q$ をnの分割とし，その conjugate を $\tilde{\lambda} = \mu = (\mu_1, \cdots, \mu_p)$ とする。conjugate とはnの分割に対応する Young 図形の転置に対応するnの分割のことである。このとき あきらかに $\tilde{\tilde{\lambda}} = \lambda$ となる。

Littlewood [L, p89 (6.3.3)] より，

(8) $$D(h; \lambda) = D(a; \tilde{\lambda})$$

となる。c_iを universal Chern class とし

$$1 + c_1 z + \cdots + c_n z^n = \prod_{i=1}^{n} (1 + \xi_i z)$$

と分解する。

$$g(z) = 1 - c_1 z + c_2 z^2 - \cdots\cdots + (-1)^n c_n z^n$$

$$G(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} (1 - \xi_i z)} = 1 + d_1 z + d_2 z^2 + \cdots\cdots + d_n z^n + \cdots$$

とおく。先と同様に

(9) $$D(d; \lambda) = D(c; \tilde{\lambda}).$$

$\{\lambda\}$がnの分割全体をうごけば $\{\tilde{\lambda}\}$もnの分割全体をうごく。

[L, p103, V] より，

$$Q(\xi_1)Q(\xi_2)\cdots Q(\xi_n) = 1 + \sum_{\lambda} D(h;\lambda)D(d;\lambda)$$
$$= 1 + \sum_{\tilde{\lambda}} D(h;\tilde{\lambda})D(d;\tilde{\lambda})$$
$$= 1 + \sum_{\lambda} D(a;\lambda)D(c;\lambda).$$

$Q(z)$ から multiplicative sequence Tをつくるときには，
$Q(\xi_1)Q(\xi_2)\cdots Q(\xi_n)$ を考え $n\to\infty$ とする。これで(*)が示せた。

A を $p\times q$ 行列，B を $q\times p$ 行列 $(p\leq q)$ とする。このとき

$$\det(AB) = \sum_{I} A_I B_I .$$

ただし，A_I, B_I は それぞれ A, B の $I\subset\{1,2,\cdots,q\}$ $(\# I = p)$ に対応する p-小行列式である。これを用いれば

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\det \begin{array}{c|c|c|}\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{m} & \multicolumn{1}{c}{n}\\ \cline{2-3} m & \quad & \qquad\quad \\ \cline{2-3}\end{array}\ \begin{array}{|c|c}\multicolumn{1}{c}{m} & \\ \hline \quad & m \\ \hline \quad & n\\ \hline\end{array}\right\} = 1 + \sum_{\lambda} D(c;\lambda)D(a;\lambda).$$

ただし，λは 任意の自然数の m個以下の自然数への分割全体にわたる。この式において，$m\longrightarrow\infty$ とすれば，後半の式をうる。 q.e.d.

§4. KP方程式

$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ (1変数常微分作用素)，

$L = \partial_x + u_2(x,t)\partial_x^{-1} + u_3(x,t)\partial_x^{-2} + \cdots\cdots$ に対し

$(L^n)_+ = L^n$ の微分作用素の部分

と定義する。

Def. Lが

(10) $$\frac{\partial L}{\partial t_n} = [(L^n)_+, L] \qquad (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

をみたしているとき，L を KP hierarchy の解という。

KP hierarchy の解をうるために次のような処方箋が知られている (cf. [S1], [S2])。L に対し

(11) $$W = 1 + w_1(x;t)\partial_x^{-1} + w_2(x,t)\partial_x^{-2} + \cdots\cdots$$

があって

(12) $$L = W\partial_x W^{-1}$$

となる。(10) は W に対する方程式

(13) $$\frac{\partial W}{\partial t_n} = B_n W - W\partial_x^n \qquad (\text{Sato 方程式})$$

となる。ただし，$B_n = (W\partial_x^n W^{-1})_+ = W\partial_x^n W^{-1}$ の微分作用素の部分。

Elementary Schur polynomials $\{p_i\}$ を用いて τ 函数を次のように定義する。

Def. $$\tau(t;\xi) = \det \left(\begin{array}{cccc|cccc} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 1 & p_1 & p_2 & p_3 & & \ddots & \\ 0 & & 1 & p_1 & p_2 & p_3 & & \ddots \\ & & & 1 & p_1 & p_2 & p_3 & \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccc} \ddots & & 0 \\ \cdots & \xi_{-22} & 1 \\ \cdots & \xi_{-12}\ \xi_{-11} & 1 \\ \hline \cdots & \xi_{01} & \xi_{00} \\ \cdots & \xi_{11} & \xi_{10} \\ & \vdots & \vdots \end{array} \right)$$

(cf. [S1]).

