代数幾何学シンポジウム記録
1990年度 pp.116-123

etale topology と log の哲学

東大理　藤原 一宏

§0. Introduction

正標数の代数多様体に対する crystalline cohomology を open ないしは singular な場合にも定義するために scheme に対する log. str. が Deligne, Faltings, Fontaine, Illusie 等により定義された ([Fa] [Ka] 等. この概念を最も深く追求したのは加藤和也氏である.)
この概念は従来の log の定義よりはるかに使いやすくより本質的であるように思われる. 本稿では etale を log 化した log-etale という概念が semi-stable degeneration の etale topology の研究に使えることを示す. これ自身は簡単なことだが考え方には重要なものがあると思う.

講演の際, 川又先生により, R. Friedman の仕事 [Fr] を教えて頂いた. また log の哲学及び必要な定義を全て教えて下さった加藤先生たちにこの場をかりて感謝したい.

§1. Def. of log-str.

大ざっぱにいうと log-structure 付の scheme log-scheme とは monoid (=半群) 付の scheme のことである.

Def. 1 (cf. [Ka])

(1) M が X 上の pre-logarithmic structure であるとは.

M は X 上の (etale topology に関する) monoid の層で, homomorphism $M \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_X$ が与えられているもの. ($\mathcal{O}_X$ は multiplication に関し monoid. Mは単位元をもち 1を1にうつす)

(2) M が X 上の logarithmic str. とは M は pre-log str で

$$\alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^\times) \underset{\alpha}{\cong} \mathcal{O}_X^\times$$ がみたされるもの

この概念は X にnilpotent元があっても定義されることに注意する.

例. $M = \mathcal{O}_X^\times$. これは trivial log-str といわれる.

例: $V = DVR$. $X = \operatorname{Spec} V$. $M = V - \{0\} \xrightarrow{\alpha} V$. より一般に

X: regular scheme, D: normal crossing divisor.

$M = \mathcal{O}_X$ の subsheaf で local section が D以外で可逆になるもの全体. この log-str. を (X, D) に対する canonical log-str. ということにする. この場合が"通常の log" である.

例. 体 k 上の toric variety は自然な log-str をもつ.

M が pre log-str. のとき Mに伴う log-str $\tilde{M}$ を

$$\begin{array}{ccc} \alpha^{-1}(\mathcal{O}_X^\times) & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \\ \mathcal{O}_X^\times & & \end{array}$$

の push out として定義する（monoid の圏の中で）.

例えば 上記例2では X をlocalにみて $D=\{\prod_{i=1}^{r} x_i=0\}$ とかくと、M は $\mathbb{N}^r \to \mathcal{O}_X$, $e_i \mapsto x_i$（e_i : $\mathbb{N}^r$ の標準基底）に伴う log-str. である. この log-str. は fine で saturated.

（普通の log-str. はこの性質をもつ. saturated $\Leftrightarrow$ M が saturated monoid. fine については [Ka] を見られたい）

以下簡単のためでてくる monoid は saturated なものに限る.（必要なら saturation すればよい）

このように log-str. が定義されると普通の scheme に対する概念の多くは log 版に書きかえられる.

Def. $(X,M)\xrightarrow{f}(S,N)$ が morphism とは f は X から S への morphism で、さらに $f^*N \to M$ が与えられているもの

（N の引き戻し f^*N は自然に定義される）

morphism $(X,M)\xrightarrow{f}(S,N)$ が log-smooth（log-etale）とは

T を affine log-scheme, T' を T の閉部分 scheme で巾零 ideal で定義されたものとし、T' に T の log-str. のひき戻しを与えるとき

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & S \end{tikzcd}$$

図を可換にする $\nearrow$ が存在（ただ一つ存在）する.

