代数幾何学シンポジウム記録
1990年度 pp.70-85

On Cylinder Homomorphisms

東大理　島田 伊知朗
(Ichiro Shimada)

§1. General Hodge Conjecture.

X を非特異射影多様体 / $\mathbb{C}$ とする．Grothendieck の定式化による General Hodge Conjecture とは次のようなものである（cf. [6]）．

GHC (X, m, p)　$H^m(X)$ の任意の Hodge substructure V of Hodge level $\leqq m-2p$ に対して，X の Zariski 開部分集合 T で codim. $\geq p$ なるものが存在し，

$$V \subset \ker (H^m(X) \longrightarrow H^m(X \setminus T))$$

となる．

ここで Hodge 構造 V の Hodge level とは，$V \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=m} V^{p,q}$ を Hodge 分解とするとき，$\max \{ |p-q| \,|$

$V^{p,q} \neq 0$ } によって定義される整数である．通常の Hodge Conjecture は，GHC $(X, 2k, k)$ に他ならない．

例えば，X を $\mathbb{P}^{n+d}$ の中の n 次元 $(a_1, \cdots, a_d)$ 次 Fano 完全交叉とし，$-K_X = \mathcal{O}(f)|_X$ とする．つまり，$f = n+d+1-\sum a_i$．このとき，$H^n(X)$ の Hodge level は，k を $k < (f/\max(a_i)) + 1$ なる最大の整数とするとき，$n-2k$ により与えられる．(SGA 7 II Exposé XI)．もし GHC が正しいならば，codimension が k 以上の X の Zariski 開部分集合 T が存在して，$H^n(X) \to H^n(X \setminus T)$ が zero map となるはずである．すなわち，$H_n(X)$ の任意の元は T 上に support をもつ n 次元 topological cycle で represent されるはずである．

この報告では，cylinder homomorphism を用いての GHC への approach について述べる．Fano 完全交叉のいくつかの class に対して，上の予想が正しいことが実際に確かめられる．

§2. Cylinder homomorphism.

X を非特異な n 次元射影多様体 $/\mathbb{C}$ とし，$\{S_u\}_{u \in F}$ を非特異射影多様体 F によって parametrize された，X の k 次元

closed subschemes の algebraic family とする. 例えば $\mathcal{F}$ として, X の Chow variety のある component の resolution をとればよい. このような algebraic family に付随して cylinder homomorphism

$$\begin{aligned} \psi: \quad H_{m-2k}(\mathcal{F}, \mathbb{Z}) &\rightarrow H_m(X, \mathbb{Z}) \\ [\gamma] &\mapsto [\bigcup_{u \in \gamma} S_u] \end{aligned}$$

が定義される.

<u>Lemma.</u> (Steenbrink [9])

もし $\psi \otimes \mathbb{Q}: H_{m-2k}(\mathcal{F}, \mathbb{Q}) \rightarrow H_m(X, \mathbb{Q})$ が全射なら $H^{2n-m}(X)$ の Hodge level は $m-2k$ 以下であり, GHC $(X, 2n-m, n-m+k)$ が成立する.

<u>証明.</u> Lefschetz の定理により, 必要ならば $\mathcal{F}$ をその hyperplane section でとりかえることによって, $\dim \mathcal{F} \leqq m-2k$ であるとしてよい. $T = \bigcup_{u \in \mathcal{F}} S_u$ とおけば $\dim T \leqq m-k$ よって $\operatorname{codim} T$ in $X \geqq n-m+k$. 一方, $\psi \otimes \mathbb{Q}$ の全射性により $H_m(T) \rightarrow H_m(X)$ は全射. よって $H^m(X) \rightarrow H^m(X \setminus T)$ は zero map. □

§1の例にもどると，次の問題が解ければ，$GHC(X, n, k)$ がたしかめられたことになる．

<u>問題.</u> n次元Fano完全交叉Xで，$H^n(X)$がHodge level $n-2k$であるものに対し，X上のk次元closed subschemesのalgebraic familyで，付随するcylinder homomorphismが全射になるものを見つけること．

