【 81 】

氏　名	林　田　和　也（はやし　だ　かず　なり）
学位の種類	理　学　博　士
学位記番号	論　理　博　第 348 号
学位授与の日付	昭 和 46 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 5 条 第 2 項 該 当
学位論文題目	**Uniqueness in Cauchy's problem for certain fourth order elliptic equations** （四階楕円型方程式に対する Cauchy 問題）
論文調査委員	（主　査）教 授 溝 畑　茂　教 授 山 口 昌 哉　教 授 松 浦 重 武

論　文　内　容　の　要　旨

偏微分方程式に対する Cauchy 問題の解の一意性に関する研究は，偏微分方程式の一般理論において比較的新しいものである。

$$(1)\quad L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}u + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + C(x)u = 0$$

を R^n の開集合 Ω で定義された楕円型方程式とする。すなわち,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \delta|\xi|^2 \quad (\delta>0)$$

を満足するとする。一意性の定理とは，Ω のある超曲面 Γ 上での Cauchy data $\left\{u, \frac{\partial u}{\partial n}\right\}$ が 0 であるとき，$L[u]=0$ の解は $u(x)\equiv 0$ に限るという事実である。この証明は Carleman が n=2 の場合1938年に与えたが，1958年に Calderón によってもっと一般の形で証明された，すなわち，方程式が simple characteristic の場合には楕円型でなくとも解の一意性がなりたつことが特異積分作用素を用いることによって証明された。それ以来，Mizohata, Hörmander 等によって四階の楕円型方程式に対しても解の一意性がなりたつことが示されたが，他方 Plis は，6 階の楕円型作用素に対しては，もはや一意性定理は一般にはなりたたないことを実例によって示した。

これらと同時代にソビエトの Landis（1956年），Lavrentèv（1957年）は方程式（1）において，定理の仮定をゆるめて，Cauchy data $\left\{u(x), \frac{\partial}{\partial n}u(x)\right\}$ が Γ 上で恒等的に 0 でなくても，x が 1 点 x_0 に Γ にそって近づくとき，$0\left(exp(-|x-x_0|^{-\delta})\right)(\delta>2)$ という減少の order をもてば，$u(x)\equiv 0$ が x_0 の近傍でなりたつことを示し，一意性の定理に新しい見方を提供した。申請者の主論文は，参考論文1. 3と合わせて，この方向の研究を推進させたものといえるであろう。

参考論文 1 においては，n= 2 の場合，simple characteristic であれば，一般高階楕円型方程式に対して一意性がなりたっことが示されている。主論文では，空間次元が一般であって，方程式 L[u]= 0 が，

$$L = L_1 L_2 + \sum_{|\alpha| \leqq 3} a_\alpha(x) D^\alpha$$

という形の場合について解の一意性がなりたつことが示されている。ここで L_1, L_2 は（１）の形の楕円型作用素である。これと平行して，

$$L_p[u_p] = F_p(x, u_1, \cdots\cdots, u_m, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \cdots\cdots, \frac{\partial u_m}{\partial x_n}) \quad (p = 1, 2, \cdots\cdots, m)$$

ということ形の連立系についても同様な結果がなりたつことが示されている。ここで L_p は（１）の形の楕円型用素である。申請者の手法は特異積分作用素を巧みに用いるものであるが，同時に問題の取り扱いに適合した重みの函数を導入して積分不等式を導くものであり，大属複雑な計算を積み重ねた末に漸く目的であるところの解の一意性が証明されている。

論文審査の結果の要旨

申請論文でえられている結果は，Landis, Lavrentév の結果の拡張といえるであろうが，申請者の手法は新しいものであり，かつ創意に富んでいる。

証明の第一段階では，初期値が Γ 上で恒等的に０である場合に知られている不等式

$$\int_{\Omega_h} \varphi^{2n} |L_1 L_2 w|^2 dx + n^2 \varphi^{2n}(h) \geqq cn \sum_{|\alpha| \leqq 3} \int_{\Omega_h} \psi^{2n} |D^\alpha w|^2 dx$$

を巧みに用いて，Cauchy data が，初期面にそって１点 x_0 に近づいたとき，指数函数的に０に近づく場合，積分 $\int_{\Omega_h} |D^\alpha u|^2 dx$ もまた h の指数函数的に０に近づくことが導かれている。ただし，Ω_h は球 $\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \sum_{j=2}^{n} x^2{}_j < 1$ の $0 < x_1 < h$ の部分である。この段階が最も基本的な部分であり，申請者の創意がうかがえる。

証明の第二段階では，楕円型作用素の基本解の性質に着目して，うえの結果から $|D^\alpha u(x)|$ もまた指数函数的に０に近づくことが示されている。この点も興味深い。

さらに，第３段階では，重みの函数 $\Phi(x) = x_1/r^2$ が導入され，つぎの基本的な不等式がえられている。

$$c\int r^4 \Phi^{1-\delta} \exp(2n\Phi^\delta)(Lv)^2 dx \geqq n^3 \int r^{-4} \Phi^{2\delta-3} \exp(2n\Phi^\delta) v^2 dx$$
$$+ n\int \Phi^{-1} \exp(2n\Phi^\delta) |\nabla v|^2 dx$$

この不等式の証明は大属複雑であり，きわめて繊細な計算によって導かれたものである。

以上を綜合すれば，申請者は困難な計算を遂行することによって目的を達しており，創意とともに鋭い解析的能力をもっていることがわかる。この方面の研究は応用面からの示唆を受けて将来の発展が期待されるものであり，その第一歩として意義があるものと思われる。

よって，本論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認める。