いくつもの同値な条件があるが、体 k に trivial log-str. を与えると toric variety は全て k 上 log-smooth になり、これが典型的な例とな

る。fは必ずしも普通の意味でflatでないので、本稿ではlog-smoothにはflatnessを、log-étaleには quasi-finite flatness を仮定する。(これ以降でてくる場合には自然である)

代数幾何では、deformationを考えることが重要だが、1次上の一般論の枠組で、logarithmic differential Ω^1_{log}, deformation theory for log-scheme を展開することが可能で、実際、Friedman [Fr] の中にある K3 の退化の話は log 付の deformation としてとらえるのが最も自然であり、unobstructed になることを注意しておきたい。

実際、彼の意味の d-semistable variety とは、semi-stable family の special fiber になり得る log-scheme である。

§2. π_1-version.

$S = \operatorname{Spec} V$. V: complete (henselianでよい) DVR.

K: 商体 k: 剰余体 (kは分離閉と仮定する。) $\operatorname{char} k = p$.

$\eta = \operatorname{Spec} K$. $s = \operatorname{Spec} k$ $\quad \eta \to S \leftarrow s$.

X/S を proper, regular な semi-stable family とする。

(つまり) X_s は reduced normal crossing divisor とする。

$$\begin{tikzcd}
X_s \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] & X_\eta \arrow[l] \arrow[d] & X_{\eta^{tame}} \arrow[l] \arrow[d] & X_{\bar\eta} \arrow[l] \arrow[d] \\
s \arrow[r] & S & \eta \arrow[l] & \eta^{tame} \arrow[l] & \bar\eta \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$\eta^{tame} = \operatorname{Spec} K^{tame}$

K^{tame}: 最大tame拡大

$\bar\eta = \operatorname{Spec} \bar K$

$\bar K$: Kの分離閉包。

X/S が smooth なときには $\pi_1(X_{\bar\eta})^{(p)}$ ($\pi_1(X_{\bar\eta})$ の p と互いに素な位数をもつ最大 quotient.) が $\pi_1(X_s)^{(p)}$ と同型であり 従って generic fiber (の tame part) が X_s のみできまってしまうことが知られている. 複素数体上では topological な考察により semi-stable なときにも同様のことがいえる。代数的な version として

Theorem 2.1

$\{X_\eta$ 上の tame etale covering の圏$\}$

$$\xrightarrow[\text{equiv}]{\sim} \{X_{s,\log} \text{ 上の finite flat log-etale covering の なす圏}\}$$

という圏同値がある. 特に $\pi_1(X_\eta)^{\text{tame}} \xrightarrow{\sim} \pi_1(X_{s,\log\text{-et}})$.

ただし $X_{s,\log}$ とは X_s に §1 で説明した canonical log-str を与えたものである. 講演中 川又先生が指摘なさったように, この log-str は X_s のみできまると思う ([Fr].).

定理の statement で X_η を $X_{\eta\,\text{tame}}$ でおきかえ, $X_{s,\log}$ を $X_{\bar s,\log}$ でおきかえてもよい. ただし $X_{\bar s,\log} = X_s \times_s \bar s$ (log-scheme としての fiber 積). ここで $\bar s$ は s に $\begin{matrix}\mathbb{Q}^{(p)} \to k \\ 1 \longmapsto 0\end{matrix}$ に伴なう log-str を与えたもの ($\mathbb{Q}^{(p)} = \{\frac{n}{m},\ (m,p)=1\}$) であり $s \to S^{\text{tame}} = \operatorname{proj.lim}_{s \leftarrow S' : \text{tame}} S'$ による pull back log-structure と一致する.

定理 2.1 の functor の構成は, X' を X_η 上の tame covering とすると X_η の normalization in $X' = \tilde X$ の構造は Abhyankar の補題等です

ぐにわかり. canonical に log-str. が入って X 上 log-etale になる.

そこで X_s に制限して X_s 上の log-etale covering を得る.

($\mathbb{C}$ 上では $\tilde{X}$ は toroidal embedding により記述できることからもわかる)

essential surjectivity は $\tilde{X}_s$ 上の covering を次々に lift していく

Grothendieck の argument (+彼の existence theorem) から従う.

Corollary 2.2

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & \to & \pi_1(X_{\bar\eta,\,tame})^{tame} & \to & \pi_1(X_\eta)^{tame} & \to & \pi_1(\eta)^{tame} & \to & 1 \\
\| & & \wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \\
1 & \to & \pi_1(X_{\bar s},\log\text{-}et) & \to & \pi_1(X_s,\log\text{-}et) & \to & \pi_1(s,\log\text{-}et) & \to & 1
\end{array}
$$

$\pi_1(\eta)^{tame} = Gal(\bar\eta/\eta)^{tame}$.