現在までに次のような結果が得られている．n次元完全交叉Xに対して，$V_n(X, \mathbb{Z})$によりvanishing cyclesの空間

$$\ker(H_n(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(\mathbb{P}^{n+d}, \mathbb{Z}))$$

をあらわす．

<u>Proposition 1.</u> Xをgeneralなd個の2次超曲面の完全交叉とし，$\dim X = n$，Hodge level of $H^n(X) = n-2k$とする．$k>0$と仮定する．このとき，X内に含まれるk次元$(1, \cdots, 1, 2, \cdots, 2)$次の完全交叉（ただし1が$n+1-k$個，2が$d-1$個）のfamilyに付随したcylinder homomorphismのimageは$V_n(X, \mathbb{Z})$を含む．

<u>Corollary.</u> Xをnon-singular n次元$(2, \cdots, 2)$次の

完全交叉とし，$H^n(X)$ の Hodge level が $n-2k$ $(k>0)$ であるとする．このとき $GHC(X, n, k)$ が成立．

Proposition. 2　次元 n，次数 $(a_1, \cdots, a_d)$ を固定したとき，general な完全交叉 X がその上にのっている k-planes でおおわれているとする．$\mathcal{L}_k(X)$ を the variety of k-planes on X とする．このとき cylinder homomorphism

$$\psi : H_{n-2k}(\mathcal{L}_k(X), \mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(X, \mathbb{Z})$$

の image は $V_n(X, \mathbb{Z})$ を含む．

実は Proposition 2 の cylinder homomorphism については，より強い次のことがいえる．

Proposition. 3　Prop. 2 の状況において，$\psi \otimes \mathbb{Q}$ の kernel は，自然な写像 $H_{n-2k+2\delta}(\mathrm{Grass}(\mathbb{P}^k, \mathbb{P}^{n+d}), \mathbb{Q}) \to H_{n-2k}(\mathcal{L}_k(X), \mathbb{Q})$ の image に含まれる．ここで δ = codimension of $\mathcal{L}_k(X)$ in $\mathrm{Grass}(\mathbb{P}^k, \mathbb{P}^{n+d})$．特に n が奇数なら，ψ は isomorphism modulo torsion になる．

Remark 1. Proposition 1 の statement は general な X に対してのものであるが，Corollary はすべての non-singular な X に対して成立することに注意．これは次の Lemma による．証明は容易なので略．

Lemma. $\pi : \mathcal{X} \to S$ を既約な curve S 上の射影多様体の smooth な family とする．generic member X_η が codim p の subvariety $Y_\eta \subset X_\eta$ で，

$$H_m(Y_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}) \to H_m(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q}) \to H_{m,prim}(X_{\bar{\eta}}, \mathbb{Q})$$

が全射となるものをもっているとする．このときに，任意の closed point $s \in S$ に対して，$X = \pi^{-1}(s)$ は codim p の subvariety $Y_s \subset X_s$ で，

$$H_m(Y_s, \mathbb{Q}) \to H_{m,prim}(X_s, \mathbb{Q})$$

が全射となるものをもつ．

Remark 2. 次数 $(a_1, \cdots, a_d)$ と k を固定したとき，次元 n を十分大きくとれば Proposition 2 の仮定はみたされる．しかしこのとき一般には，$H^n(X)$ の Hodge level は $n-2k$ よりもっと小さくなってしまう．

Remark 3. Proposition 3 は，$k=1$ で X が 3 次

元3次超曲面のときは，有名な Clemens－Griffiths の定理（cf. [4]）に他ならない．

Proposition 1, 2 は，次の§で述べる Theorem から，簡単な dimension counting と infinitesimal calculation により導かれる．Proposition 3 は，次の Claim から Clemens－Letizia argument（cf. [7]）を用いて証明される．