注意 $\det \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ \cdots & \xi_{-22} & 1 \\ \cdots & \xi_{-12} & \xi_{-11}\ 1 \end{pmatrix} = 1$ だから，この行列の逆行列を τ の定義の行列式の中身に右からかけて

$$\tau(t,\xi)=\det\left(\begin{array}{ccccc|cccc} \ddots & & & & & & & & \\ & 1 & p_1 & p_2 & & p_3 & & & \\ 0 & & 1 & p_1 & & p_2 & p_3 & & \\ & & & 1 & & p_1 & p_2 & p_3 & \ddots \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} \ddots & 0 \\ 0 & \begin{array}{cc} 1 & \\ & 1 \\ & & 1 \end{array} \\ \hline \cdots & \xi_{01}\ \xi_{00} \\ \cdots & \xi_{11}\ \xi_{10} \\ & \vdots\ \vdots \end{array}\right)$$

の形に正規化できる。

$x+t=(x+t_1,t_2,t_3,t_4,\cdots\cdots)$ と定義する。

Def. $\tau(x,t;\xi)=\tau(x+t,\xi)$.

τ函数を用いて Sato 方程式の解は

(14) $$W=\tau(x,t;\xi)^{-1}\tau(x,t-\tilde{\partial};\xi),$$
$$\tilde{\partial}=\left(\partial_x^{-1},\frac{1}{2}\partial_x^{-2},\frac{1}{3}\partial_x^{-3},\cdots,\frac{1}{n}\partial_x^{-n},\cdots\cdots\right)$$

で与えられる (cf. [S1], [S2])。ただし，ここにおいて ∂_x は単なる不定元と考え，W を (11) の形に整理するものとする。これを用いて (12) より KP hierarchy の解 L をうる。

この理論を用いて，genus に付随した τ 函数 $\tau_T(t)$ に対応する KP hierarchy の解を計算する。(3) において $t_i\longmapsto(-1)^{i+1}t_i$ とおきかえる。そのとき，$c_i(t)\longmapsto p_i(t)$ となるから

$$\tau(t;\xi)=\tau_T((t_1,-t_2,t_3,-t_4,\cdots\cdots))$$

とおけば，これは KP hierarchy の τ 函数となる。Th 3.1 (i) より

$$\tau(t;\xi)=\exp\Big(\sum_{i\geq 1}b_i t_i\Big).$$

(14) より，これに対応する Sato 方程式の解は，

$$W = \exp\left\{\sum_{i\geq 1} -\frac{b_i}{i}\partial_x^{-i}\right\}.$$

故に

$$L = W\partial_x W^{-1} = \partial_x,$$

すなわち，genus に付随した τ 函数は，KP hierarchy の trivial な解を与える。

参考文献

[H] F. Hirzebruch, Topological Methods in Algebraic Geometry, 3rd ed., Springer-Verlag (1966).

[KSU] T. Katsura, Y. Shimizu, K. Ueno, Complex cobordism ring and conformal field theory over $\mathbb{Z}$, to appear.

[L] D.E. Littlewood, The theory of group characters and matrix representations of groups, Oxford Univ. Press (1950).

[M] J. Milnor, On the cobordism ring Ω^* and a complex analogue, Amer. J. Math., 82 (1960), 505-521.

[S1] M. Sato, KP equation and Sato theory (lecture by M. Sato), M. Mulase のノート.

[S2] M. Sato, 初期値が形式的巾級数である場合の KP 方程式の解法 (lecture by M. Sato), M. Mulase のノート.