また (文献では見かけないが) $\pi_1(X_{\bar\eta,\,tame})^{tame} \simeq \pi_1(X_{\bar\eta})^{tame}$

なので これらの群は全て $X_{s,\log}$ で決定される.

§3. cohomology version.

$(\ell, p) = 1$ とし. $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell^n,\ \mathbb{Z}_\ell,\ \mathbb{Q}_\ell$ とする.

$\mathcal{F}$ を X_η 上の smooth Λ-sheaf で tamely ramified なものとすると.

§2. より $\mathcal{F}/X_{s,\log\text{-}et}$ smooth Λ-sheaf が定まる.

$\rho : X_{\bar s,\log\text{-}et} \to X_{s,\log\text{-}et}$. $\pi : X_{\bar s,\log\text{-}et} \to X_{s,et}$ (標準射影)

とするとき

Theorem 3.1. $R\pi_*\rho^*\mathcal{F} \simeq R\psi^{tame}(\mathcal{F}) = R\psi(\mathcal{F})$.

ここで $R\psi$ ($R\psi^{tame}$) は nearby (tame nearby) cycle.

また両辺は $Gal(\bar\eta/\eta)^{tame}$ 作用をもち その作用と compatible である.

Corollary 3.2.

$$H^i(X_{s,\log\text{-}et}, \rho^*\tilde{\mathcal{F}}) \cong H^i_{et}(X_{\bar\eta}, \mathcal{F}_{\bar\eta}) \quad \text{with } \mathrm{Gal}(\bar\eta/\eta)\text{-action}$$

これは上の statement に $R\Psi$ をほどこしたものであり 右辺の vanishing cycle による filtration も $X_{s,\log}$ によって決定される。

Theorem 3.1 は まず標準射の存在を示した後に、両辺が実際 local には計算できてしまうことを使う。etale cohomology に対しては この計算は SGA 7 I にあり relative purity の帰結である。log-etale の方の計算は むしろそれよりも容易である。

証明の詳細は省くが それほど難しいものではない。

§4. applications

以上の議論から導びかれる一番重要な点は generic fiber の性質が special fiber からとらえられることにある。

例えば X/S, $\mathfrak{X}/\tilde{S}$ が 2つの semi-stable family で S = mixed char, $\tilde{S}$ = equichar となり $X_s \simeq \mathfrak{X}_s$ with log-str. となるものとする。すると

$$H^i_{et}(X_{\bar\eta}, \mathbb{Q}_\ell) \simeq H^i_{et}(\mathfrak{X}_{\bar\eta}, \mathbb{Q}_\ell) \quad \text{with } \mathrm{Gal}(\bar\eta/\eta)^{\text{tame}}\text{-act.}$$

となるので $\mathrm{Gal}(\bar\eta/\eta)$ の作用の問題 は 等標数のときに考えれば十分である。このことから hypersurface の退化の時などに (S = mixed char, 剰余体 $\simeq \bar{\mathbb{F}}_p$) monodromy filtration と Frobenius weight filtration の一致を示すことができる。

これは relative surface までは証明されており（[Ra-2]）
有限数でも Deligne によって示されているが 一般には 非常に難しい
とされている予想である.

Reference

[Fa] G. Faltings, F-isocrystals on open varieties, Results and conjectures, Grothendieck's 60'th birthday Festschrift, Birkhäuser, Boston 1990

[Ka] K. Kato, Logarithmic structures of Fontaine-Illusie, in J. I. Igusa (ed.), Algebraic analysis, geometry and number theory 191-224. Johns Hopkins University Press, Baltimore 1989.

[Fr] R. Friedman, Global smoothings of varieties with normal crossings. Ann. of Math. 118 (1983) 75-114

[Ra-2] M. Rapoport and Th. Zink, Über die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten, ..., Inv. Math 68 21-101, 1982