<u>Claim.</u> $\{X_t\}_{t \in \mathbb{P}^1}$ を，Proposition 2 における Fano 完全交叉を member とする general な Lefschetz pencil とする．このとき general な $t \in \mathbb{P}^1$ に対しては，$\mathcal{L}_k(X_t)$ は non-singular であり，任意の $t \in \mathbb{P}^1$ について $\mathcal{L}_k(X_t)$ の singular locus は，$\mathcal{L}_k(X_t)$ の中で codim $\geq n-2k$ である．codim $= n-2k$ となるのは，X_t が node δ をもつ場合であり，このとき，codim $n-2k$ の singular locus は $\mathcal{L}_k(X_t, \delta) := \{\mathbb{P}^k \subset \mathcal{L}_k(X_t) \mid \delta \in \mathbb{P}^k\}$ と一致する．さらに $\mathcal{L}_k(X_t, \delta)$ は non-singular, connected.

Clemens - Letizia の方法を簡単に説明する. $t = t_1, \cdots, t_M$ のとき X_t が node δ_t をもち, $t \in D^\circ := \mathbb{P}^1 \setminus \{t_1, \cdots t_M, t_{M+1}, \cdots, t_{M+N}\}$ に対して $\mathcal{L}_k(X_t)$ は non-singular であるとする. $H_{n-2k}(\mathcal{L}_k(X_t))$ の中の vanishing cycles は $t = t_i$ $(i=1, \cdots, M)$ における singular locus $\mathcal{L}_k(X_{t_i}, \delta_{t_i})$ に対応するものしかありえない. (つまり $t = t_{M+1}, \cdots, t_{M+N}$ における local monodromy は trivial.) ψ の image は $V_n(X, \mathbb{Z})$ を含むから $t = t_i$ $(i=1, \cdots, M)$ における vanishing cycle は, ψ によって node $\delta_{t_i} \in X_{t_i}$ に対応する vanishing cycle にうつされる. 特にその image は non-trivial. よって $\ker \psi \otimes \mathbb{Q}$ の元は, $\pi_1(D^\circ)$ の monodromy action に対して invariant. 一方, $\pi_1(D^\circ)$ の action に対する invariant cycles の space が, $H_{n-2k+2\delta}(\mathrm{Grass}) \to H_{n-2k}(\mathcal{L}_k(X))$ の image であることが, d についての induction と, invariant cycle theorem を用いることにより証明される.

§3. Cylinder homomorphism の surjectivity について

この§では, 一般の cylinder homomorphism に対して

その全射性を与える簡単な十分条件について述べる．この§の結果は，§2で述べた問題を更にいろいろなXに対して考えていくときにも役立つであろうと考えている．

Vを$n+1$次元非特異射影多様体，LおよびL'をV上のvery ample line bundlesとする．$P=|L|$, $P'=|L'|$をcomplete linear systemsとし，$\mathcal{C}\subset P\times P'$でcomplete intersections of members of $|L|$ and $|L'|$のなすopen subsetをあらわす．$\{S_u\}_{u\in F}$をV上のk-dimensional subvarietiesのalgebraic familyとする．Vのsubvariety Wに対して

$$F(W) = \{u\in F \mid S_u\subset W\}$$

とおき，対応するcylinder homomorphismを

$$\varphi_{m,W} \ : H_{m-2k}(F(W),\mathbb{Z}) \to H_m(W,\mathbb{Z})$$

であらわす．次のような記号を導入する．

$V\times P \supset \mathfrak{X} \to P$ the universal family of P

$V\times \mathcal{C} \supset \mathcal{Y} \to \mathcal{C}$ the universal family of $\mathcal{C}$

$$\mathcal{F}_{\mathcal{P}} := \{ (X,u) \in \mathcal{P}\times\mathcal{F} \mid S_u \subset X \}$$
$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}} := \{ (Y,u) \in \mathcal{C}\times\mathcal{F} \mid S_u \subset Y \}$$

$$\Omega_{\mathcal{P}} := \{ (p,X,u) \in V\times\mathcal{P}\times\mathcal{F} \mid p \in S_u \subset X \}$$
$$\Omega_{\mathcal{C}} := \{ (p,Y,u) \in V\times\mathcal{C}\times\mathcal{F} \mid p \in S_u \subset Y \}.$$

このとき次のような可換図式が定まる．

$$\begin{tikzcd} & \Omega_{\mathcal{P}} \arrow[dl, "\pi_{\mathcal{P}}"'] \arrow[dr, "A_{\mathcal{P}}"] & \\ \mathcal{F}_{\mathcal{P}} \arrow[dr, "f_{\mathcal{P}}"'] & & \mathcal{X} \arrow[dl] \\ & \mathcal{P} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \Omega_{\mathcal{C}} \arrow[dl, "\pi_{\mathcal{C}}"'] \arrow[dr, "A_{\mathcal{C}}"] & \\ \mathcal{F}_{\mathcal{C}} \arrow[dr, "f_{\mathcal{C}}"'] & & \mathcal{Y} \arrow[dl] \\ & \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

general な $X \in \mathcal{P}$ 及び $Y = X \cap H \in \mathcal{C}$ $(H \in \mathcal{P}')$ に対して，

$$V_n(X,\mathbb{Z}) := \ker\,(H_n(X,\mathbb{Z}) \to H_n(V,\mathbb{Z}))$$
$$V_{n-1}(Y,\mathbb{Z}) := \ker\,(H_{n-1}(Y,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-1}(X,\mathbb{Z}))$$

と定義する． $V_n(X,\mathbb{Z}) \neq 0$ なら，singular members のなす locus $\mathcal{P}_{sing} \subset \mathcal{P}$ は，of codim 1 であり，$\mathcal{P}_{sing}$ の general な member は高々 node をもつにすぎない．同様のことが Y 及び $\mathcal{C}_{sing}$

に対しても成立する．以下，$V_n(X,\mathbb{Z}) \neq 0$，$V_{n-1}(Y,\mathbb{Z}) \neq 0$ と仮定する．

<u>Theorem</u>　n は偶数とする．

(1)　general な singular member $X_0 \in P_{sing}$ with a node q に対して，次の諸条件を満たす $S_a \subset X_0$ が存在すると仮定する．

(a)　$q \in S_a$ であり，S_a は q で non-singular.

(b)　F_P は (X_0, a) で non-singular

(c)　f_P は (X_0, a) において locally surjective.

(d)　(q, X_0, a) において，$A_P^{-1}(q, X_0)$ は reduced non-singular, of dimension $\dim F(X_0) - \dim X_0 + 2k$.

このとき，general な $X \in P$ に対して $\psi_{n,X}$ の image は $V_n(X,\mathbb{Z})$ を含む．

(2)　X_0 及び q は上の通りとする．$q \in H$ なる $H \in P'$ を general にとって，$Y_0 := X_0 \cap H$ とおく．このとき $S_a \subset Y_0$ で上の条件 (a), (b), (c), (d) をみたしように次の条件をみたすものが存在するとする．

(b')　F_ℓ は (Y_0, a) で non-singular

(c')　f_ℓ は (Y_0, a) において locally surjective

(d')　(q, Y_0, a) において，$A_\ell^{-1}(q, Y_0)$ は reduced

non-singular, of dimension $\dim F(Y_0) - \dim Y_0 + 2k$.
このとき general な $Y \in \mathcal{C}$ に対して $\psi_{n-1,Y}$ の image は $V_{n-1}(Y, \mathbb{Z})$ を含む.

$k=1$ で $n=3$ の場合には Clemens [3] が同様の結果をすでに証明している．しかし [3] においては，Ping の monodromy が，$X_0 \ni \delta$ の resolution の exceptional locus 上の 27 の rulings の上に non-trivial に作用するといった global な条件も仮定している．又 [3] を用いた [1], [2], [5], [7] においても，nodal curve $F(X_0, \delta) = \{ u \in F(X_0) \mid \delta \in S_u \}$ が irreducible であるといった global な条件を証明せねばならず，そのためにたとえば infinitesimal Abel-Jacobi map を用いて，ψ が non-trivial であることを示さねばならなり.

我々の定理は，任意の次元 k 及び n (or $n-1$) に対して適用できるのみならず，与えられた条件が (a, X_0, δ) における local なものであるという利点をもつ.

以下，証明の outline を述べる． <u>Step 1.</u> X_0 (resp. Y_0) を含む general な pencil $\{X_t\}$ (resp. $\{Y_t\}$)

をとる. a において, $A_p^{-1}(X_0, \delta) \cong F(X_0, \delta) := \{ u \in F(X_0) \mid \delta \in S_u \}$ (resp. $A_e^{-1}(Y_0, \delta) \cong F(Y_0, \delta)$) が $F(X_0)$ (resp. $F(Y_0)$) の中で codim $n-2k$ (resp. $(n-1)-2k$) の quadratic singularity になっていることを示す. ここで quadratic singularity of codimension p とは, $\{(z_0, \cdots, z_N) \mid z_0^2 + \cdots + z_p^2 = 0\}$ の singular locus $\{z_0 = \cdots = z_p = 0\}$ と local に同型になっている singularity のことである. 従って $\varepsilon \neq 0$ を十分小さい数としたとき, $F(X_\varepsilon)$ (resp. $F(Y_\varepsilon)$) には $n-2k$ 次元 (resp. $(n-1)-2k$ 次元) の vanishing cycle $[\sigma_\varepsilon] \in H_{n-2k}(F(X_\varepsilon), \mathbb{Z})$ (resp. $[A_\varepsilon] \in H_{n-1-2k}(F(Y_\varepsilon), \mathbb{Z})$) が存在する. $[\Sigma_\varepsilon] \in H_n(X_\varepsilon, \mathbb{Z})$ (resp. $[S_\varepsilon] \in H_{n-1}(Y_\varepsilon, \mathbb{Z})$) を node δ に対応する vanishing cycle とする. cylinder homomorphism と specialization は可換だから $\psi_{n, X_\varepsilon}([\sigma_\varepsilon]) = m \cdot [\Sigma_\varepsilon]$ (resp. $\psi_{n-1, Y_\varepsilon}([A_\varepsilon]) = m' \cdot [S_\varepsilon]$) となる $m, m' \in \mathbb{Z}$ が存在する. $m = m' = \pm 1$ を示せばよい. <u>Step. 2</u> $\psi_{n, X_\varepsilon}([\sigma_\varepsilon]) \cdot [\Sigma_\varepsilon] = \pm 2$ を示す. $[\Sigma_\varepsilon] \cdot [\Sigma_\varepsilon] = \pm 2$ であるから $m = \pm 1$ がいえる. ここで n が偶数という仮定が使われる. <u>Step. 3</u> $m = \pm m'$ を示す. そのために次のような trick を用

いる．$\{X_t\}_{t\in\mathbb{P}^1}$, $\{H_s\}_{s\in\mathbb{P}^1}$ を P, P' の pencils で，$q\in X_0$, $q\in H_0$, $q\in X_0$ は node, H_0 は non-singular なものとする．これらの pencils を general にえらべば q 近傍の V の局所座標系 $(z_0,\cdots,z_n)$ で，

$$X_t=\{z_0^2+\cdots+z_n^2=t\}$$
$$H_s=\{h(z_0)=s\} \quad h \text{ は一変数正則関数}, \ h'(0)\neq 0$$

となるものがとれる．$Y_{ts}=X_t\cap H_s$ とおく．ε を positive real にとる．n-sphere

$$\Sigma_\varepsilon=\{z_0^2+\cdots+z_n^2=\varepsilon,\ z_i\in\mathbb{R}\}\subset X_\varepsilon$$

が $[\Sigma_\varepsilon]$ を represent する．$Y_{\varepsilon h(\sqrt{\varepsilon})}$ 及び $Y_{\varepsilon h(-\sqrt{\varepsilon})}$ は node q_+, q_- をもつ．v を $-\sqrt{\varepsilon}<v<\sqrt{\varepsilon}$ なる実数とするとき，$H_{n-1}(Y_{\varepsilon h(v)})$ の中の，$q_\pm$ に対応する vanishing cycle は $(n-1)$-sphere

$$S_v=\{z_0=v,\ z_1^2+\cdots+z_n^2=\varepsilon-v^2,\ z_i\in\mathbb{R}\}$$

によって represent される．$\Sigma_\varepsilon=\{q_+\}\cup\bigcup_v S_v\cup\{q_-\}$ であることに注意．つまり，X_ε の vanishing cycle Σ_ε を slice することにより，$Y_{\varepsilon h(v)}$ の vanishing cycle が得られている．同様の構成が，$F(X_\varepsilon)$ の vanishing cycle $[\sigma_\varepsilon]$ に対してもできる. つまり, $[\sigma_\varepsilon]$ は $(n-2k)$-sphere σ_ε によって represent され, $F(Y_{\varepsilon k(0)})$ に含まれる $(n-2k-1)$-sphere A_v が存在して, $[A_v]$ が $F(Y_{\varepsilon k(\pm\sqrt{\varepsilon})})$ の singular locus に対応する vanishing cycle となり, かつ

$$\sigma_\varepsilon = \{v_+\} \cup \bigcup A_v \cup \{v_-\}$$

が成立する. ここで $v_\pm$ は $F(Y_{\varepsilon k(\pm\sqrt{\varepsilon})})$ の singular locus 上の点. この構成により,

$$\psi_{n-1, Y_{\varepsilon k(0)}}([A_v]) = m'\cdot[S_0] \Rightarrow \psi_{n, X_\varepsilon}([\sigma_\varepsilon]) = m'\cdot[\Sigma_\varepsilon]$$

がわかる. これより $m = m'$ //

Remark. 上の議論においては

$$\mathrm{im}\,\psi_{n,X} \supset V_n(X) \Rightarrow \mathrm{im}\,\psi_{n-1,Y} \supset V_{n-1}(Y)$$

を示している. [8] においては, $\mathbb{Q}$-係数 homology 群の vanishing cycle に対して, 同様の trick により

$$\mathrm{im}\,\psi_{n-1,Y} \supset V_{n-1}(Y) \Rightarrow \mathrm{im}\,\psi_{n,X} \supset V_n(X)$$

を示している. (ここでは n: 偶数 という仮定はしていない.)

References.

[1] L.P.Botta, On the intersection of three quadrics, J. reine angew. Math., **399** (1989), 188-207.

[2] G.Ceresa and A.Verra, The Abel-Jacobi isomorphism for the sextic double solid, Pacific J. Math., **124** (1986), 85-105.

[3] C.H.Clemens, On the surjectivity of Abel-Jacobi mappings, Ann. of Math., **117** (1983), 71-76.

[4] C.H.Clemens and P.A.Griffiths, The intermediate Jacobian of the cubic threefold, Ann. of Math., **95** (1972), 281-356.

[5] A.Collino, The Abel-Jacobi isomorphism for the cubic fivefold, Pacific J. Math., **122** (1986), 43-55.

[6] A.Grothendieck, Hodge's general conjecture is false for trivial reasons, Topology, **8** (1969), 299-303.

[7] M.Letizia, The Abel-Jacobi mapping for the quartic threefold, Invent. Math., **75** (1984), 477-492.

[8] I.Shimada, On the cylinder homomorphisms of Fano complete intersections, J. Math. Soc. Japan, **42** (1990), 719-738.

[9] J.H.M.Steenbrink, Some remarks about the Hodge conjecture, Lecture Notes in Math., **1246**, pp. 165-175, Springer, 1985.

SGA 7II. Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique, Lecture Notes in Math., **340**, Springer, 1973.